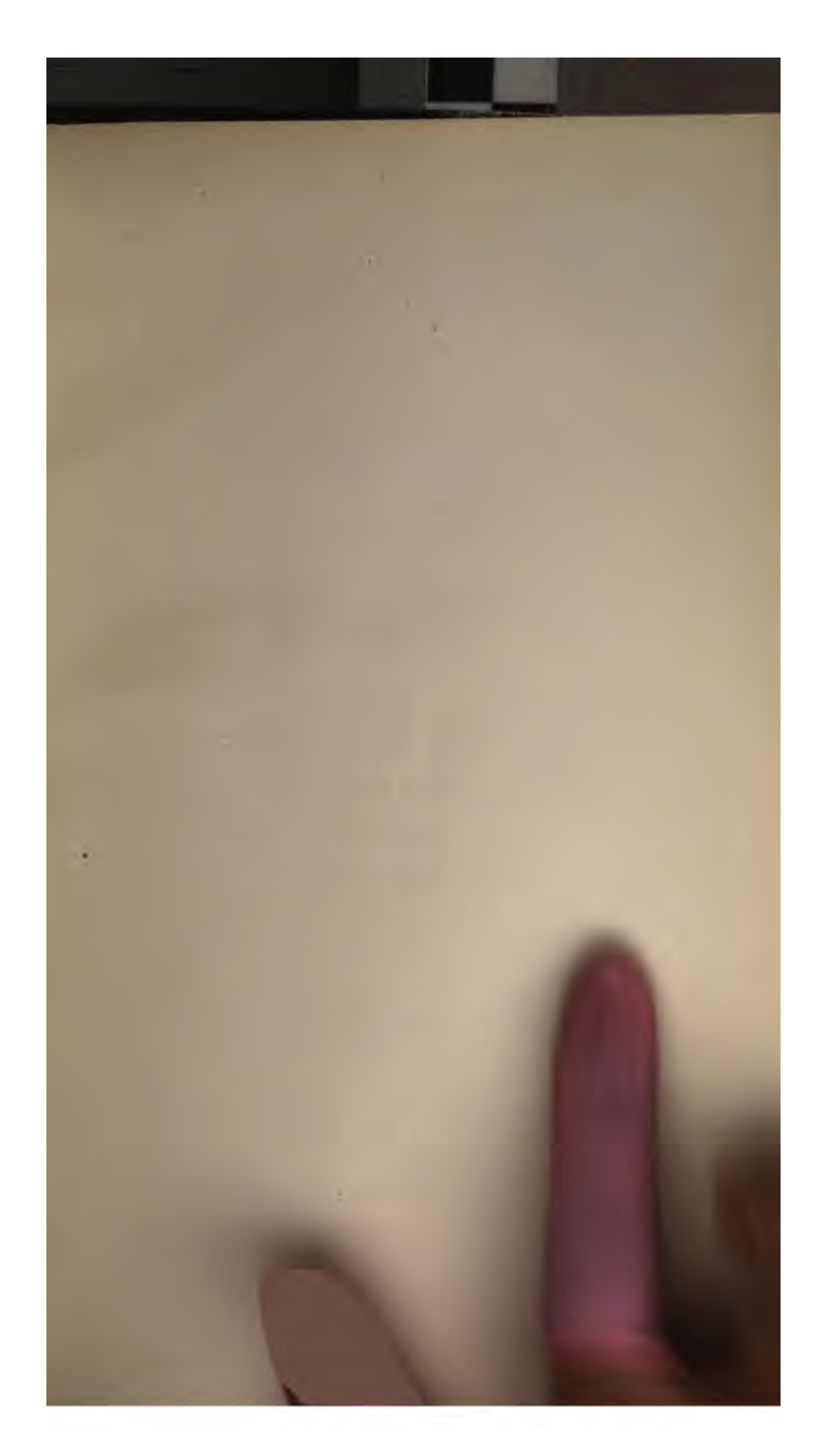
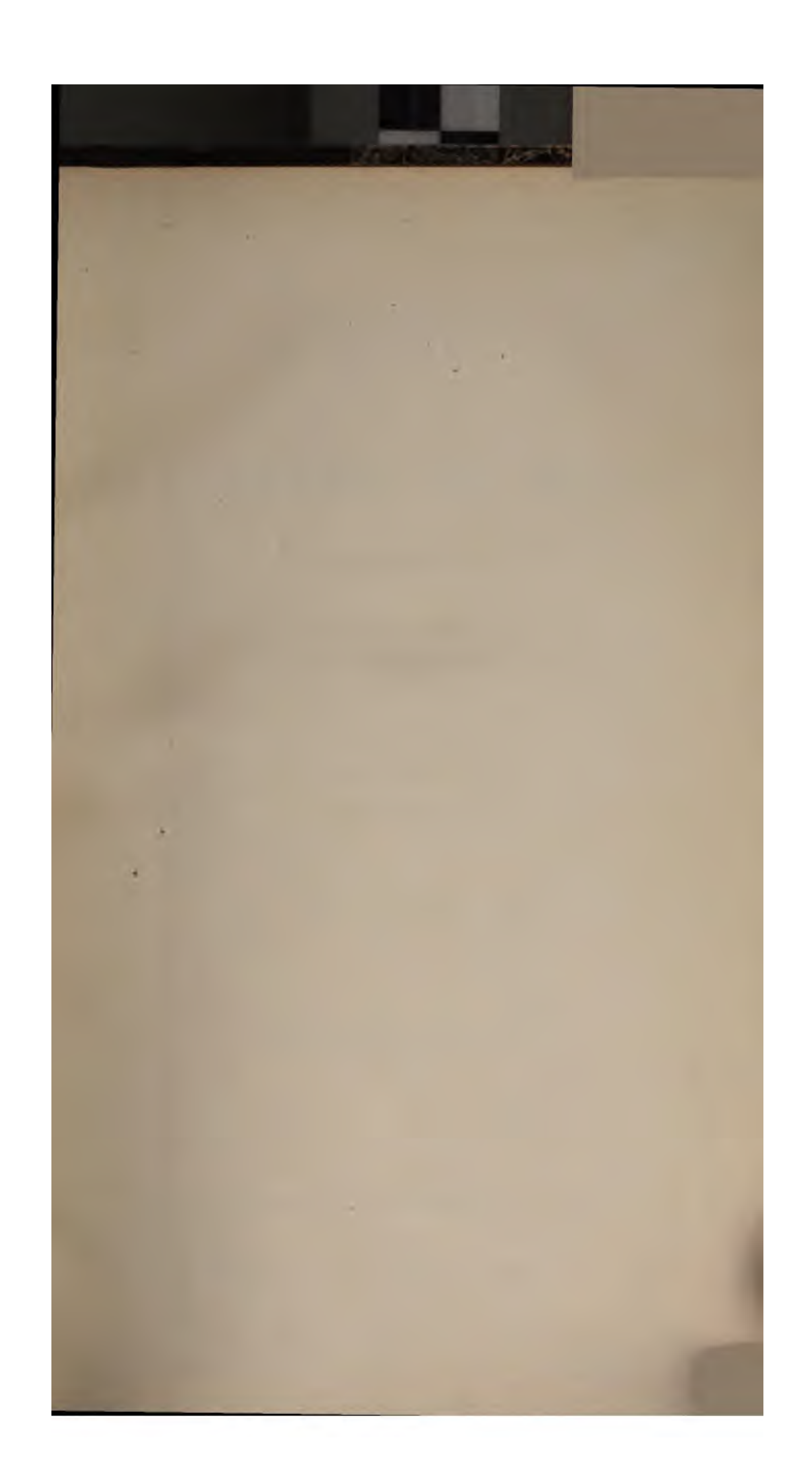



Stanford University Libraries
3 6105 025 497 848









ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Vierundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1879.

Inhalts-Verzeichniss

des vierundsechzigsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Litterarische Berichte.

Geometrie der Ebene.

Berichtigungen im 64. Te

Seite 25 Zeile 10 v. u. statt (8) setze

„ **26** „ **8 v. o. statt** $+\ldots+R_k$ setze

„ **29** „ **5 v. u. statt** $\left(\frac{z}{p}\right)$ setze

I.

Ueber die Kettenbruchentwickelung für die Irrationale 2. Grades.

Von

K. E. Hoffmann.

Lagrange hat zuerst nachgewiesen, dass man eine Lösung der sogenannten Pell'schen Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

dadurch erreichen kann, dass man $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch entwickelt, welcher bekanntlich periodisch ausfällt, und entweder den der 1. oder den beiden ersten Perioden entsprechenden Näherungsbruch $\frac{x_0}{y_0}$ bestimmt; dann sind nämlich x_0 und y_0 die gesuchten Lösungen; ausser dieser 1. Lösung gibt es aber unendlich viele andere Lösungen, welche nach Anleitung der mir zugänglichen Werke dadurch erhalten werden, dass man $(x_0+y_0\sqrt{A})^n$ entwickelt und $= x_n+y_n\sqrt{A}$ setzt; x_n und y_n sind dann jedesmal Wurzeln der Pell-schen Gleichungen; gewöhnlich wird dann hinzugefügt, dass $\frac{x_n}{y_n}$ ein einer späteren vollen Periode entsprechender Näherungswert des Kettenbruches ist; in keiner der mir bekannten Schriften über diesen Gegenstand finde ich aber einen directen Nachweis für diese Tatsache; derselbe lässt sich nun ziemlich leicht führen durch die Methode, welche ich in einem früheren Aufsatze (62. T. XX.) zur Bestimmung der geschlossenen Form des periodischen Kettenbruches anwendete;

bei dieser Untersuchung ergeben sich gleichzeitig einfache Beweise für mehrere auf die Entwickelung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch bezügliche Sätze; ich glaube deshalb, diese Untersuchung hier mitteilen zu sollen.

Ausser den in dem erwähnten Aufsatze angenommenen Grössen $z_1 \dots z_n$ habe ich dann noch dem Kettenbruch eine ganze Zahl z_0 vorzusetzen und schreibe also nach der a. a. O. angegebenen Bezeichnung:

$$\frac{D_{0,n}}{D_{1,n}} = z_0 + \cfrac{1}{z_1 + \cfrac{1}{z_2 + \cdots + \cfrac{1}{z_n}}}$$

Zunächst setze ich mit Benutzung der Recursionsformel für die D

$$\frac{D_{0,n}}{D_{1,n}} = \frac{z_n D_{0,n-1} + D_{0,n-2}}{z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2}}$$

und erhalte daraus, indem ich $z_n + x$ an die Stelle von z_n treten lasse,

$$1) \qquad x = \frac{D_{0,n} + x D_{0,n-1}}{D_{1,n} + x D_{1,n-1}},$$

wobei x den unendlichen Kettenbruch

$$z_0 + [z_1, z_2 \dots (z_n + z_0), z_1, z_2, \dots (z_n + z_0), \dots]$$

darstellt. Aus 1) ergibt sich durch Auflösung:

$$2) \quad x = \frac{-(D_{1,n} - D_{0,n-1}) \pm \sqrt{(D_{1,n} - D_{0,n-1})^2 + 4 D_{0,n} D_{1,n-1}}}{2 D_{1,n-1}}.$$

Sei nun x die Wurzel einer reinen quadr. Gleichung, also $= \sqrt{A}$, dann ergeben sich durch Vergleichung der rationalen und irrationalen Teile von 2) die Formeln:

$$3) \qquad D_{1,n} = D_{0,n-1}$$

$$4) \qquad D_{0,n} = A \,.\, D_{1,n-1}.$$

Die 3) liefert zunächst einen einfachen Beweis für den bekannnten Satz von der symmetrischen Anordnung der z; man erhält nämlich durch recurrirende Entwickelung der D zunächst:

$$z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2} = z_0 D_{1,n-1} + D_{2,n-1}$$

und hieraus:

$$5) \qquad z_n + \frac{D_{1,n-2}}{D_{1,n-1}} = z_0 + \frac{D_{2,n-1}}{D_{1,n-1}}.$$

Wenn nun die Grössen z als positiv vorausgesetzt werden, so erkennt man sofort, dass sowol $D_{1,n-2}$ als auch $D_{2,n-1} < D_{1,n-1}$, folglich die in der 5) vorkommenden Brüche echte sind; aus dieser Bemerkung ergibt sich dann unmittelbar:

6) $$z_n = z_0 \quad \text{und}$$

7) $$D_{1,n-2} = D_{2,n-1}.$$

Aus der 7) findet man auf dieselbe Weise:

$$z_1 = z_{n-1} \quad \text{und}$$
$$D_{3,n-2} = D_{2,n-3}$$

und auf dieselbe Weise weiter schliessend allgemein, wie leicht zu beweisen ist,

8) $$z_s = z_{n-s}.$$

Wegen

$$z_n = z_0$$

ist dann

$$z_n + z_0 = 2z_0$$

und so erhält man die bekannte Formel

$$\sqrt{A} = z_0 + [z_1, z_2, z_3 \ldots z_3, z_2, z_1; 2z_0; z_1, z_2 \ldots]$$

wobei also z_0 die grösste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl darstellt. Aus der 4) ergeben sich weitere Bedingungen für die z; zu dem im Eingang erwähnten Satze gelangt man aber durch Verbindung der 3) und 4). Bei Beachtung des Gesetzes:

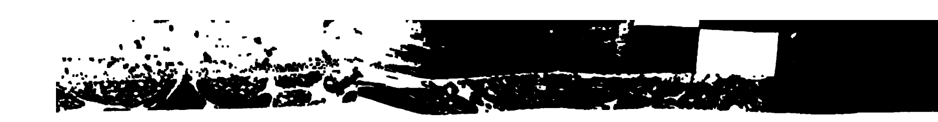
$$D_{0,n-1} D_{1,n} - D_{0,n} D_{1,n-1} = (-1)^n$$

welchem die Zähler und Nenner zweier aufeinander folgenden Näherungswerte jedes Kettenbruches genügen, erhält man nämlich, indem man die mit $D_{0,n-1}$ multiplicirten abzieht,

9) $$D^2_{0,n-1} - A \,.\, D^2_{1,n-1} = (-1)^n$$

d. h. vorausgesetzt, dass n gerade, genügen Zähler und Nenner des $(n-1)$ten Näherungswertes für $\sqrt{A}$ der Pell'schen Gleichung; ein Satz, der bereits von Lagrange ausgesprochen wurde.

Nun ist es aber auch leicht nachzuweisen, dass nicht nur dem aus den Elementen der ersten Periode gebildeten Näherungswerte diese Eigenschaft zukommt, sondern dass dasselbe auch für die allen folgenden ganzen Perioden entsprechenden Näherungswerte gilt. Ich suche zu diesem Zwecke die geschlossene Form dieser Näherungswerte, welche durch den allgemeinen Ausdruck



bei dies[illegible]
für mel[illegible]
züglich[illegible]
zu sol[illegible]

[illegible] D nach den Elementen der letz-
[illegible] $\frac{D_{0,\dots-1}}{D_{1,\dots-1}}$ an die Stelle von [illegible]
vor[illegible]
zei[illegible] [illegible]seits

$$\frac{D_{0,n-1}}{D_{1,n-1}},$$

$$[illegible]$$

[illegible] einander gleich zu setzen sind; durch Vergleichung [illegible] Zähler und Nenner erhält man:

$$[illegible]$$

[illegible] mit Benutzung von 3) und 4)

10)a $$[illegible]$$

11)a $$[illegible]$$

Zunächst folgt nun aus 11)a

$$[illegible]$$

folglich

$$[illegible]$$

und durch Einsetzung dieser beiden Werte in 10)a:

$$[illegible] \; 2D_{0,n-1}D_{1,\dots} - (-1)^{r} D_{1,\dots}$$

und genau auf dieselbe Weise entwickelt man:

$$[illegible] \; 2D_{0,n-1}D_{0,\dots-1} - (-1)^{n} D_{1,\dots}$$

[illegible] und $D_{1,n-1}$ dieselbe Recursionsformel. Setzt man allgemein

$$D_{0,n-1} = x \quad \text{und}$$
$$D_{1,n-1} = y,$$

so erhält man zur Bestimmung von x und y eine und dieselbe quadratische Gleichung

$$x^2 = 2D_{0,n-1} . x - (-1)^n.$$

Man findet die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\xi_1 = D_{0,n-1} + \sqrt{D^2_{0,n-1} - (-1)^n} = D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A}$$

$$\xi_2 = D_{0,n-1} - \sqrt{D^2_{0,n-1} - (-1)^n} = D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A}$$

und zwar die letzte Form wegen der 9).

Als vollständige Lösungen erhält man also

$$D_{0,rn-1} = c_1\xi_1^r + c_2\xi_2^r \quad \text{und}$$
$$D_{1,rn-1} = \gamma_1\xi_1^r + \gamma_2\xi_2^r$$

wobei die Constanten c_1, c_2, γ_1 und γ_2 mit Rücksicht auf die Anfangswerte von $D_{0,rn-1}$ und $D_{1,rn-1}$ für $r = 0$ und $= 1$, welche man resp. als 1, $D_{0,n-1}$ und 0, $D_{1,n-1}$ zu setzen hat, mit folgenden Werten erscheinen:

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{D_{1,n-1}}{2\sqrt{D^2_{0,n-1} - (-1)^n}} = \frac{1}{2\sqrt{A}}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhält man folglich:

$$14) \quad D_{0,rn-1} = \tfrac{1}{2}[(D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r + (D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r]$$

$$15) \quad D_{1,rn-1} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot [(D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r - (D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r]$$

und indem man die mit $\sqrt{A}$ multiplicirte 15) zu 14) addirt und davon subtrahirt:

$$16) \quad D_{0,rn-1} + D_{1,rn-1}\sqrt{A} = (D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$$

$$17) \quad D_{0,rn-1} - D_{1,rn-1}\sqrt{A} = (D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$$

und endlich durch Multiplication der 16) und 17)

$$18) \quad D^2_{0,rn-1} - A . D^2_{1,rn-1} = (D^2_{0,n-1} - AD^2_{1,n-1})^r = (-1)^{rn}$$

Ist also n gerade, dann genügen sämmtliche den einzelnen Perioden entsprechenden Näherungswerte für $\sqrt{A}$ der Pell'schen Gleichung; ist aber n ungerade, dann genügen nur die einer geraden Anzahl von Perioden entsprechenden Näherungswerte, die übrigen der Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

und durch die 16) ist der Zusammenhang zwischen allen übrigen Lösungen mit der ersten $x_0 = D_{0,n-1}$, $y_0 = D_{1,n-1}$ festgestellt, indem man nur dem r alle Werte von 1 bis ∞ beizulegen hat.

$$\frac{D_{0,\nu n-1}}{D_{1,\nu n-1}}$$

gleich sind zu bestimmen.

Wenn man wieder in $\frac{D_{0,n}}{D_{1,n}}$ die D nach den Elementen der letzten Reihe entwickelt und dann $a_n + \frac{D_{0,(\nu-1)n-1}}{D_{1,(\nu-1)n-1}}$ an die Stelle von a_n treten lässt, erhält man einerseits

$$\frac{D_{0,\nu n-1}}{D_{1,\nu n-1}},$$

andererseits

$$\frac{D_{0,n}D_{1,(\nu-1)n-1}+D_{0,n-1}D_{0,(\nu-1)n-1}}{D_{1,n}D_{1,(\nu-1)n-1}+D_{1,n-1}D_{0,(\nu-1)n-1}},$$

welche Brüche einander gleich zu setzen sind: durch Vergleichung der beiden Zähler und Nenner erhält man:

10) $D_{0,\nu n-1} = D_{0,n}D_{1,(\nu-1)n-1} + D_{0,n-1}D_{0,(\nu-1)n-1}$

11) $D_{1,\nu n-1} = D_{1,n}D_{1,(\nu-1)n-1} + D_{1,n-1}D_{0,(\nu-1)n-1}$

oder mit Benutzung von 3) und 4)

10)a $D_{0,\nu n-1} = A.D_{1,n-1}D_{1,(\nu-1)n-1} + D_{0,n-1}D_{0,(\nu-1)n-1}$

11)a $D_{1,\nu n-1} = D_{0,n-1}D_{1,(\nu-1)n-1} + D_{1,n-1}D_{0,(\nu-1)n-1}$

Zunächst folgt nun aus 11)a

$$D_{0,(\nu-1)n-1} = \frac{D_{1,\nu n-1} - D_{0,n-1}D_{1,(\nu-1)n-1}}{D_{1,n-1}}$$

folglich

$$D_{0,\nu n-1} = \frac{D_{1,(\nu+1)n-1} - D_{0,n-1}D_{1,\nu n-1}}{D_{1,n-1}}$$

und durch Einsetzung dieser beiden Werte in 10)a:

12) $D_{1,(\nu+1)n-1} = 2D_{0,n-1}D_{1,\nu n-1} - (-1)^n D_{1,(\nu-1)n-1}$;

und genau auf dieselbe Weise entwickelt man:

13) $D_{0,(\nu+1)n-1} = 2D_{0,n-1}D_{0,\nu n-1} - (-1)^n D_{0,(\nu-1)n-1}$

d. h. für $D_{0,\nu n-1}$ und $D_{1,\nu n-1}$ dieselbe Recursionsformel. Setzt man dann allgemein

$$D_{0,\nu n-1} = x^\nu \quad \text{und}$$
$$D_{1,\nu n-1} = y^\nu,$$

so erhält man zur Bestimmung von x und y eine und dieselbe quadratische Gleichung

$$x^2 = 2D_{0,n-1} \,.\, x - (-1)^n.$$

Man findet die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\xi_1 = D_{0,n-1} + \sqrt{D^2_{0,n-1} - (-1)^n} = D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A}$$

$$\xi_2 = D_{0,n-1} - \sqrt{D^2_{0,n-1} - (-1)^n} = D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A}$$

und zwar die letzte Form wegen der 9).

Als vollständige Lösungen erhält man also

$$D_{0,rn-1} = c_1\xi_1^r + c_2\xi_2^r \quad \text{und}$$
$$D_{1,rn-1} = \gamma_1\xi_1^r + \gamma_2\xi_2^r$$

wobei die Constanten c_1, c_2, γ_1 und γ_2 mit Rücksicht auf die Anfangswerte von $D_{0,rn-1}$ und $D_{1,rn-1}$ für $r = 0$ und $= 1$, welche man resp. als 1, $D_{0,n-1}$ und 0, $D_{1,n-1}$ zu setzen hat, mit folgenden Werten erscheinen:

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{D_{1,n-1}}{2\sqrt{D^2_{0,n-1} - (-1)^n}} = \frac{1}{2\sqrt{A}}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhält man folglich:

14) $D_{0,rn-1} = \tfrac{1}{2}[(D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r + (D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r]$

15) $D_{1,rn-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{A}} \cdot [(D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r - (D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r]$

und indem man die mit $\sqrt{A}$ multiplicirte 15) zu 14) addirt und davon subtrahirt:

16) $D_{0,rn-1} + D_{1,rn-1}\sqrt{A} = (D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$

17) $D_{0,rn-1} - D_{1,rn-1}\sqrt{A} = (D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$

und endlich durch Multiplication der 16) und 17)

18) $D^2_{0,rn-1} - A \,.\, D^2_{1,rn-1} = (D^2_{0,n-1} - AD^2_{1,n-1})^r = (-1)^{rn}$

Ist also n gerade, dann genügen sämmtliche den einzelnen Perioden entsprechenden Näherungswerte für $\sqrt{A}$ der Pell'schen Gleichung; ist aber n ungerade, dann genügen nur die einer geraden Anzahl von Perioden entsprechenden Näherungswerte, die übrigen der Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

und durch die 16) ist der Zusammenhang zwischen allen übrigen Lösungen mit der ersten $x_0 = D_{0,n-1}$, $y_0 = D_{1,n-1}$ festgestellt, indem man nur dem r alle Werte von 1 bis ∞ beizulegen hat.

Es ist nun interessant, auch den Zusammenhang zwischen irgend einem innerhalb der ersten Periode gebildeten und dem um ein Vielfaches von n davon entfernten Näherungswert aufzusuchen, d. h. die Beziehungen zwischen $\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}$ und $\frac{D_{0,rn+s}}{D_{1,rn+s}}$ festzustellen, wo s irgend eine der Zahlen 1 bis $n-1$ sein kann. Setzt man wieder

$$\frac{D_{0,n}}{D_{1,n}} = \frac{z_n D_{0,n-1} + D_{0,n-2}}{z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2}}$$

und hierin $z_n + \frac{D_{0,(r-1)n+s}}{D_{1,(r-1)n+s}}$ an die Stelle von z_n, dann erhält man:

$$19)\qquad \frac{D_{0,rn+s}}{D_{1,rn+s}} = \frac{D_{0,n} D_{1,(r-1)n+s} + D_{0,n-1} D_{0,(r-1)n+s}}{D_{1,n} D_{1,(r-1)n+s} + D_{1,n-1} D_{0,(r-1)n+s}}$$

und durch Gleichsetzung von Zähler und Nenner dieser Brüche nach einfacher Reduction die Recursionsformeln:

$$20)\qquad D_{0,(r+1)n+s} = 2D_{0,n-1} D_{0,rn+s} - (-1)^n D_{0,(r-1)n+s}$$

$$21)\qquad D_{1,(r+1)n+s} = 2D_{0,n-1} D_{1,rn+s} - (-1)^n D_{1,(r-1)n+s}$$

d. h. genau dieselben Formeln wie die 12) und 13).

Die Behandlung dieser Formeln geschieht deshalb auf dieselbe Weise wie diejenige der 12) und 13); ich beschränke mich darauf, hier nur das Resultat mitzuteilen. Mit Rücksicht darauf, dass

$$D_{1,n+s} = D_{0,n} D_{1,s} + D_{0,n-1} D_{0,s} \quad \text{und}$$
$$D_{1,n+s} = D_{1,n} D_{1,s} + D_{1,n-1} D_{0,s}$$

ist, findet man:

$$22)\qquad D_{0,rn+s} = \tfrac{1}{2}[(D_{0,s} + D_{1,s} . \sqrt{A})(D_{0,n-1} + D_{1,n-1})^r$$
$$+ (D_{0,s} - D_{1,s}\sqrt{A})(D_{9,n-1} - D_{1,n-1})\sqrt{A})^r]$$

$$23)\qquad D_{1,rn+s} = \frac{1}{2\sqrt{A}}[(D_{0,s} + D_{1,s}\sqrt{A})(D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$$
$$- (D_{0,s} - D_{1,s}\sqrt{A})(D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r].$$

Und hieraus folgt wieder, wenn man die mit $\sqrt{A}$ multiplicirte 23) zu der 22) addirt und davon abzieht:

$$24)\qquad D_{0,rn+s} + D_{1,rn+s}\sqrt{A} = (D_{0,s} + D_{1,s}\sqrt{A})(D_{0,n-1} + D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$$

$$25)\qquad D_{0,rn+s} - D_{1,rn+s}\sqrt{A} = (D_{0,s} - D_{1,s}\sqrt{A})(D_{0,n-1} - D_{1,n-1}\sqrt{A})^r$$

und endlich noch durch Multiplication der 24) und 25)

$$26)\qquad D^2_{0,rn+s} - A . D^2_{1,rn+s} = (-1)^{rn}(D^2_{0,s} - AD^2_{1,s}).$$

Die 24) lässt sich mit Benutzung der 16) auch noch in folgender Form schreiben:

24)a $$D_{0,rn+s} + D_{1,rn+s}\sqrt{A} = (D_{0,s} + D_{1,s}\sqrt{A})(D_{0,rn-1} + D_{1,rn-1}\sqrt{A})$$

wodurch der Zusammenhang zwischen irgend einem Näherungswert und dem zunächst vorausgehenden einer vollen Periode entsprechenden festgestellt ist.

Es erübrigt nun nur noch, den in der 26) vorkommenden Wert von $D^2_{0,s} - AD^2_{1,s}$ anzugeben (cf. Stern, Theorie der Kettenbrüche, § 116.).

Die meist gebräuchliche Methode, $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, ist folgende: Ist z_0 die grösste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl, dann setzt man:

$$\sqrt{A} = z_0 + \frac{\sqrt{A} - z_0}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A} - z_0} = \frac{\sqrt{A} + z_0}{A - z_0^2} = \frac{\sqrt{A} + z_0}{d_1} = z_1 + \frac{\sqrt{A} - e_1}{d_1}$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{A} - e_1} = \frac{d_1(\sqrt{A} + e_1)}{A - e_1^2} = \frac{\sqrt{A} + e_1}{d_2} = z_2 + \frac{\sqrt{A} - e_2}{d_2}$$

und in dieser Weise weiter; allgemein:

$$\frac{\sqrt{A} + e_s}{d_{s+1}} = z_{s+1} + \frac{\sqrt{A} - e_{s+1}}{d_{s+1}}$$

wobei z_{s+1} die grösste in dem Bruche links enthaltene ganze Zahl ist. Dabei bilden nicht blos die z eine symmetrisch periodische Reihe, wie aus der 8) ersichtlich, sondern auch die e und die d, und zwar ist

$$d_n = d_0 = 1.$$

Setzt man nun wieder in

$$\frac{D_{0,s+1}}{D_{1,s+1}} = \frac{z_{s+1}D_{0,s} + D_{0,s-1}}{z_{s+1}D_{1,s} + D_{1,s-1}}$$

$z_{s+1} + \dfrac{\sqrt{A} - e_{s+1}}{d_{s+1}}$ an die Stelle von z_s, dann erhält man links $\sqrt{A}$; also:

27) $$\sqrt{A} = \frac{d_{s+1}D_{0,s+1} + (\sqrt{A} - e_{s+1})D_{0,s}}{d_{s+1}D_{1,s+1} + (\sqrt{A} - e_{s+1})D_{1,s}}$$

und, indem man den Nenner wegbringt und die rationalen und irrationalen Teile einander gleichsetzt:

28) $$D_{0,s} = d_{s+1} D_{1,s+1} - e_{s+1} D_{1,s}$$

29) $$A . D_{1,s} = d_{s+1} D_{0,s+1} - e_{s+1} D_{0,s}$$

und hieraus, indem man die mit $D_{1,s}$ multiplicirte 29) von der mit $D_{0,s}$ multiplicirten 28) abzieht,

30) $$D^2_{0,s} - A . D^2_{1,s} = (-1)^{s+1} d_{s+1}.$$

Aus diesem Satze folgt dann für

$$s = n - 1$$

der specielle Fall der 9), ebenso der 18).

II.

Die Verwandlung der Irrationalen $n$ten Grades in einen Kettenbruch.

Von

K. E. Hoffmann.

Die zur Verwandlung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch gewöhnlich angewendete Methode besteht bekanntlich wesentlich darin, dass man einen Bruch von der Form $\frac{d_s}{\sqrt{A}-e_s}$ auf rationalen Nenner bringt; dies geschieht durch gleichzeitige Multiplication des Zählers und Nenners mit $(\sqrt{A}+e_s)$, wodurch man auf einen Bruch von der Form $\frac{\sqrt{A}+e_s}{d_{s+1}}$ geführt wird; ist nun z_{s+1} die grösste in diesem Bruche enthaltene ganze Zahl, so setzt man

$$\frac{\sqrt{A}+e_s}{d_{s+1}} = z_{s+1} + \frac{\sqrt{A}-e_{s+1}}{d_{s+1}}$$

worauf derselbe Gang sich wiederholt.

Diese Methode lässt sich nun in einfacher Weise verallgemeinern zur Kettenbruckentwickelung für die Irrationale $n$ten Grades.

Ist nämlich z_0 die grösste in $\sqrt[n]{A}$ enthaltene ganze Zahl, so setzt man

$$1) \qquad \sqrt[n]{A} = z_0 + \frac{\sqrt[n]{A}-z_0}{1}$$

ferner:

$$2)\qquad \frac{1}{\sqrt[n]{A}-z_0}=\frac{\sqrt[n]{A^{n-1}}+z_0\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+z_0^{n-2}\sqrt[n]{A}+z_0^{n-1}}{A-z_0^n}$$

$$=z_1+\frac{\sqrt[n]{A^{n-1}}+z_0\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+z_0^{n-2}\sqrt[n]{A}-e_1'}{d_1}$$

wobei z_1 die grösste in dem Bruche $\frac{1}{\sqrt[n]{A}-z_0}$ enthaltene ganze Zahl ist. Nun handelt es sich weiter darum, den Bruch

$$\frac{d_1}{\sqrt[n]{A^{n-1}}+z_0\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+z^{n-2}\sqrt[n]{A}-e_1'}$$

auf rationalen Nenner zu bringen; um aber den Gang der Rechnung gleich allgemein durchzuführen, nehme ich an, man sei auf einen Bruch von der Form:

$$3)\qquad \frac{d_s}{\alpha_s\sqrt[n]{A^{n-1}}+\beta_s\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+\omega_s\sqrt[n]{A}-e'_s}$$

gelangt, wobei ich ausdrücklich voraussetze, dass dieser Bruch bereits auf seine einfachste Form reducirt sei; um nun diesen Bruch auf rationalen Nenner zu bringen, multiplicire man Zähler und Nenner desselben mit:

$$4)\qquad \alpha_{s+1}\sqrt[n]{A^{n-1}}+\beta_{s+1}\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+\omega_{s+1}\sqrt[n]{A}+e_{s+1}$$

und setze dann sämmtliche Coefficienten der irrationalen Bestandteile des Nenners $=0$; dadurch gelangt man auf einen Bruch von der Form

$$5)\qquad \frac{d_s(\alpha_{s+1}\sqrt[n]{A^{n-1}}+\beta_{s+1}\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+\omega_{s+1}\sqrt[n]{A}+e_{s+1})}{d'_{s+1}}$$

wobei sich beweisen lässt, dass d'_{s+1} durch d_s teilbar ist; indem man hierauf die grösste in dem Bruche 5) enthaltene ganze Zahl z_{s+1} auszieht, gelangt man zur Fortsetzung des Verfahrens wieder auf einen Bruch von der Form der 3).

Durch Multiplication des Nenners der 3) mit dem Ausdrucke 4) gelangt man nun, indem man die Coefficienten der irrationalen Bestandteile $=0$ setzt, zu $(n-1)$ Bedingungsgleichungen, durch deren Auflösung man Verhältnisszahlen für die n Grössen: α_{s+1}, β_{s+1}, $\ldots$ ω_{s+1}, e_{s+1} erhält. Diese Gleichungen lauten:

6)
$$-e'_s\alpha_{s+1}+\omega_s\beta_{s+1}+\psi_s\gamma_{s+1}+\ldots+\beta_s\omega_{s+1}+\alpha_s e_{s+1}=0$$
$$A\alpha_s\alpha_{s+1}-e'_s\beta_{s+1}+\omega_s\gamma_{s+1}+\ldots+\gamma_s\omega_{s+1}+\beta_s e_{s+1}=0$$
$$A\beta_s\alpha_{s+1}+A\alpha_s\beta_{s+1}-e'_s\gamma_{s+1}+\ldots+\delta_s\omega_{s+1}+\gamma_s e_{s+1}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\psi_s\alpha_{s+1}+\ldots\ldots+A\alpha_s\psi_{s+1}-e'_s\omega_{s+1}+\omega_s e_{s+1}=0$$

Zur Bestimmung von d'_{s+1} erhält man die Gleichung:

7)
$$d'_{s+1}=A\omega_s\alpha_{s+1}+A\psi_s\beta_{s+1}+\ldots+A\alpha_s\omega_{s+1}-e'_s e_{s+1}$$

Um nun aus dem System der Gleichungen 6) die Verhältnisszahlen für $\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}, \ldots \omega_{s+1}, e_{s+1}$ zu gewinnen, hat man nur aus dem System von $(n-1)n$ Elementen:

8)
$$\begin{matrix} -e'_s, & \omega_s, & \psi_s, \ldots & \gamma_s, & \beta_s, & \alpha_s \\ A\alpha_s, & -e'_s, & \omega_s, \ldots & \delta_s, & \gamma_s, & \beta_s \\ A\beta_s, & A\alpha_s, & -e'_s, \ldots & & \delta_s, & \gamma_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A\psi_s, & \ldots & \ldots & A\alpha_s, & -e'_s, & \omega_s \end{matrix}$$

der Reihe nach die 1te, 2te, 3te etc. Colonne herauszuheben, die übrigen Elemente zu einer Determinante zusammenzufassen und diese Determinanten mit abwechselnden Zeichen zu nehmen.

Ehe ich aber zur näheren Betrachtung dieser Determinanten schreite, will ich durch eine andere Betrachtung Werte für die in denselben vorkommenden Grössen $\alpha_s, \beta_s, \ldots \omega_s, e'_s$ zu erhalten suchen; dadurch werden einerseits diese Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ allgemein bestimmt, andererseits bieten eben diese Werte ein bequemes Mittel zur Berechnung jener Determinanten.

Bezeichnet man mit Hilfe der Kettenbruchdeterminante den aus den Quotienten $z_0, z_1, \ldots z_s$ gebildeten Näherungswert für $\sqrt[n]{A}$ mit $\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}$ und setzt man in

$$\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}=\frac{z_s D_{0,s-1}+D_{0,s-2}}{z_s D_{1,s-1}+D_{1,s-2}}$$

$$z_s+\frac{\alpha_s\sqrt[n]{A^{n-1}}+\beta_s\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+\omega_s\sqrt[n]{A}-e'_s}{d_s}$$ an die Stelle von z_s,

so erhält man links $\sqrt[n]{A}$; schafft man gleichzeitig rechts den Divisor d_s weg und zieht man wieder $z_s D_{0,s-1}+D_{0,s-2}$ in $D_{0,s}$ und $z_s D_{1,s-1}+D_{1,s-2}$ in $D_{1,s}$ zusammen, so erhält man:

$$9)\quad \sqrt[n]{A}=\frac{d_s D_{0,s}+(\alpha_s\sqrt[n]{A^{n-1}}+\beta_s\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+\omega_s\sqrt[n]{A}-e'_s)D_{0,s-1}}{d_s D_{1,s}+(\alpha_s\sqrt[n]{A^{n-1}}+\beta_s\sqrt[n]{A^{n-2}}+\ldots+\omega_s\sqrt[n]{A}-e'_s)D_{1,s-1}}$$

und indem man hier den Nenner beseitigt und die Coefficienten gleich hoher Potenzen der Irrationalen $\sqrt[n]{A}$ rechts und links einander gleichsetzt:

$$10)\quad \begin{aligned} A\alpha_s D_{1,s-1} &= d_s D_{0,s}-e'_s D_{0,s-1}\\ \omega_s D_{0,s-1} &= d_s D_{1,s}-e'_s D_{1,s-1}\\ \psi_s D_{0,s-1} &= \omega_s D_{1,s-1}\\ &\cdots\cdots\\ \beta_s D_{0,s-1} &= \gamma_s D_{1,s-1}\\ \alpha_s D_{0,s-1} &= \beta_s D_{1,s-1} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun zunächst die $(n-2)$ letzten dieser Gleichungen, so findet man durch successive Multiplication derselben:

$$11)\quad \alpha_s:\beta_s:\gamma_s\ldots:\omega_s = D_{1,s-1}{}^{n-2}:(D_{1,s-1}{}^{n-3}D_{0,s-1}):(D_{1,s-1}{}^{n-4}D^2{}_{0,s-1})\ldots:D_{0,s-1}{}^{n-2};$$

ferner, indem man die mit $D_{1,s-1}$ multiplicirte 1te der Gleichungen 10) von der mit $D_{0,s-1}$ multiplicirten 2ten derselben subtrahirt:

$$12)\quad \omega_s D^2{}_{0,s-1}-A\alpha_s D^2{}_{1,s-1}=(-1)^s d_s$$

und wenn man die mit $D_{1,s}$ multiplicirte 1te jener Gleichungen von der mit $D_{0,s}$ multiplicirten 2ten abzieht:

$$13)\quad \omega_s D_{0,s-1}D_{0,s}-A\alpha_s D_{1,s-1}D_{1,s}=(-1)^s e'_s$$

Nun können die Grössen α_s, β_s, ... ω_s sich nur durch einen und denselben Factor f von den in der 11) gegebenen Werten unterscheiden; man erkennt aber aus der 12) und 13), dass dieser Factor sowohl in d_s als auch in e'_s enthalten sein müsste; der Bruch in 3) müsste also durch f zu reduciren sein, was aber gegen die hierüber gemachte Voraussetzung geht. Man hat also $f=1$ zu setzen d. h. die Grössen α_s ... ω_s sind den in der 11) gegebenen Werten direct gleich; setzt man dann für ω_s und α_s ihre Werte in 12) und 13) ein, so erhält man die wichtigen Formeln:

$$12a)\quad D_{0,s-1}{}^n-AD_{1,s-1}{}^n=(-1)^s d_s$$

$$13a)\quad D_{0,s-1}{}^{n-1}D_{0,s}-AD_{1,s-1}{}^{n-1}D_{1,s}=(-1)^s e'_s$$

Setzt man ferner in der 13a)

$$D_{0,s}=z_s D_{0,s-1}+D_{0,s-2}\quad\text{und}\quad D_{1,s}=z_s D_{1,s-1}+D_{1,s-2}$$

so erhält man mit Rücksicht auf 12a)

$$(-1)^s d_s z_s + D_{0,s-1}{}^{n-1} D_{0,s-2} - A D_{1,s-1}{}^{n-1} D_{1,s-2} = (-1)^s e'$$

Andererseits ist gemäss der Ableitung von e'_s aus e_s

$$e_s = d_s z_s - e'_s$$

folglich auch:

$$14) \qquad D_{0,s-1}{}^{n-1} D_{0,s-2} - A D_{1,s-1}{}^{n-1} D_{1,s-2} = (-1)^{s-1} e_s$$

Nachdem nun diese einfachen Werte für $\alpha_s, \ldots \omega_s, e_s, d_s$ gewonnen sind, folgt analog:

$$15) \quad \alpha_{s+1} = D_{1,s}{}^{n-2}; \quad \beta_{s+1} = D_{1,s}{}^{n-3} D_{0,s}; \ \ldots \ \omega_{s+1} = D_{0,s}{}^{n-2}$$
$$(-1)^s e_{s+1} = D_{0,s}{}^{n-1} D_{0,s-1} - A D_{1,s}{}^{n-1} D_{1,s-1}$$
$$(-1)^{s+1} d_{s+1} = D_{0,s}{}^n - A D_{1,s}{}^n$$

Nun will ich untersuchen, inwiefern sich die früher aus dem System 8) abgeleiteten Determinanten von den Werten der 15) unterscheiden.

Die Untersuchung der Determinanten für $\alpha_{s+1}, \ldots \omega_{s+1}$ lässt sich auf einmal abmachen, wenn man allgemein den Wert der $k$ten dieser Grössen ($\varkappa_{s+1}$) berechnet. Setzt man die betreffende Determinante $= K$, so wird dieselbe gefunden, wenn man im System 8) die $k$te Colonne heraushebt, aus den übrigen Elementen eine Determinante bildet und dieser das Zeichen $(-1)^{k-1}$ vorsetzt. In dieser Determinante sind dann die $(k-1)$ ersten Elemente der Diagonalreihe $= -e'_s$, die übrigen $= \omega_s$; die unter den $-e'_s$ stehenden Elemente sind sämmtlich $= A\alpha_s$ und die unter den ω_s stehenden $= -e'_s$. Setzt man nun der K das Product $\alpha_s . \beta_s \ldots \omega_s$ vor, indem man die erste Reihe mit α_s, die zweite mit β_s, ... die letzte mit ω_s dividirt, dann werden wegen der Gleichungen 10) sämmtliche über den $-e'_s$ stehenden Elemente zu Potenzen von $\dfrac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}}$ und sämmtliche unter den $-e'_s$ stehenden Elemente zu mit A multiplicirten Potenzen von $\dfrac{D_{1,s-1}}{D_{0,s-1}}$ und zwar stehen in derselben Colonne immer gleich hohe Potenzen dieser Brüche. Wenn man dann die zweite Reihe von der ersten, die dritte von der zweiten u. s. f., die letzte von der vorletzten subtrahirt, so werden zunächst die $(n-k)$ letzten Elemente der $(n-k+1)$ ersten Reihen $= 0$, folglich reducirt sich K auf das Product einer Determinante vom $(k-1)$ten Grade und einer solchen vom $(n-k)$ten Grade. Ferner erkennt man aber auch, dass in der Determinante vom $(k-1)$ten Grade sämmtliche links von der Diagonalreihe stehenden Elemente und in der anderen Determinante vom

$(n-k)$ten Grade sämmtliche rechts von der Diagonalreihe stehenden Elemente $= 0$ werden, dass also beide Determinanten sich auf ihre Anfangsglieder reduciren (wobei das letzte Element der Diagonalreihe von $K = 1$ ist). Man findet folglich:

$$16)\quad K = (-1)^{k-1}\alpha_s\beta_s\ldots\omega_s\left(-\frac{e'_s}{\alpha_s}-\frac{A\alpha_s}{\beta_s}\right)\left(-\frac{e'_s}{\beta_s}-\frac{A\alpha_s}{\gamma_s}\right)\cdots$$
$$\times\left(-\frac{e'_s}{i_s}-\frac{A\alpha_s}{\varkappa_s}\right)\left(\frac{\omega_s}{\varkappa_s}+\frac{e'_s}{\lambda_s}\right)\left(\frac{\omega_s}{\lambda_s}+\frac{e'_s}{\mu_s}\right)\cdots\left(\frac{\omega_s}{\psi_s}+\frac{e'_s}{\omega_s}\right)$$

oder, indem man jeden der $(k-1)$ ersten Factoren mit -1 und der Reihe nach den 1ten mit β_s, den 2ten mit γ_s, ... den letzten mit ω_s multiplicirt:

$$17)\quad K = \alpha_s\left(e'_s\frac{\beta_s}{\alpha_s}+A\alpha_s\right)\left(e'_s\frac{\gamma_s}{\beta_s}+A\alpha_s\right)\cdots\left(e'_s\frac{\varkappa_s}{i_s}+A\alpha\right)$$
$$\times\left(\omega_s\frac{\lambda_s}{\varkappa_s}+e'_s\right)\left(\omega_s\frac{\mu_s}{\lambda_s}+e'_s\right)\cdots\left(\omega_s\frac{\omega_s}{\psi_s}+e'_s\right)$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen 10), dass

$$\frac{\beta_s}{\alpha_s}=\frac{\gamma_s}{\beta_s}=\ldots=\frac{\omega_s}{\psi_s}=\frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}}$$

und da

$$\alpha_s = D_{1,s-1}{}^{n-2}$$

so kann man jeden der $(n-2)$ Factoren von K mit $D_{1,s-1}$ multipliciren; folglich ist:

$$18)\quad K = (e'_s D_{0,s-1} + A\alpha_s D_{1,s-1})^{k-1}.(\omega_s D_{0,s-1} + e'_s D_{1,s-1})^{n-k-1}$$

und endlich, mit Berücksichtigung der beiden ersten der Gleichungen 10)

$$19)\quad K = (d_s D_{0,s})^{k-1}.(d_s D_{1,s})^{n-k-1} = d_s{}^{n-2}.D_{1,s}{}^{n-k-1}D_{0,s}{}^{k-1}$$

d. h. sämmtliche Verhältnisszahlen für die Grössen α_{s+1}, β_{s+1}, ... ω_{s+1} unterscheiden sich von den in der 15) gegebenen Werten durch den Factor $d_s{}^{n-2}$.

Um die Determinante für e_{s+1}, welche mit L bezeichnet werden möge, zu erhalten, hat man im System 8) die letzte Colonne wegzulassen; dann werden sämmtliche Elemente der Diagonalreihe $= -e'_s$; also:

$$20)\quad L = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -e'_s & \omega_s & \psi_s & \ldots & \ldots & \beta_s \\ A\alpha_s & -e'_s & \omega_s & \ldots & \ldots & \gamma_s \\ A\beta_s & A\alpha_s & -e_s & \ldots & \ldots & \delta_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \omega_s \\ A\psi_s & \ldots & \ldots & \ldots & A\alpha_s & -e'_s \end{vmatrix}$$

Wenn man nun der L das Product $\alpha_s \ldots \omega_s$ vorsetzt, indem man die erste Reihe mit α_s, die zweite mit β_s, … die letzte mit ω_s dividirt und hierauf die vorletzte Reihe von der letzten, die drittletzte von der vorletzten u. s. f. die erste von der zweiten subtrahirt, dann werden wie bei der K mehrere Elemente $= 0$, insbesondere sämmtliche rechts von der Diagonalreihe stehenden Elemente mit Ausnahme der in der ersten Horizontalreihe stehenden. Man hat also:

$$21)\quad L = (-1)^{n-1} . \alpha_s \beta_s \ldots \omega_s$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{e'}{\alpha_s} & \frac{\omega_s}{\alpha_s} & \frac{\psi_s}{\alpha_s} & \cdots\cdots & \frac{\beta_s}{\alpha_s} \\ \left(\frac{e'_s}{\alpha_s}+\frac{A\alpha_s}{\beta_s}\right) & -\left(\frac{e'_s}{\beta_s}+\frac{\omega_s}{\alpha_s}\right) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{e'_s}{\beta_s}+\frac{A\alpha_s}{\gamma_s}\right) & -\left(\frac{e'_s}{\gamma_s}+\frac{\omega_s}{\beta_s}\right) & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{e'_s}{\gamma_s}+\frac{A\alpha_s}{\delta_s}\right) & \cdots\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \left(\frac{e'_s}{\psi_s}+\frac{A\alpha_s}{\delta_s}\right) & -\left(\frac{e'_s}{\omega_s}+\frac{\omega_s}{\psi_s}\right) \end{vmatrix}$$

und wenn man wieder die erste Reihe mit α_s, die zweite mit β_s, … die letzte mit ω_s multiplicirt und die Gleichungen 10) beachtet:

$$22)\quad L = (-1)^{n-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} -e'_s & D_{0,s-1}{}^{n-2} & (D_{0,s-1}{}^{n-3} D_{1,s-1}) & \cdots & (D_{0,s-1} D_{1,s-1}{}^{n-3}) \\ d_s \frac{D_{0,s}}{D_{1,s-1}} & -d_s \frac{D_{1,s}}{D_{1,s-1}} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & d_s \frac{D_{0,s}}{D_{1,s-1}} & -d_s \frac{D_{1,s}}{D_{1,s-1}} & 0 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & d_s \frac{D_{0,s}}{D_{1,s-1}} & -d_s \frac{D_{1,s}}{D_{1,s-1}} \end{vmatrix}$$

Aus den letzten $(n-2)$ Reihen kann man nun den Factor $d_s \frac{D_{1,s}}{D_{1,s-1}}$ und aus der ersten den Factor $D_{1,s-1}{}^{n-2}$ ausscheiden und findet dadurch:

$$23)\quad L = (-1)^{n-1} d_s^{n-2} D_{1,s}^{n-2} \times$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{e'_s}{D_{1,s-1}^{n-2}} & \left(\frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}}\right)^{n-2} & \left(\frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}}\right)^{n-3} & \cdots\cdots & \frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}} \\ \frac{D_{0,s}}{D_{1,s}} & -1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \frac{D_{0,s}}{D_{1,s}} & -1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & \frac{D_{0,s}}{D_{1,s}} & -1 \end{vmatrix}$$

Wenn man hier die mit $\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}$ multiplicirte letzte Colonne zur vorletzten addirt und ebenso weiter jede mit $\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}$ multiplicirte Colonne zur vorausgehenden addirt, werden sämmtliche links von der Diagonalreihe stehenden Elemente $= 0$; da ferner alle Elemente der Diagonalreihe vom zweiten an $= -1$ sind, findet man:

$$24)\quad L = (-1)^{n-1+n-2} d_s^{n-2} D_{1,s}^{n-2} \left[-\frac{e'_s}{D_{1,s-1}^{n-2}} + \left(\frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}}\right)^{n-2} \cdot \frac{D_{0,s}}{D_{1,s}} + \left(\frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}}\right)^{n-3} \left(\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}\right)^{2} + \ldots + \frac{D_{0,s-1}}{D_{1,s-1}} \cdot \left(\frac{D_{0,s}}{D_{1,s}}\right)^{n-2} \right]$$

Durch Summation der hier vorkommenden geometrischen Reihe erhält man:

$$25)\quad L = -d_s^{n-2} D_{1,s}^{n-2} \times \left[-\frac{e'_s}{D_{1,s-1}^{n-2}} + \frac{\frac{D_{0,s-1}^{n-2}}{D_{1,s-1}^{n-2}} \cdot \frac{D_{0,s}}{D_{1,s}} \left[\left(\frac{D_{0,s} D_{1,s-1}}{D_{1,s} D_{0,s-1}}\right)^{n-2} - 1 \right]}{\frac{D_{0,s} D_{1,s-1}}{D_{1,s} D_{0,s-1}} - 1} \right]$$

$$= -d_s^{n-2} D_{1,s}^{n-2} \times \left[-\frac{e'_s}{D_{1,s-1}^{n-2}} + \frac{D_{0,s-1} D_{0,s}}{D_{1,s-1}^{n-2} D_{1,s}^{n-2}} \cdot \frac{D_{0,s}^{n-2} D_{1,s-1}^{n-2} - D_{1,s}^{n-2} D_{0,s-1}^{n-2}}{(-1)^{s-1}} \right]$$

$$= (-1)^{s} \frac{d_s^{n-2}}{D_{1,s-1}^{n-2}} \times \left[(-1)^{s} e'_s D_{1,s}^{n-2} + D_{0,s-1} D_{0,s}^{n-1} D_{1,s-1}^{n-2} - D_{0,s-1}^{n-1} D_{0,s} D_{1,s}^{n-2} \right]$$

und hieraus findet man endlich mit Berücksichtigung von 13a)

$$26)\quad L = (-1)^{s} d_s^{n-2} \left[D_{0,s}^{n-1} D_{0,s-1} - A D_{1,s}^{n-1} D_{1,s-1} \right]$$

III.

Sur une propriété caractéristique des hélices.

Par

Paul Appell.

En chaque point M d'une courbe à double courbure, il existe trois droites formant un trièdre trirectangle, à savoir la tangente MT, la normale principale MN et l'axe du plan osculateur MA; dans ce qui suit j'appellerai ce trièdre le trièdre (M). Il est connu que, sur ces trois droites, deux, la normale principale et l'axe du plan osculateur, ne forment jamais une surface devéloppable; et que la tangente forme toujours une. Je me propose dans ce travail de chercher, plus généralement, s'il peut arriver qu' une droite MD passant par le point M de la courbe et liée invariablement au triédre (M) engendre une surface développable.

Je rappelle d'abord quelques formules connues relatives aux courbes gauches. Je suppose la courbe rapportée à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; je désigne par x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe, par ds l'élément de l'arc, par α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus des angles que fait respectivement avec les axes de coordonnées la tangente MT, la normale principale MN, l'axe du plan osculateur MA; je nomme ω la courbure et π la torsion au point M. L'on a alors les formules suivantes de M. Serret

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{ds} = \omega\alpha', \quad \frac{d\beta}{ds} = \omega\beta', \quad \frac{d\gamma}{ds} = \omega\gamma' \\
&\frac{d\alpha''}{ds} = \pi\alpha', \quad \frac{d\beta''}{ds} = \pi\beta', \quad \frac{d\gamma''}{ds} = \pi\gamma' \\
&\frac{d\alpha'}{ds} = -\omega\alpha - \pi\alpha'', \quad \frac{d\beta'}{ds} = -\omega\beta - \pi\beta'', \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -\omega\gamma - \pi\gamma''
\end{aligned}
$$

[illegible]

[illegible]

$$\frac{X-x}{[illegible]} = \frac{Y-y}{[illegible]} = \frac{Z-z}{[illegible]}$$

[illegible]

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} [illegible] \end{vmatrix} = 0$$

[illegible]

$$x_1 = x - [illegible], \quad y_1 = y - [illegible], \quad z_1 = z - [illegible]$$

[illegible]

$$(3)\qquad \rho = -\frac{[illegible]}{[illegible]}$$

[illegible] MD [illegible] M [illegible] MT, MC, ML. [illegible] MD [illegible]

$$\lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha'', \quad \lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta'', \quad \lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma''$$

[illegible]

$$\frac{X-x}{\lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha''} = \frac{Y-y}{\lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta''} = \frac{Z-z}{\lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma''}.$$

[illegible] M [illegible] MD [illegible] (2) [illegible]

$$\begin{vmatrix} dx & \lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha'' & \lambda d\alpha+\mu d\alpha'+\nu d\alpha'' \\ dy & \lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta'' & \lambda d\beta+\mu d\beta'+\nu d\beta'' \\ dz & \lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma'' & \lambda d\gamma+\mu d\gamma'+\nu d\gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, en remplaçant $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$ ... etc. par leurs expressions (1) et en remarquant que $dx = \alpha ds$, $dy = \beta ds$, $dz = \gamma ds$,

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha'' & -\mu\omega\alpha+(\lambda\omega+\nu\kappa)\alpha'-\lambda\kappa\alpha'' \\ \beta & \lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta'' & -\mu\omega\beta+(\lambda\omega+\nu\kappa)\beta'-\mu\kappa\beta'' \\ \gamma & \lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma'' & -\mu\omega\gamma+(\lambda\omega+\nu\kappa)\gamma'-\mu\kappa\gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

Ce dernier déterminant peut être considéré comme le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \\ -\mu\mu & \lambda\omega+\nu\pi & -\mu\pi \end{vmatrix}$$

dont le premier est égal à ± 1 puisque le trièdre (M) est trirectangle. L'équation (4) se réduit donc à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \\ -\mu\omega & \lambda\omega+\nu\pi & -\mu\pi \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$(5) \qquad (\mu^2+\nu^2)\pi+\lambda\nu\omega = 0$$

Telle est la condition pour que la droite MD considérée engendre une surface développable.

Si la courbe gauche est quelconque, le rapport $\frac{\omega}{\pi}$ des deux courbures varie d'un point à l'autre de la courbe, et par suite la relation (5) ne peut être satisfaite par des valeurs constantes de λ, μ, ν, que si l'on prend

$$\lambda\nu = 0, \quad \mu^2+\nu^2 = 0$$

c'est à dire $\mu = 0$ et $\nu = 0$. Il n'y a donc alors qu' une droite MD formant une surface développable; cette droite n' est autre que la tangente MT ($\mu = 0$, $\nu = 0$).

Supposons maintenant la courbe gauche telle que le rapport $\frac{\omega}{\pi}$ des deux courbures soit égal à une constante k; d'après une théorème de M. Bertrand la courbe est alors une hélice tracée sur un cylindre quelconque. Dans ce cas la relation (5) devient

$$(6) \qquad \mu^2+\nu^2+k\lambda\nu = 0$$

et il existe une infinité de droites MD dont les cosinus λ, μ, ν vérifient cette relation. Ces droites forment par rapport au trièdre (M) un cône du second degré contenant la tangente MT et admettant un système de sections circulaires perpendiculaires à cette tangente. Si l'on prend une génératrice quelconque de ce cône et qu'on la suppose liée invariablement au trièdre (M), cette droite dans le déplacement du trièdre (M) le long de l'hélice engendre une surface développable. Il est facile de voir que l'arête de rebroussement de cette surface développable est aussi une hélice. En effet la droite

MD qui est la tangente à l'arête de rebroussement fait avec l'axe Oz un angle dont le cosinus est $\lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma''$; or, la courbe gauche considérée étant une hélice tracée sur un cylindre, on peut prendre l'axe Oz parallèle aux génératrices de ce cylindre, et alors, d'après des propriétés connues de l'hélice, $\gamma'=0$, $\gamma=\text{const.}$, $\gamma''=\text{const.}$; donc $\lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma''$ est constant, et l'arête de rebroussement est une courbe gauche dont la tangente fait un angle constant avec une direction fixe, c'est à dire une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cette direction. Soit enfin MD (λ, μ, ν) une droite du cône (6) et C le point où cette droite est tangente à la courbe qu' elle enveloppe; si on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point C par rapport aux axes Ox, Oy, Oz on a d'après (3)

$$x_1 = x + (\lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha'')\varrho$$
$$y_1 = y + (\lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta'')\varrho$$
$$z_1 = z + (\lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma'')\varrho$$

où

$$\varrho = \frac{\mu\omega}{(\lambda\omega+\nu\pi)^2+\mu^2(\omega^2+\pi^2)} \tag{7}$$

On tire de cette expression de ϱ les conséquences suivantes. Considérons une position du trièdre (M), et appellons $x'\,y'\,z'$ les coordonnées du point C par rapport aux arêtes de ce trièdre prises pour axes de coordonnées, MT étant l'axe des x', MN de y', MA des z'; on a

$$x'=\lambda\varrho,\quad y'=\mu\varrho,\quad z'=\nu\varrho$$

et par conséquent d'après l'expression (7) les coordonnées $x'\,y'\,z'$ du point C vérifient l'équation

$$(\omega x'+\pi z')^2+(\omega^2+\pi^2)y'^2-\omega y'=0 \tag{8}$$

Cette équation dans laquelle on considère $x'\,y'\,z'$ comme des coordonnées courantes représente un cylindre de révolution dont les génératrices sont parallèles à la direction

$$y'=0,\quad \omega x'+\pi z'=0$$

c'est à dire à la direction des génératrices du cylindre sur lequel est tracée l'hélice considérée. Il est aisé de s'assurer que le cylindre (8) est tangent au cylindre sur lequel est tracée l'hélice le long de la génératrice passant par le point M; on sait en effet que la tangente à l'hélice au point M $(y'=0,\ z'=0)$ est tangente au cylindre (8). En outre le rayon de la section droite de ce cylindre est égal à $\frac{\omega}{2(\omega^2+\pi^2)}$ c'est à dire à la moitié du rayon cercle osculateur au point M à la section droite du cylindre qui contient l'hélice. Le

cylindre (8) ainsi déterminé donne à chaque instant par son intersection avec le cône (6) les points de contact des génératrices de ce cône avec leurs enveloppes respectives.

Après avoir ainsi examiné le cas où la courbe gauche est une hélice quelconque, considérons le cas plus particulier encore où le rapport constant des deux courbures $k = \frac{\omega}{\pi}$ serait infini; π est alors nul et l'hélice se réduit à une courbe plane. Dans ce cas le cône (6) se décompose en deux plans $\lambda\nu = 0$, dont l'un $\lambda = 0$ est le plan normal à la courbe et l'autre $\nu = 0$ le plan même de la courbe. Le cylindre (8) devient

(9) $$\omega(x'^2+y'^2)-y' = 0$$

c'est à dire un cylindre droit dont la base est, dans le plan de la courbe, le cercle décrit sur le rayon de courbure de la courbe au point M comme diamètre. On voit donc que dans une courbe plane les seules droites invariablement liées au trièdre (M) qui engendrent des surfaces développables sont les droites du plan même de la courbe et les droites du plan normal; les points de contact de ces droites avec leurs enveloppes respectives sont à chaque instant situés sur le cylindre (9), ce qui est un théorème connue.

Paris 30 janvier 1879.

IV.

Auflösung der dreigliedrigen algebraischen Gleichung.

Von

Herrn **Julius Farkas**

Professor in Polgárdi (Ungarn).

I.

Behauptungen.

Wenn

$$x^m + ax^n = b \tag{1}$$

wo m und n ganze positive Zahlen bedeuten mögen und $m > n$, so erhält im Falle dass

$$\text{Mod}\left(\frac{b^{\frac{m}{n}-1}}{a^{\frac{m}{n}}}\right) \leqq \frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)^{\frac{m}{n}-1}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}} \tag{2}$$

die unendliche Reihe:

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\left\{1-\frac{1}{n}b^{-1}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}^{m}+\frac{1}{2n}\left(\frac{2m+1}{n}-1\right)_1 b^{-2}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}^{2m}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3n}\left(\frac{3m+1}{n}-1\right)_2 b^{-3}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}^{3m}+\cdots\right\} \tag{3}$$

n Wurzeln, während die übrigen $m-n$ Wurzeln unter derselben Bedingung durch folgende unendliche Reihe ausgedrückt werden:

$$\sqrt[m-n]{-a}\left\{1-\frac{1}{n-m}b\sqrt[n-m]{-a}^{m}+\frac{1}{2(n-m)}\left(\frac{2m-1}{m-n}-1\right)_1 b^2\sqrt[n-m]{-a}^{2m}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3(n-m)}\left(\frac{3m-1}{m-n}-1\right)_2 b^3\sqrt[n-m]{-a}^{3m}+\ldots\right\} \tag{4}$$

in dem Falle hingegen dass

$$\mathrm{Mod}\left(\frac{b^{\frac{m}{n}-1}}{a^{\frac{m}{n}}}\right) \geqq \frac{\left(\frac{m}{n}-1\right)^{\frac{m}{n}-1}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}} \tag{5}$$

hat man für sämmtliche Wurzeln folgende unendliche Reihe:

$$\sqrt[m]{b}\left\{1-\frac{1}{m}a\sqrt[m]{b}^{n-m}+\frac{1}{2m}\left(\frac{2n+1}{m}-1\right)_1 a^2\sqrt[m]{b}^{2(n-m)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3m}\left(\frac{3n+1}{m}-1\right)_2 a^3\sqrt[m]{b}^{3(n-m)}+\ldots\right\} \tag{6}$$

wobei überall unter der Formel: $(\mu)_r$,

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2\ldots\nu}$$

zu verstehen ist, und die Wurzelzeichen sich auf alle möglichen Wurzeln beziehen.

II.

Beweis.

Ist

$$z = p + qz^n, \tag{8}$$

so hat man vermöge des bekannten Satzes von Lagrange:

$$z^r = p^r\{1+r[qp^{n-1}]+\frac{r}{2}(2n+r-1)_1[qp^{n-1}]^2$$
$$+\frac{r}{3}(3n+r-1)_2[qp^{n-1}]^3+\ldots+\frac{r}{k}(kn+r-1)_{k-1}[qp^{n-1}]^k\}+R_k \tag{8}$$

A) Für ein jedes positives n haben wir

$$\mathrm{Lim}[R_k]_{k=\infty} = 0,$$

wenn

$$\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\mathrm{Mod}[qp^{n-1}] \leqq Abs.[1] \tag{9}$$

Um dies zu beweisen, bezeichnen wir das $(l+1)$te Glied der Reihe (8) mit A_l. Demnach haben wir

$$z^r = A_0 + A_1 + A_2 + \dots A_k + R_k. \tag{10}$$

Betrachten wir jetzt vor der Hand u als eine rationelle Grösse und setzen wir

$$u = \frac{\sigma}{\tau},$$

wo σ und τ ganze, endliche, positive Zahlen bedeuten mögen; dann ordnen wir die Reihe (10), wie folgt:

$$(A_0 + A_\tau + A_{2\tau} + \dots) + (A_1 + A_{\tau+1} + A_{2\tau+1} + \dots) + \dots$$
$$\dots + (A_r + A_{\tau+r} + A_{2\tau+r} + \dots) + \dots + (A_{\tau-1} + A_{2\tau-1} + A_{3\tau-1} + \dots + R_k \tag{11}$$

und bestimmen die Bedingung der Convergenz für die Reihe:

$$A_r + A_{\tau+r} + A_{2\tau+r} + \dots + A_{h\tau+r} + A_{(h+1)\tau+r} + \dots \tag{12}$$

Unterscheiden wir nun drei Fälle, nämlich:

$$\frac{\sigma}{\tau} > 1, \quad \frac{\sigma}{\tau} < 1, \quad \frac{\sigma}{\tau} = 1.$$

Ist $\frac{\sigma}{\tau} > 1$, so hat man

$$\frac{A_{(h+1)\tau+r}}{A_{h\tau+r}} = [qp^{u+1}]^\tau \times$$
$$\times \frac{\theta_1(\theta_1+1)\dots(\theta_1+\sigma-1)}{(\theta_2+1)(\theta_2+2)\dots(\theta_2+\sigma-\tau).(\theta_3+1)(\theta_3+2)\dots(\theta_3+\tau)} \tag{13}$$

wo

$$\theta_1 = h\sigma + \frac{v\sigma}{\tau} + r,$$

$$\theta_2 = h(\sigma-\tau) + \frac{v\sigma}{\tau} + r - v,$$

$$\theta_3 = h\tau + v.$$

Folglich ist

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{A_{(h+1)\tau+r}}{A_{h\tau+r}}\right)_{h=\infty} = [qp^{u-1}]^\tau \frac{\sigma^\sigma}{(\sigma-\tau)^{\sigma-\tau}\,\tau^\tau};$$

als Bedingung der Convergenz ist also

$$\frac{\sigma^\sigma}{(\sigma-\tau)^{\sigma-\tau}\,\tau^\tau}\cdot \mathrm{Mod}[qp^{u-1}]^\tau < 1$$

oder

$$\frac{\sigma^{\frac{\sigma}{\tau}}}{(\sigma-\tau)^{\frac{\sigma}{\tau}-1}\,\tau}.\mathrm{Mod}[qp^{u-1}] < 1$$

und, indem wir links Zähler und Nenner mit $\tau^{\frac{\sigma}{\tau}}$ dividiren:

$$\frac{\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^{\frac{\sigma}{\tau}}}{\left(\frac{\sigma}{\tau}-1\right)^{\frac{\sigma}{\tau}-1}} \,.\, \mathrm{Mod}\,[qp^{n-1}] < 1$$

was in Bezug auf das Ungleichheitszeichen mit (9) identisch ist. — Nun schreiben wir in (13)

$$\frac{(\sigma-\tau)^{\sigma-\tau}\,\tau^{\tau}}{\sigma^{\sigma}}$$

an die Stelle von $[qp^{n-1}]^{\tau}$ und $\frac{1}{y}$ an die Stelle von h; hernach suchen wir den Wert des Ausdruckes:

$$\mathrm{Lim}\left\{h\left(1-\frac{A_{(h+1)\tau+v}}{A_{h\tau+v}}\right)\right\}_{y=0} \tag{14}$$

Gesetzt es sei

$$\left(1+y.\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r}{\sigma}\right)\left(1+y.\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r+1}{\sigma}\right)\cdots\left(1+y.\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r+\sigma-1}{\sigma}\right)=f_1(y)$$

$$\left(1+y.\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r-v+1}{\sigma-\tau}\right)\left(1+y.\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r-v+2}{\sigma-\tau}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1+y.\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r-v+\sigma-\tau}{\sigma-\tau}\right)=f_2(y)$$

$$\left(1+y.\frac{v+1}{\tau}\right)\left(1+y.\frac{v+2}{\tau}\right)\cdots\left(1+y.\frac{v+\tau}{\tau}\right)=f_3(y),$$

kann (14) auch so geschrieben werden:

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{f_2(y).f_3(y)-f_1(y)}{y.f_2(y).f_3(y)}\right)_{y=0}=\mathrm{Lim}\left(\frac{\frac{d[f_2(y).f_3(y)-f_1(y)]}{dy}}{\frac{d[y.f_2(y).f_3(y)]}{dy}}\right)_{y=0}$$

Betrachtet man die Werte von $f_2(y)$ und $f_3(y)$, so ersieht man auf der Stelle, dass

$$\left(\frac{d[y.f_2(y).f_3(y)]}{dy}\right)_{y=0}=1.$$

hat man

$$\left(\frac{d[f_2(y).f_3(y)-f_1(y)]}{dy}\right)_{y=0} = f_2'(0)+f_3'(0)-f_1'(0) =$$

$$= \left[\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r-v}{\sigma-\tau}(\sigma-\tau)+\frac{(\sigma-\tau)(\sigma-\tau+1)}{2(\sigma-\tau)}\right]+\left[\frac{v}{\tau}.\tau+\frac{\tau(\tau+1)}{2\tau}\right]$$

$$-\left[\frac{\frac{v\sigma}{\tau}+r}{\sigma}.\sigma+\frac{(\sigma-1)\sigma}{2\sigma}\right] = \tfrac{3}{2} > 1;$$

folglich convergirt (12) auch unter dem Gleichheitszeichen von (9). — Im Falle dass $\frac{\sigma}{\tau} < 1$, erhalten wir

$$\frac{A_{(h+1)\tau+v}}{A_{h\tau+v}} = [qp^{u-1}]^{\tau} \times$$

$$\times \frac{\theta_1(\theta_1+1)\ldots(\theta_1+\sigma-1).\theta_2(\theta_2-1)\ldots(\theta_2-(\tau-\sigma-1))}{(\theta_3+1)(\theta_3+2)\ldots(\theta_3+\tau)}.$$

Gestützt auf diesen Ausdruck, gelangt man, den Weg der Betrachtung des ersten Falles befolgend, zu denselben Endresultaten, wie im ersten Falle. — Eine Untersuchung des Falles $\frac{\sigma}{\tau} = 1$, möge unterbleiben.

Convergirt nun (12) unter der Bedingung (9), so convergirt die Reihe (11) und also auch die Reihe (10) oder (8) unter derselben Bedingung (da τ eine endliche Grösse ist); und convergirt die Reihe (8) bei einem jeden positiven rationellen u, so convergirt sie auch bei einem jeden positiven irrationellen u, wie es leicht einzusehen ist.

B) Setzt man in (7), (8) und (9) einmal

$$z = x^n, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = -\frac{1}{a}, \quad u = \frac{m}{n}, \quad r = \frac{1}{n} \tag{15}$$

ein anderesmal

$$z = x^{n-m}, \quad p = -\frac{1}{a}, \quad q = \frac{b}{a}, \quad u = \frac{m}{m-n}, \quad r = \frac{1}{n-m} \tag{16}$$

und zuletzt

$$z = x^m, \quad p = b, \quad q = -a, \quad u = \frac{n}{m}, \quad r = \frac{1}{m} \tag{17}$$

so gelangt man zu folgenden Resultaten:

1) Aus Gleichung (7) ergibt sich in allen drei Fällen Gleichung (1).

2) Aus Reihe (8) entwickelt sich

im Falle (15), Reihe (3);

im Falle (16), Reihe (4);
im Falle (17), Reihe (6).

3) Aus dem Bedingungs-Ausdrucke (9) entsteht

im Falle (15) und (16) der Bedingungs-Ausdruck (2),
im Falle (17) aber der Bedingungs-Ausdruck (5),

wobei u in allen drei Fällen (15, 16, 17) eine positive Grösse bleibt.

III.

Zusätze.

a) Da Reihe (8) bei einem jeden positiven u convergirt, so bestehen die Reihen (3), (4) und (6) unter den zugehörenden Convergenzbedingungen auch bei irrationellen m und n, wenn beide positiv sind und $m > n$.

b) Schreibt man x^v, $\frac{m}{v}$ und $\frac{n}{v}$ an die Stelle von x, m und n, so erhält man in den Reihen (3), (4) und (6) die $v$te Potenz der Wurzeln.

c) Vermöge der Relation

$$^e\log z = {}^e\log p + \mathrm{Lim}\left(\frac{\left(\frac{z}{p}\right)^r - 1}{r}\right)_{r=0}$$

können aus (3), (4) und (6), nachdem dieselben zu Reihen der $v$ten Potenz der Wurzeln umgestaltet worden sind, sehr leicht auch die Reihen für die Logarithmen der Wurzeln abgeleitet werden.

Raab, Juli 1878.

V.

Discussion eines mehrfachen Integrales.

Von

Herrn Dr. **Victor Sersawy**

in Wien.

I. In dem über das reelle Intervall von $x = a$ bis $x = b$ $(b > a)$ zu erstreckenden Integrale

$$J = \int_0^\infty du \int_a^b f(x) \cos u\varphi(x) \,.\, \varphi'(x)\, dx$$

ist zunächst vorausgesetzt, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ für alle reellen Werte von x zwischen $x = a$ und $x = b$ eindeutig und endlich verlaufen. Während jedoch $\varphi(x)$ in diesem Intervalle durchaus reell und stetig bleiben soll, werden für $f(x)$ auch complexe Werte und Stetigkeitssprünge zugelassen. Die beabsichtigte Discussion bedingt in letzterem Falle, dass die Sprünge von $f(x)$ nicht unendlich grosse seien und dass die Anzahl derselben innerhalb des Integrations-Intervalles eine begrenzte bleibt.

Was die Grenzen a und b selbst betrifft, so nehmen wir an, dass für dieselben $\varphi(x)$ von Null verschieden sei, eine Annahme durch welche, wie sich zeigen wird, die Allgemeinheit der Untersuchung keinen Abbruch erleidet.

Zwischen den Grenzen a und $b > a$ des auf x bezogenen Intervalles schieben wir eine Reihe von Teil-Intervallen ein, welche durch die ihrer Grösse nach geordneten Abscissen:

$$a < \delta_1 < \delta_2 < \dots \delta_\alpha < \dots < \delta_\beta \dots < \delta_n < b$$

bestimmt werden und beachten hierbei folgendes:

1. Wenn $f(x)$ innerhalb des Intervalles von a bis b Stetigkeitssprünge erleidet, so lassen wir in jedem derselben eine der eingeschobenen Abscissen mit der Sprungstelle zusammenfallen. Das ganze Integrations-Intervall zerfällt dadurch in mehrere Teile, innerhalb deren nun $f(x)$ endlich, stetig und eindeutig bleibt. Sind etwa δ_α und $\delta_\beta > \delta_\alpha$ die Grenzen eines solchen Teilintervalles, so treten also in das entsprechende Teilintegrale

$$j = \int_0^\infty du \int_{\delta_\alpha}^{\delta_\beta} f(x) \cos u\,\varphi(x) \,.\, \varphi'(x)\, dx$$

nur jene Werte von $f(x)$ ein, welche einerseits stetig aus $f(\delta_\alpha + 0)$ hergeleitet und andererseits stetig in $f(\delta_\beta - 0)$ übergeleitet werden können, und wenn speciell von den Werten die Rede ist, welche $f(x)$ an den Grenzen des eben betrachteten Teilintervalles annimmt, so werden wir darunter den Wert $f(\delta_\alpha + 0)$ an der unteren Grenze und $f(\delta_\beta - 0)$ an der oberen zu verstehen haben.

2. Wollen wir Sorge tragen, dass in die Reihe der δ auch alle, selbstverständlich innerhalb des Integrations-Intervalles liegenden Werte von x aufgenommen werden, für welche $\varphi(x)$ den Wert Null annimmt.

3. Die zwischen diesen wesentlichen Punkten liegenden Intervalle teilen wir in unendlich viele, also unendlich kleine Intervalle, welche so gewählt sind, dass in keinem derselben der Quotient

$$\frac{f'(x)}{\cos u\,\varphi(x) \,.\, \varphi'(x)}$$

das Zeichen ändert.

In jedem einzelnen Teilintegrale ist es dann gestattet, den Mittelwertsatz von Paul du Bois-Reymond anzuwenden:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \qquad a < \xi < b$$

Es folgt:

$$j = \int_0^\infty du\, f(\delta_\alpha + 0)\int_{\delta_\alpha}^{\xi_\alpha} \cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx + \int_0^\infty du f(\delta_{\alpha+1})\int_{\xi_\alpha}^{\delta_{\alpha+1}} \cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx$$

$$+ \int_0^\infty du f(\delta_{\alpha+1})\int_{\delta_{\alpha+1}}^{\xi_{\alpha+1}} \cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx + \int_0^\infty du f(\delta_{\alpha+2})\int_{\xi_{\alpha+1}}^{\delta_{\alpha+2}} \cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+\int_0^\infty du f(\delta_{\beta-1})\int_{\delta_{\beta-1}}^{\xi_{\beta-1}}\cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx+\int_0^\infty du f(\delta_\beta-0)\int_{\xi_{\beta-1}}^{\delta_\beta}\cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx$$

das heisst:

$$1)\ j=f(\delta_\alpha+0)\int_0^\infty du\int_{\delta_\alpha}^{\xi_\alpha}\cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx+\sum_{\alpha+1}^{\beta-1}\lambda f(\delta_\lambda)\int_0^\infty du\int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda}\cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx$$

$$+f(\delta_\beta-0)\int_0^\infty du\int_{\xi_{\beta-1}}^{\delta_\beta}\cos u\varphi(x).\varphi'(x)dx$$

wobei

$$\delta_\alpha<\xi_\alpha<\delta_{\alpha+1}<\xi_{\alpha+1}\ldots\delta_{\lambda-1}<\xi_{\lambda-1}<\delta_\lambda<\xi_\lambda\ldots<\xi_{\beta-1}<\delta_\beta$$

Das Gesammt-Integrale J ist eine Summe aus einer endlichen Anzahl ähnlich gebildeter Integrale; es genügt also die Discussion an diesem einzelnen durchzuführen.

II. Setzen wir in 1) noch $\varphi(x)=y$, so dass wir erhalten:

$$2)\ \ j=f(\delta_\alpha+0)\int_0^\infty du\int_{\varphi(\delta_\alpha)}^{\varphi(\xi_\alpha)}\cos uy\,dy+\sum_{\alpha+1}^{\beta-1}\lambda f(\delta_\lambda)\int_0^\infty du\int_{\varphi(\xi_{\lambda-1})}^{\varphi(\xi_\lambda)}\cos uy\,dy$$

$$+f(\delta_\beta-0)\int_0^\infty du\int_{\varphi(\xi_{\beta-1})}^{\varphi(\delta_\beta)}\cos uy\,dy$$

so können wir diese Discussion auch sofort in Angriff nehmen. Dieselbe vollzieht sich leicht mit Hülfe der Bemerkung, dass bei reellen p und q das Integrale

$$\int_0^\infty du\int_p^q\cos uy\,dy=\int_0^\infty\frac{du}{u}\sin qu-\int_0^\infty\frac{du}{u}\sin pu$$

den Wert Null besitzt, wenn p und q gleichbezeichnet sind; es ist ferner dasselbe Integrale gleich $\pm\pi$, wenn p und q entgegengesetzte Zeichen besitzen, und hierbei ist das Zeichen bei π das der oberen Grenze q; endlich ist

$$\int_0^\infty du\int_0^{\pm q}\cos uy\,dy=\pm\frac{\pi}{2}$$

und daher

$$\int_0^\infty du \int_{\pm p}^0 \cos uy\, dy = \mp \frac{\pi}{2}$$

Da wir nun vorausgesetzt haben, dass $\varphi(x)$ innerhalb des ganzen Intervalles von a bis b und somit auch innerhalb des Teil-Intervalles von δ_α bis δ_β reelle Werte besitzt, so kann der Wert von j leicht angegeben werden.

Es können in den einzelnen Teilen von j alle speciellen Werte des Integrales 2) zum Vorschein kommen, da die Grenzen dieser Teilintegrale durch je zwei aufeinander folgende Werte der stetig verlaufenden Function $\varphi(x)$ gebildet werden. Indem nun $\varphi(x)$ nur beim Durchgange durch Null sein Zeichen ändern kann, muss die Reihe der Werte $\varphi(x)$ von einem x an, welches um etwas unendlich Kleines grösser ist als irgend eine der reellen Wurzeln von

$$\varphi(x) = 0 \tag{3}$$

bis unendlich nahe vor der nächst grösseren reellen Wurzel derselben Gleichung mit einerlei Zeichen behaftet sein. Alle Teilintegrale von j, deren Grenzen aus einer solchen Reihe genommen sind, fallen aus dem Ausdrucke für j aus, denn sie sind identisch Null und es bleiben in 2) überhaupt nur jene stehen, in deren Grenzen $\varphi(x)$ einen Durchgang durch die Null vollzieht. Liegt also innerhalb des Intervalles von $x = \delta_\alpha$ bis $x = \delta_\beta$ keine reelle Wurzel der Gleichung 3), so ist j selbst gleich Null.

Integrale, deren Grenzen entgegengesetzt bezeichnet sind, können offenbar nur in jenem Teile von j vorkommen, welcher in Gleichung 2) unter ein Summenzeichen zusammengefasst worden ist, und wir erhalten für jede reelle Wurzel w von 3), welche innerhalb des Intervalles δ_α bis δ_β gelegen ist, ein Integrale von der Form:

$$f(w) \int_0^\infty du \int_{\varphi(w-\varepsilon)}^{\varphi(w+\zeta)} \cos uy\, dy$$

worin ε und ζ unendlich kleine und zugleich wesentlich positive Grössen sind. Unter den Prämissen dieser Untersuchung ist nun

$$\varphi(w+\zeta) = \zeta\varphi'(w) + \frac{\zeta^2}{2!}\varphi''(w) + \dots$$

$$\varphi(w-\varepsilon) = -\varepsilon\varphi'(w) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\varphi''(w) - \dots$$

somit ist schliesslich der Wert eines solchen Integrales abhängig von der Anzahl anfänglicher Differentialquotienten von $\varphi(x)$, welche für

$x = w$ gleichzeitig mit $\varphi(w)$ verschwinden. Besitzt der erste Differentialquotient von $\varphi(x)$, welcher für $x = w$ nicht verschwindet, den Index μ, oder mit anderen Worten, ist $x = w$ eine μfache Wurzel der Gleichung 3), so hat das Integrale, welches eben in Untersuchung steht, den Wert

$$f(w)\int\limits_0^\infty du \int\limits_{(-1)^\mu \frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\varphi^{\mu}(w)}^{\frac{\zeta^\mu}{\mu!}\varphi^{(\mu)}(w)} \cos uy\, dy = [f(w) - \cos\mu\pi . f(w)] \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi^{(\mu)}(w) u$$

verschwindet also im Besonderen, wenn die Wurzel w eine doppelte, 4fache, ..., $2m$fache ist.

Aehnlich gestaltet sich das Resultat für jede andere innerhalb der Grenzen δ_α und δ_β gelegene reelle Wurzeln von 3). Ist zufällig δ_α selbst eine solche Wurzel, so tritt zu den bereits vorhandenen Gliedern noch das folgende:

$$f(\delta_\alpha + 0) \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi^{(\mu_\alpha)}(\delta_\alpha) u$$

und eventuell für δ_β:

$$-\cos\mu_\beta\pi . f(\delta_\beta - 0) \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi^{(\mu_\beta)}(\delta_\beta) u$$

hinzu, in welchen Ausdrücken die Indices μ_α und μ_β eine dem früheren μ entsprechende Bedeutung haben.

III. Da eine Wurzel $x = \delta_\alpha$ der Gleichung 3), wenn sie mit einer Sprungstelle von $f(x)$ zusammenfällt, nach dem eben Gefundenen auf beide in der Sprungstelle vorhandenen Aeste von $f(x)$ Einfluss nimmt, so ergiebt sich der Wert von J in folgender Gestalt:

$$J = \Sigma[f(w) - \cos(\mu\pi) . f(w)] \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi^{(\mu)}(w) u$$
$$+ \Sigma[f(\delta_\alpha + 0) - \cos\mu_\alpha\pi . f(\delta_\alpha - 0)] \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \sin {}^{(\mu_\alpha)}\varphi(\delta_\alpha) u$$

in welcher Formel die Bezeichnungen des vorigen Artikels beibehalten sind. Die erste Summe ist über alle reellen Wurzeln der Gleichung 3) zu erstrecken, welche nicht zugleich Sprungstellen von $f(x)$ sind, während die zweite gerade jene Wurzeln umfasst, welche mit solchen Sprungstellen zusammenfallen. Mit Rücksicht darauf, dass, wenn $f(x)$

in der Nähe des Wertes $x = w$ stetig ist, $f(w+0)$ und $f(w-0)$ zusammenfallen, kann man diese Gleichung in die einheitliche:

$$\text{I)}\quad \int_0^\infty du \int_a^b f(x) \cos u\varphi(x) \,.\, \varphi'(x) dx =$$

$$\Sigma [f(w+0) - \cos \mu\pi \,.\, f(w-0)] \int_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi^{(\mu)}(w) u$$

zusammenziehen. In dieser bedeutet w irgend eine reelle Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$, welche innerhalb des Intervalles von a bis b gelegen ist, μ ist der Index des ersten Differentialquotienten von $\varphi(x)$, der für $x = w$ nicht verschwindet; die Summation rechts ist auf alle zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ auszudehnen. Das behandelte Integrale ist also identisch Null, wenn in dem Intervalle von a bis b keine reelle Wurzel dieser Gleichung enthalten ist.

Es fliesst aus diesen Auseinandersetzungen leicht der Wert des Integrales J, wenn a oder b selbst Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ sind, wir werden diese Eventualität daher auch im Folgenden nicht weiter berücksichtigen.

Für $\varphi(x) = x - \alpha$ folgt $\varphi'(x) = 1$, die Gleichung $\varphi(x) = 0$ hat nur die eine Wurzel $x = \alpha$. Ferner ist $\mu = 1$ und wir erhalten:

$$\int_0^\infty du \int_a^b f(x) \cos u(x-\alpha) dx = [f(\alpha+0) + f(\alpha-0)] \int_0^\infty \frac{du}{u} \sin u$$

$$= \frac{f(\alpha+0) + f(\alpha-0)}{2} \,.\, \pi, \text{ wenn } a < \alpha < b$$

was mit der Fourier'schen Formel zusammenfällt.

IV. Setzen wir in Formel I) an Stelle von $f(x)$ die Function

$$f(x) \int_0^\infty \frac{dv}{v} \sin \varphi'(x) v$$

wodurch die Bedingungen für $f(x)$ und $\varphi(x)$ keine Aenderung erleiden, so folgt:

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty \frac{dv}{v} \int_a^b f(x) \cos \varphi(x) u \,.\, \sin \varphi'(x) v \,.\, \varphi'(x) dx =$$

$$\Sigma [f(w+0) - \cos \mu\pi \,.\, f(w-0)] \int_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi^{(\mu)}(w) u \int_0^\infty \frac{dv}{v} \sin \varphi'(w) v$$

Das Integrale $\int\limits_0^\infty \frac{dv}{v} \sin \varphi'(w) v$ verschwindet für alle mehrfachen Wurzeln von $\varphi(x) = 0$. In die rechte Seite gehen nunmehr nur die einfachen reellen Wurzeln dieser Gleichung ein, und da für dieselben $\mu = 1$, so erhalten wir die Formel:

II)

$$\frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty \frac{dv}{v} \int\limits_a^b f(x) \cos \varphi(x) u \,.\, \sin \varphi'(x) v \,.\, \varphi'(x) dx = \Sigma \frac{f(w+0) + f(w-0)}{2}$$

welche für $\varphi(x) = x - \alpha$ ebenfalls in die Fourier'sche Gleichung übergeht.

> In dieser Gleichung II) ist die Summation rechts nur über die einfachen reellen Wurzeln der Gleichung
>
> $$\varphi(x) = 0$$
>
> auszudehnen. Die rechte Seite ist Null, wenn zwischen a und b keine solche Wurzel gelegen ist.

V. Von den vielen Specialisirungen, welche die Formel II) gestattet, sollen nur zwei hervorgehoben werden, welche mit der Theorie der algebraischen Gleichungen zusammenhängen. Für $f(x) = 1$ zunächst liefert jede reelle und einfache Wurzel von $\varphi(x) = 0$, welche zwischen a und b liegt, in die rechte Seite $+1$, das Integrale II) repräsentirt dann die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen und einfachen Wurzeln. Bezeichnen wir diese Zahl mit n, so ist also:

$$\text{III)} \qquad n = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty \frac{dv}{v} \int\limits_a^b \cos \varphi(x) u \,.\, \sin \varphi'(x) v \,.\, \varphi'(x) dx$$

Wenn $\varphi(x)$ eine ganze, rationale Function vorstellt, so lässt sich leicht zeigen, dass die Angabe der Gleichung III) dem Wesen nach mit dem Sturm'schen Lehrsatze identisch ist.

Dies erweist man durch teilweise Integration. Multiplicirt man nämlich die Gleichung III) mit 2 und schreibt das Resultat in folgender Gestalt

$$2n = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{u} \int\limits_0^\infty \frac{dv}{v} \int\limits_a^b \sin \varphi'(x) v \, \frac{d \sin \varphi(x) u}{dx} \, dx$$

so ergiebt sich durch teilweise Integration:

$$2n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(b)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(b)v$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(a)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(a)v$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty dv\int_a^b \sin\varphi(x)u\,.\,\cos v\varphi'(x)\,.\,\varphi''(x)dx$$

oder, da die Bezeichnung der Integrations-Variabeln gleichgültig ist, und wenn man

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(b)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi'(b)u$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(a)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi'(a)u$$

setzt:

$$\alpha)\qquad 2n = A_1 - \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \sin\varphi(x)v\,.\,\cos\varphi'(x)u\,.\,\varphi''(x)dx$$

Wenn nun $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, so ist es immer möglich

$$\varphi(x) = Q_1\varphi'(x) - R_1(x)$$

zu machen; setzen wir diesen Wert in α) ein, so verwandelt sich das dreifache Integrale dieser Formel in

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \sin[Q_1\varphi'(x) - R_1(x)]v\,.\,\cos\varphi'(x)u\,.\,\varphi''(x)dx$$

und dieses ist nach Gleichung I)

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \sin R_1(x)v\,.\,\cos\varphi'(x)u\,.\,\varphi''(x)dx$$

Dadurch ist auch

$$2n = A_1 + \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \sin R_1(x)v\,.\,\cos\varphi'(x)u\,.\,\varphi''(x)dx$$

che Form man einer ganz ähnlichen Reduction unterziehen kann.

Durch teilweise Integration erhält man zunächst wieder einen blos von den Grenzen a und b abhängigen Teil:

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi'(b)u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin R_1(b)u$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi'(a)u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin R_1(a)u$$

und ein dreifaches Integrale:

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \sin\varphi'(x)v \,.\cos R_1(x)u \,.\, R_1'(x)dx$$

welches letztere durch die Beziehung

$$\varphi'(x) = Q_2 R_1(x) - R_2(x)$$

seinerseits wieder in

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty du\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \sin R_2(x)v \,.\cos R_1(x)u \,.\, R_1'(x)dx$$

übergeht. Bei fortgesetzter Anwendung dieses Verfahrens wird, wie bekannt, notwendiger Weise eine der Functionen $R(x)$, welche nichts anderes sind als die Sturm'schen Reste, entweder Null oder eine von x nicht weiter abhängige Grösse. Bei dieser schliesst die Reihe der angedeuteten Reductionen, denn es ist dann $R'(x) \equiv 0$ und der Gesammtwert von $2n$ setzt sich aus den constanten Grössen A_1, A_2, ... zusammen. Bezeichnen wir die Function

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(x)u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi'(x)u$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi'(x)u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin R_1(x)u$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin R_1(x)u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin R_2(x)u + \ldots = \Phi(x)$$

so ist also

$$2n = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Ein Product von der Form

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\lambda(x)u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\mu(x)u$$

hat den Wert $+1$, wenn die Zeichen von $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ eine Zeichenfolge bilden und -1 bei einem Zeichenwechsel und ist Null, wenn $\lambda(x)$ oder $\mu(x)$ den Wert Null besitzt.

Bilden wir also die Reihe

$$\beta)\qquad \varphi(x),\quad \varphi'(x),\quad R_1(x),\quad R_2(x),\ \ldots$$

von der, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, vorausgesetzt werden soll, dass keines ihrer Glieder für einen eben betrachteten Wert von x verschwindet, so ist $\Phi(x)$ gleich der Anzahl der in dieser Reihe enthaltenen Zeichenfolgen, weniger der Anzahl der Zeichenwechsel. Bezeichnen wir also erstere Zahl mit $F(x)$, letztere mit $W(x)$, so ist

$$\Phi(x) = F(x) - W(x)$$

und damit weiter

$$2n = [F(b) - W(b)] - [F(a) - W(a)]$$

Wenn die Reihe β) sowol für $x = a$ als für $x = b$ vollständig ist, so ist notwendig

$$F(b) + W(b) = F(a) + W(a),$$

also endlich

$$n = F(b) - F(a) = W(a) - W(b),$$

in welcher Gleichung der Sturm'sche Satz über das Vorkommen der reellen einfachen Wurzeln einer algebraischen Gleichung ausgesprochen ist.

VI. Da der Sturm'sche Satz ein Mittel darbietet, um die einfachen reellen Wurzeln von

$$\varphi(x) = 0$$

zu separiren, so kann im folgenden angenommen werden, dass zwischen a und b nur mehr eine solche Wurzel $x = w$ sich befinde. Wenn dann der Einfachheit wegen angenommen wird, dass $f(x)$ für diesen Wert von x keine Sprungstelle besitze, so folgt aus Formel II):

$$\text{IV)}\quad f(w) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty du \int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b f(x)\cos\varphi(x)u \,.\, \sin\varphi'(x)v \,.\, \varphi'(x)dx$$

vermittelst welcher Gleichung man $f(w)$, also auch w durch die Grenzen a und b ausdrücken kann. Wenn man zur Auswertung dieses Integrales die particuläre Integration zu Hülfe nimmt, so reicht es, wie sogleich

bemerkt werden mag, nicht hin, dass die Wurzel w in dem Integrations-Intervalle separirt liege, vielmehr muss dieselbe, wie gezeigt werden wird, so eingeengt werden, dass $\varphi'(x)$ in dem ganzen Intervalle von a bis b das Zeichen nicht ändern kann.

Die particuläre Integration selbst nimmt einige bestimmte Integrale zu Hülfe, deren Wert leicht gefunden werden kann.

Das Integrale:

$$S_n = \int_0^\infty \left(\sin\beta x - \beta x + \frac{\beta^3 x^3}{3!} - \ldots + (-1)^n \frac{\beta^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) \frac{dx}{x^{2n+1}}$$

wird durch die bekannte Relation:

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty z^{a-1} . e^{-xz} dz$$

in das Doppel-Integrale

$$S_n = \frac{1}{\Gamma(2n+1)} . \int_0^\infty z^{2n} dz \int_0^\infty \Big[e^{-zx} \sin\beta x - \beta x . e^{-zx} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{\beta^{2n-1} . x^{2n-1} . e^{-zx}}{(2n-1)!} \Big] dx$$

verwandelt und ist daher

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+1)!} . \int_0^\infty z^{2n} dz . \left[\frac{\beta}{z^2+\beta^2} + \Sigma_1^n (-1)^n \left(\frac{\beta}{z}\right)^{2n-1} \right]$$

$$= (-1)^n . \frac{\beta^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+\beta^2} = (-1)^n . \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x} dx.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$C_n = \int_0^\infty \left(\cos\beta x - 1 + \frac{\beta^2 x^2}{2!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\beta^{2n} x^{2n}}{(2n)!}\right) \frac{dx}{x^{2(n+1)}} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x} dx.$$

Insbesondere fliessen hieraus die Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} (\cos\beta x - 1) = -\frac{\beta}{1} \int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4}\left(\cos\beta x - 1 + \frac{\beta^2 x^2}{2!}\right) = \frac{\beta^3}{3!}\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx$$

. . . .

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}\,\sin\beta x - \beta x = -\frac{\beta^2}{2!}\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^5}\left(\sin\beta x - \beta x + \frac{\beta^3 x^3}{3!}\right) = \frac{\beta^4}{4!}\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx$$

. . . .

Durch teilweise Integration folgt nun aus IV)

$$f(w) = \tfrac{1}{2}\left\{f(b)\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(b)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(b)v\right.$$

$$\left. - f(a)\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(a)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(a)v\right\}$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b f'(x)\,.\,\sin\varphi'(x)v\,.\,\sin\varphi(x)u\,.\,dx$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty dv\int_a^b f(x)\cos\varphi'(x)v\,.\,\sin\varphi(x)u\,.\,\varphi''(x)\,dx$$

Von den hier auftretenden Gliedern gestatttet das zweite eine weitere Reduction nur dann, wenn wir es in der Form:

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\sin\varphi'(x)v\,.\,\sin\varphi(x)\,.\,u\,.\,\varphi'(x)\,dx$$

anschreiben, also überhaupt nur dann, wenn $\varphi'(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ das Zeichen nicht ändern kann. Das dritte Glied hat dann der Formel I) zufolge den Wert Null und wir erhalten

$$f(w) = B_1 - \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,.\,\sin\varphi'(x)v\,.\,\sin\varphi(x)u\,.\,\varphi(x)\,dx$$

worin

$$B_1 = \tfrac{1}{2}\Big\{f(b)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(b)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(b)v$$

$$-f(a)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\sin\varphi(a)u\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(a)v\Big\}$$

zu setzen ist.

Um weiter zu reduciren, bemerke man, dass

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\sin\varphi'(x)v\,.\,\sin\varphi(x)\,.\,u\,.\,\varphi'(x)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\sin\varphi'(x)v\,.\,\frac{d[\cos\varphi(x)u-1]}{dx}\,dx$$

es fliesst hieraus dasselbe Integrale

$$=\tfrac{1}{2}\Big\{\frac{2}{\pi}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,.\int_0^\infty \frac{du}{u^2}[\cos\varphi(b)u-1]\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(x)v$$

$$-\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}[\cos\varphi(a)u-1)\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(a)v\Big\}$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'[\cos\varphi(x)u-1]\,.\sin\varphi'(x)v\,dx$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,.\,[\cos\varphi(x)u-1]\cos\varphi'(x)v\,.\,\varphi''(x)\,dx$$

Auch hier ist das letzte Glied in Folge der Gleichung I) identisch Null, indem $\varphi'(x)$ zwischen a und b nicht Null werden kann; es bleibt somit

$$f(x) = B_1+B_2-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b \left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'[\cos\varphi(x)u-1]\sin\varphi'(x)v\,dx$$

worin

$$B_2 = \tfrac{1}{2}\Big\{\frac{f'(b)}{\varphi'(b)}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}[\cos\varphi(b)u-1]\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(x)v$$

$$-\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}[\cos\varphi(a)u-1]\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(a)v\Big\}$$

zu setzen ist.

Um die weitere Reduction übersichtlicher zu machen, bezeichnen wir die in den dreifachen Integralen auftretenden Functionen

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\quad \frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)',\ \dots \quad \text{durch}$$

$$[1,\ x],\qquad\qquad [2,\ x],\ \dots$$

setzen also allgemein:

$$\frac{1}{\varphi'(x)}\,\frac{d[n,\ x]}{dx} = [n+1,\ x].$$

Danach haben wir nun das Integrale

$$-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^2}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b [2,\ x][\cos\varphi(x)u - 1]\sin\varphi'(x)v\,.\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^3}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b [2,\ x]\,.\sin\varphi'(x)v\,.\,\frac{d[\sin\varphi(x)u - \varphi(x)u]}{dx}\,dx$$

zu betrachten. Es ist, wie leicht zu sehen:

$$f(w) = B_1 + B_2 - B_3 - \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{du}{u^3}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_a^b [3,\ x]\,.\sin\varphi'(x)v \times$$

$$\times\ [\sin\varphi(x)u - \varphi(x)u]\varphi'(x)\,dx$$

worin

$$B_3 = \tfrac{1}{2}\Big\{[2,\ b]\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u^3}[\sin\varphi(b)u - \varphi(b)u]\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(b)u$$

$$-[2,\ a]\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u^3}[\sin\varphi(a)u - \varphi(a)u]\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\sin\varphi'(a)u\Big\}$$

zu setzen ist.

Es ist nicht notwendig, die Reduction weiter zu verfolgen. In den Ausdrücken B treten der Reihe nach die früher mit S_n und C_n bezeichneten bestimmten Integrale auf und wenn wir die weiter oben angegebene Tabelle benutzen, finden wir, dass sich $f(w)$ in folgender Form entwickelt:

$$f(w) = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi(b)\, u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v} \sin \varphi'(b) v \,\times \\ \qquad \times \left[f(b) - [1, b]\varphi(b) + [2, b]\right] \frac{\overline{\varphi(b)^2}}{1.2} - \dots \\ - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u} \sin \varphi(a) u \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v} \sin \varphi'(a) v \,\times \\ \qquad \times \left[f(a) - [1, a]\varphi(a) + [2, a]\right] \frac{\overline{\varphi(a)^2}}{1.2} - \dots \end{array} \right.$$

Da zwischen a und b nur eine Wurzel der Gleichung liegen und $\varphi'(x)$ das Zeichen nicht ändern soll, so können an den Grenzen des Intervalles überhaupt nur folgende Zeichen Combinationen stattfinden:

$$\begin{array}{llcll} \varphi(a) -, & \varphi'(a) + & \text{oder} & \varphi(a) +, & \varphi'(a) - \\ \varphi(b) +, & \varphi'(b) + & & \varphi(b) -, & \varphi'(a) - \end{array}$$

es ist also

$$f(w) = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \quad f(b) - [1, b]\varphi(b) + [2, b]\, \frac{\overline{\varphi(b)^2}}{1.2} - \dots \\ + f(a) - [1, a]\varphi(a) + [2, a] \frac{\overline{\varphi(a)^2}}{1.2} - \dots \end{array} \right.$$

also das arithmetische Mittel aus den Werten, welche die Reihe:

$$\psi(x) = f(x) - [1, x]\varphi(x) + [2, x]\, \frac{\overline{\varphi(x)^2}}{1.2} - \dots$$

an den Grenzen des betrachteten Intervalles annimmt. Die hier auftretende Reihe $\psi(x)$ ist ein Special-Fall der Burmann'schen Entwickelung:

$$f(a) = f(x) + A_1 [\varphi(a) - \varphi(x)] + A_2 [\varphi(a) - \varphi(x)]^2 + \dots$$

und unter den hier notwendig gewordenen Bedingungen jederzeit convergent. Ein näherer Nachweis dieser Eigenschaften kann hier übergangen werden.

Auch in dem Falle, in welchem zwischen a und b keine reelle Wurzel von $\varphi(x) = 0$ enthalten ist, ist, wie sich von selbst versteht, die eben durchgeführte Reduction nur dann erlaubt, wenn $\varphi'(x)$ im dem betrachteten Intervalle das Zeichen nicht ändert. Dies vorausgesetzt, folgt dann:

$$0 = \tfrac{1}{2} \{ \psi(b) - \psi(a) \}$$



die Reihe $\psi(x)$ besitzt also für alle x, für welche sie convergirt, einen constanten Wert, und man kann auch setzen:

$$f(w) = \psi(x) \quad \text{(Euler, Inst. calc. diff.)}$$

Man erhält dieselbe Reihe $\psi(x)$, wenn man, im Besitze eines Näherungswertes x für die Wurzel w, den Wert von $f(w)$ mit Hülfe der Newton'schen Näherungsmethode zu berechnen unternimmt.

Da solcher Art unsere Discussion auf bekannte Resultate und Methoden führt, so kann dieselbe auch *a* posteriori als genügend verificirt betrachtet werden.

VI.

Moments d'inertie des Surfaces et Solides de révolution appartenant à la Sphère.

Par

Georges Dostor.

---

1. Les expressions de ces moments d'inertie sont, pour la plupart, assez simples; nous ignorons si elles ont déjà été calculées: nous ne les avons trouvées nulle part. Comme elles peuvent s'obtenir facilement, nous nous empressons d'en donner ici le calcul et la valeur.

Nous nous appuierons, dans notre méthode, sur les moments d'inertie des surfaces et volumes du cône et du tronc de cône. Il ne sera donc pas inutile d'en déterminer préalablement les expressions.

§ I. Moments d'inertie des surfaces de révolution par rapport à l'axe.

2. **Formule.** Si l'équation $y = f(x)$ représente la courbe méridienne, tracée dans le plan des xy et rapportée à l'axe de révolution comme axe des x, le moment d'inertie de la surface engendrée, par rapport à cet axe, sera donné par la formule

$$I = 2\pi\varrho\varepsilon\int y^3 ds,$$

où ε représente l'épaisseur de la surface matérielle supposée infiniment mince et où ϱ est la densité constante de la couche.

3. **Surface latérale du cône.** Soient r le rayon de base et h la hauteur du cône, dont nous supposons le sommet à l'origine; l'équation de la génératrice méridienne sera

$$y = \frac{rx}{h}.$$

Cette équation nous donne

$$dy = \frac{r}{h}dx,$$

et par suite

$$ds = \sqrt{dx^2 + \frac{r^2}{h^2}dx^2} = \frac{cdx}{h},$$

en représentant par c le côté du cône.

Nous avons donc, pour le moment d'inertie I de la surface latérale de notre cône

$$I = 2\pi\varrho\varepsilon \int \frac{r^3x^3}{h^3} \cdot \frac{cdx}{h} = 2\pi\varrho\varepsilon . \frac{cr^3}{h^4} \int x^3 dx.$$

Prenant cette intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, on obtient

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\varrho\varepsilon c r^3 = \tfrac{1}{2}\varrho\varepsilon . \pi r c . r^2$$

ou

$$\text{(I)} \qquad I = \tfrac{1}{2}\varrho\varepsilon S . r^2 = \tfrac{1}{2}Mr^2,$$

en désignant par S l'aire et par M la masse de la surface latérale du cône.

Le moment d'inertie de la surface latérale d'un cône de révolution, par rapport à son axe, est donc égal au produit de sa masse par le demi-carré du rayon de base.

4. **Surface latérale du tronc de cône.** Si r et r' sont les rayons des deux bases du tronc, celui-ci sera la différence de deux cônes ayant r et r' pour rayons de base. Soient m et m' les masses des surfaces latérales de ces deux cônes, i et i' leurs moments d'inertie; M la masse de la surface latérale du tronc de cône et I son moment d'inertie. Nous avons

$$I = i - i' = \tfrac{1}{2}mr^2 - \tfrac{1}{2}m'r'^2;$$

or les masses m et m' des surfaces latérales des deux cônes sont entre elles comme ces surfaces ou comme r^2 et r'^2; par suite on a

$$\frac{m}{r^2} = \frac{m'}{r'^2} = \frac{m - m'}{r^2 - r'^2} = \frac{M}{r^2 - r'^2}$$

d'où on tire

$$m=\frac{Mr^2}{r^2-r'^2},\quad m'=\frac{Mr'^2}{r^2-r'^2}.$$

Il nous vient donc

$$\text{(II)}\qquad I=\tfrac{1}{2}M\frac{r^4-r'^4}{r^2-r'^2}=M\frac{r^2+r'^2}{2}.$$

Ainsi le **moment d'inertie de la surface latérale du** tronc de cône, **par rapport à son axe, est égal au pro**duit de sa masse **par la demi-somme des carrés des ray**ons des deux **bases**

5. **Calotte sphérique. L'arc générateur, rapporté à son centre,** est représenté par l'équation

$$x^2+y^2=R^2,$$

qui donne

$$dy=-\frac{xdx}{y},$$

et par suite

$$ds=\frac{xdx}{y}.$$

Nous trouvons ainsi, pour le moment d'inertie

$$I=2\pi\varrho\varepsilon\int Ry^2dx=2\pi\varrho\varepsilon R\int(R^2dx-x^2dx)$$

ou

$$I=\varrho\varepsilon.2\pi R\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)+C.$$

En appelant a la distance du centre de la sphère au plan de base de la calotte, il faudra prendre cette intégrale depuis $x=R-H$, jusqu'à $x=R$, ou H représente la hauteur de la calotte. Nous voyons ainsi que

$$I=\varrho\varepsilon.2\pi R\left(RH^2-\frac{H^3}{3}\right)=\varrho\varepsilon.2\pi RH\left(R-\frac{H}{3}\right)H$$

ou

$$\text{(III)}\qquad I=MH\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

en désignant par M la masse de la calotte sphérique.

6. **Zone quelconque.** Supposons que la zone soit la différence des deux calottes dont h et h' sont les hauteurs, m et m' les masses; et soient H la hauteur et M la masse de notre zone. Nous avons

$$I=mh\left(R-\frac{h}{3}\right)-m'h'\left(R-\frac{h'}{3}\right).$$

Or les masses m et m' des deux calottes sont entre elles comme leurs surfaces ou comme leurs hauteurs, de sorte que l'on peut écrire

$$\frac{m}{h}=\frac{m'}{h'}=\frac{m-m'}{h-h'}=\frac{M}{H},$$

d'où on tire

$$m=\frac{Mh}{H},\quad m'=\frac{Mh'}{H}.$$

On a ainsi, en observant que $h-h'=H$,

$$I=\frac{M}{H}[R(h^2-h'^2)-\tfrac{1}{3}(h^3-h'^3)]=M[R(h+h')-\tfrac{1}{3}(h^2+hh'+h'^2)].$$

Appelons r et r' les rayons des deux bases de la zone. Les deux égalités

$$r^2=h(2R-h),\quad r'^2=h'(2R-h')$$

nous donnent

$$R(h+h')=\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{h^2+h'^2}{2}$$

et, comme

$$-\tfrac{1}{3}(h^2+hh'+h'^2)=\frac{(h-h')^2}{6}-\frac{h^2+h'^2}{2}=\frac{H^2}{6}-\frac{h^2+h'^2}{2},$$

il vient enfin, pour le moment d'inertie de la zone,

$$\text{(IV)}\qquad I=M\left(\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{H^2}{6}\right).$$

7. On peut donner à cette expression une autre forme. En effet, si V est le volume du segment sphérique, qui est terminé par la zone, on a

$$V=\pi H\left(\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{H^2}{6}\right)$$

de sorte qu'il vient aussi

$$\text{(V)}\qquad I=\frac{MV}{\pi H}.$$

8. **Zone symétrique.** Les deux bases de la zone sont égales et l'on a

$$r^2=r'^2=R^2-\frac{H^2}{4};$$

la formule (IV) devient ainsi

$$\text{(VI)}\qquad I=M\left(R^2-\frac{H^2}{12}\right).$$

9. **Zone dont l'une des bases est un grand cercle de la sphère.** Dans ce cas on a



$$r = R,\quad r'^2 = R^2 - H^2;$$

substituant dans (IV), on obtient

(VII) $$I = M\left(R^2 - \frac{H^2}{3}\right).$$

10. **Demi-surface sphérique.** Posant $H = R$ dans cette expression (VII), on trouve que

(VIII) $$I = \frac{2}{3}MR^2.$$

11. **Surface de la sphère.** En faisant $H = 2R$ dans la formule (VI), on a aussi

(IX) $$I = \frac{2}{3}MR^2,$$

ce qui s'explique facilement.

§ II. Moments d'inertie des solides de révolution par rapport à l'axe.

12. **Formule.** Le moment d'inertie d'un solide de révolution par rapport à l'axe est

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4 dx,$$

où ρ exprime la densité du solide, et où a et b sont les distances à l'origine des plans parallèles extrêmes.

13. **Cylindre circulaire plein.** Soient r le rayon de base et h la hauteur du cylindre; l'équation de la génératrice sera $y = r$, et l'on aura

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\rho\int_0^h r^4 dx,$$

ou

(I) $$I = \tfrac{1}{2}\pi\rho r^4 h = M.\frac{r^2}{2},$$

M désignant la masse du cylindre.

14. **Cylindre creux.** Si r et r' sont les rayons des deux cylindres, dont la différence est égale à notre solide, nous aurons

(II) $$I = \tfrac{1}{2}\pi\rho h(r^4 - r'^4) = \tfrac{1}{2}M(r^2 + r'^2).$$

15. **Cylindre creux infiniment mince.** Si r est le rayon du cylindre intérieur, $r + dr$ sera le rayon du cylindre extérieur, de sorte que l'on a

$$(r+dr)^2 = r^2+2rdr, \quad (r+dr)^4 = r^4+4r^3dr,$$

en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier. On trouve donc que

(III) $$I = 2\pi\varrho hr^3dr = Mr^2,$$

attendu que le volume du cylindre est $2\pi rhdr$.

16. **Cône plein.** Prenons le sommet du cône pour origine; l'équation de la génératrice sera $y = \frac{r}{h}x$, et nous aurons pour le moment d'inertie

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\varrho \int_0^h \frac{r^4}{h^4}x^4dx.$$

ou

(IV) $$I = \tfrac{1}{10}\pi\varrho r^4h = \tfrac{3}{10}Mr^2.$$

17. **Cône creux.** Si r' est le rayon de base du cône extérieur, nous aurons

(V) $$I = \tfrac{1}{10}\pi\varrho(r'^4-r^4) = \tfrac{3}{10}M(r^2+r'^2).$$

18. **Cône creux infiniment mince.** Pour $r' = r+dr$, il nous vient

(VI) $$I = \tfrac{2}{5}\pi\varrho hr^3dr = \tfrac{3}{5}Mr^2.$$

19. **Tronc de cône.** Soient r et r' les rayons des deux bases du tronc et H sa hauteur.

Le tronc est la différence de deux cônes, dont les hauteurs sont $H+z$ et z, r et r' étant les rayons de leurs bases.

Désignons par I', I'' et I les moments d'inertie, par rapport à l'axe, du grand cône, du petit cône et du tronc; et par M', M'' et M les masses respectives de ces solides. Nous avons

$$I' = \tfrac{3}{10}M'r^2, \quad I'' = \tfrac{3}{10}M''r'^2,$$

d'où nous tirons

$$I = I'-I'' = \tfrac{3}{10}(M'r^2-M''r'^2).$$

Or on sait que

$$\frac{M'}{r^3} = \frac{M''}{r'^3} = \frac{M'-M''}{r^3-r'^3} = \frac{M}{r^3-r'^3},$$

et par suite

$$M' = \frac{Mr^3}{r^3-r'^3}, \quad M'' = \frac{Mr'^3}{r^3-r'^3};$$

donc il vient

(VII) $$I = \tfrac{3}{10} M \frac{r^5 - r'^5}{r^3 - r'^3} = \tfrac{1}{10} \pi \varrho H \frac{r^5 - r'^5}{r - r'}.$$

20. **Segment sphérique à deux bases.** Soient r et r' les rayons des deux bases du segment, H sa hauteur et R le rayon de la sphère, à laquelle il appartient.

Le cercle générateur, rapporté à son centre et à la hauteur du segment comme axe des x, a pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

En appelant ϱ la densité du segment, on a pour le moment d'inertie,

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\varrho \int_a^b (R^2 - x^2)^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi\varrho \int_a^b (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx,$$

où a et b désignent les distances du centre aux deux bases du segment.

L'intégration nous donne

(1) $$I = \tfrac{1}{30}\pi\varrho [15R^4(b-a) - 10R^2(b^3 - a^3) + 3(b^5 - a^5)].$$

Soient z la distance du centre de la sphère à la section faite à égales distances des deux bases du segment et r_1 le rayon de cette section; nous avons évidemment

(2) $$a = z - \frac{H}{2}, \quad b = z + \frac{H}{2},$$

(3) $$z^2 = R^2 - r_1^2;$$

Nous en tirons

$$b - a = H,$$

$$b^3 - a^3 = H\left(3z^2 + \frac{H^2}{4}\right),$$

$$b^5 - a^5 = H\left(5z^4 + \tfrac{5}{2}z^2H^2 + \frac{H^4}{16}\right),$$

ce qui donne, par la substitution dans (1),

$$I = \tfrac{1}{30}\pi\varrho H[15R^4 - \tfrac{5}{2}R^2H^2 + \tfrac{3}{16}H^4 - 15(2R^2 - \tfrac{1}{2}H^2)z^2 + 15z^4].$$

Si, dans cette expression, nous remplaçons z^2 par son équivalent (3), nous trouverons, après réductions, que

$$I = \tfrac{1}{30}\pi\varrho H(5R^2H^2 + \tfrac{3}{16}H^4 + 15r_1^4 - \tfrac{15}{2}H^2r_1^2),$$

ou

(4) $$I = \tfrac{1}{30}\pi\varrho H\left[5R^2H^2 + 15\left(r_1^2 - \frac{H^2}{4}\right)^2 - \tfrac{3}{4}H^4\right].$$

Mais nous avons fait voir (Archiv der Mathematik und Physik, T. LX, p. 327) que

$$r_1^2 - \frac{H^2}{4} = \frac{r^2 + r'^2}{2}; \text{ *)}$$

dont il vient enfin

(VIII) $$I = \tfrac{1}{120}\pi\varrho H[20R^2H^2 + 15(r^2+r'^2)^2 - 3H^4].$$

On peut, à la rigueur, rendre cette expression indépendante du rayon R de la sphère.

Pour cela, élevons au carré les deux membres de l'égalité évidente

$$H = b - a = \sqrt{R^2 - r'^2} - \sqrt{R^2 - r^2};$$

nous obtenons

$$H^2 = 2R^2 - r^2 - r'^2 - 2\sqrt{(R^2 - r^2)(R^2 - r'^2)},$$

ou

$$2\sqrt{(R^2 - r^2)(R^2 - r'^2)} = 2R^2 - r^2 - r'^2 - H^2.$$

Elevant de nouveau au carré, on trouve, après réductions, que

$$4R^2H^2 = (r^2 + r'^2)^2 + 2r^2(H^2 - r'^2) + 2r'^2(H^2 - r^2) + H^4.$$

Si nous substituons cette valeur dans (VIII), nous verrons que

(IX) $$I = \tfrac{1}{60}\pi\varrho H[10(r^2+r'^2)^2 + 5r^2(H^2 - r'^2) + 5r'^2(H^2 - r^2) + H^4].$$

21. **Segment sphérique à une base.** Si la plus petite base est nulle, on a $r' = 0$ et la formule précédente devient

---

*) Cette relation s'obtient d'ailleurs facilement. Nous avons en effet

$$2r_1^2 = 2R^2 - 2z^2,$$

$$r^2 = R^2 - a^2 = R^2 - \left(z - \frac{H}{2}\right)^2 = R^2 - z^2 + zH - \frac{H^2}{4},$$

$$r'^2 = R^2 - b^2 = R^2 - \left(z + \frac{H}{2}\right)^2 = R^2 - z^2 - zH - \frac{H^2}{4},$$

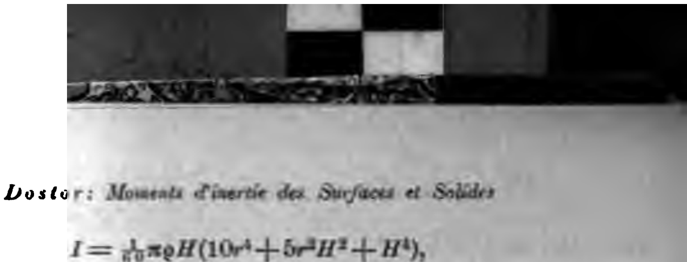
d'où on tire

$$r^2 + r'^2 = 2R^2 - 2z^2 - \frac{H^2}{2},$$

$$r^2 + r'^2 = 2r_1^2 - \frac{H^2}{2},$$

ou

$$\frac{r^2 + r'^2}{2} = r_1^2 - \frac{H^2}{4}.$$



(X) $$I = \frac{1}{60}\pi\varrho H(10r^4 + 5r^2H^2 + H^4),$$

résultat conforme à l'expression donnée par *Euler* dans sa **Theoria motus corporum solidorum, cap. VI, probl. 42.**

Puisque l'on a

$$r^2 = H(2R - H) = 2RH - H^2,$$

cette expression revient aussi à la suivante

(XI) $$I = \frac{1}{30}\pi\varrho H^3(20R^2 - 15RH + 3H^2).$$

22. **L'une des bases du segment est un grand cercle de la sphère.** Si $r = R$, on a $r'^2 = R^2 - H^2$, ce qui transforme la formule (VIII) dans la suivante

(XII) $$I = \frac{1}{30}\pi\varrho H(15R^4 - 10R^2H^2 + 3H^4).$$

23. **Segment symétrique.** Puisque $r = r'$, on a $r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4}$, ce qui donne

$$15(r^2 + r'^2)^2 = 60R^4 - 30R^2H^2 + \tfrac{15}{4}H^4.$$

Substituant dans la formule générale (VIII), on trouve que

(XIII) $$I = \frac{1}{480}\pi\varrho H(240R^4 - 40R^2H^2 + 3H^4).$$

24. **Demi-sphère.** Le moment d'inertie (XII) devient celui de la demi-sphère, si l'on y pose $H = R$, ce qui donne

(XIV) $$I = \frac{4}{15}\pi\varrho R^5 = \tfrac{2}{5}MR^2,$$

où M désigne la masse de la demi-sphère.

25. **Sphère.** En faisant $H = 2R$ dans (XI), le segment devient la sphère entière, et cette formule donne

(XV) $$I = \frac{8}{15}\pi\varrho R^5 = \tfrac{2}{5}MR^2,$$

où M exprime la masse de la sphère entière.

26. **Secteur sphérique plein.** Il se compose d'un segment sphérique à une base et d'un cône, qui a même base que le segment et pour sommet le centre de la sphère.

Soient r le rayon de base et H la hauteur du segment; la hauteur du cône sera $R - H$.

En désignant par I' et I'' les moments d'inertie de ces deux corps par rapport à l'axe, nous avons d'abord, en vertu de la formule (X) d'Euler,

$$I' = \frac{1}{60}\pi\varrho H(10r^4 + 5r^2H^2 + H^4),$$

puis, par la formule (IV) du cône

$$I'' = \frac{1}{10}\pi\rho(R-H)r^4.$$

Il nous vient par suite

$$I = \frac{1}{10}\pi\rho R r^4 + \frac{1}{30}\pi\rho H(4r^4 + 5r^2H^2 + H^4).$$

Puisque

$$r^2 = H(2R-H) = 2RH - H^2,$$

nous avons

$$Rr^4 = RH^2(4R^2 - 4RH + H^2),$$

$$4r^4 + 5r^2H^2 + H^4 = (r^2 + H^2)(4r^2 + H^2) = 2RH(8RH - 3H^2).$$

Nous obtenons donc, en substituant

$$I = \frac{1}{30}\pi\rho RH^2(12R^2 - 12RH + 3H^2) + \frac{1}{30}\pi\rho RH^2(8RH - 3H^2),$$

ou, après réductions,

(XVI) $$I = \frac{2}{15}\pi\rho R^2H^2(3R - H).$$

Tel est le moment d'inertie du secteur sphérique, qui est terminé par la calotte, ayant H pour hauteur.

27. **Secteur sphérique creux.** Si le secteur sphérique est la différence de deux secteurs pleins, dont les hauteurs respectives sont H et H', où l'on a $H > H'$, le moment d'inertie du solide, par rapport à l'axe, sera évidemment

(XVII) $$I = \frac{2}{15}\pi\rho R^2[3R(H^2 - H'^2) - (H^3 - H'^3)].$$

28. **Corps engendré par la révolution d'un segment circulaire autour du diamètre mené par l'une des extrémités de l'arc.** Soient AMB l'arc du segment, BO l'axe de révolution et AC la perpendiculaire abaissée de A sur BO.

Désignons par I, I', I'' les moments d'inertie des solides engendrés par la révolution du segment $AMBA$, du secteur $OAMBO$ et du triangle OAB autour de OB.

Nous avons, en posant $OB = R$, $CB = H$, $AC = r$,

$$I' = \frac{2}{15}\pi\rho R^2H^2(3R - H),$$

$$I'' = \frac{1}{10}\pi\rho r^4(OC + CB) = \frac{1}{10}\pi\rho r^4 R,$$

ou, puisque $r^2 = H(2R - H)$,

$$I'' = \frac{1}{10}\pi\rho RH^2(4R^2 - 4RH + H^2).$$

Il nous vient donc

$$I = \frac{2}{15}\pi\rho R^2H^2(3R - H) - \frac{1}{10}\pi\rho RH^2(4R^2 - 4RH + H^2),$$

c'est-à-dire

(XVIII) $$I = \tfrac{1}{30}\pi\varrho RH^3(8R-3H).$$

Si C est la corde, qui sous-tend l'arc générateur du solide, on a $R = \frac{C^2}{2H}$, ce qui donne

(XIX) $$I = \tfrac{1}{60}\pi\varrho C^2H(4C^2-3H^2).$$

29. **Solide engendré par la révolution d'un segment circulaire autour d'un diamètre extérieur.** Soient H la projection de l'arc du segment sur l'axe de révolution; r et r' les distances des extrémités de cet arc à l'axe. Représentons par I' le moment d'inertie du segment sphérique correspondant, par I'' celui du tronc de cône qui a mêmes bases et même hauteur, enfin par I le moment d'inertie cherché de notre solide, qui est la différence entre ces deux corps. Nous avons

$$I' = \tfrac{1}{120}\pi\varrho H[20R^2H^2+15(r^2+r'^2)^2-3H^4],$$

$$I'' = \tfrac{1}{10}\pi\varrho H.\frac{r^5-r'^5}{r-r'} = \tfrac{1}{10}\pi\varrho H(r^4+r^3r'+r^2r'^2+rr'^3+r'^4).$$

Il nous vient, par suite,

$$I = \tfrac{1}{120}\pi\varrho H[20R^2H^2+15(r^2+r'^2)^2 \\ -12(r^4+r^3r'+r^2r'^2+rr'^3+r'^4)-3H^4].$$

Mais il est aisé de voir que

$$15(r^2+r'^2)^2-12(r^4+r^3r'+r^2r'^2+rr'^3+r'^4) \\ = 3(r^4-4r^3r'+6r^2r'^2-4rr'^3+r'^4) = 3(r-r')^4.$$

Donc on a

(XX) $$I = \tfrac{1}{120}\pi\varrho H[20R^2H^2+3(r-r')^4-3H^4].$$

Si l'arc commence à l'axe, on a $r'=0$; et comme

$$3r^4 = 3H^2(2R-H)^2 = 12R^2H^2-12RH^3+3H^4,$$

il vient

$$I = \tfrac{1}{120}\pi\varrho H(32R^2H^2-12RH^3),$$

ou

$$I = \tfrac{1}{30}\pi\varrho RH^3(8R-3H),$$

comme plus haut (nº 28).

30. **La corde du segment circulaire est parallèle à l'axe.** On a dans ce cas $r=r'$, ce qui réduit la formule (XX) à la suivante

(XXI) $$I = \tfrac{1}{120}\pi\varrho H^3(20R^2-3H^2).$$

Puisque $R^2 = r^2+\frac{H^2}{4}$, on a aussi

(XXII) $$I = \tfrac{1}{60}\pi\varrho H^3(10r^2+H^2).$$



VII.

Evaluation d'un certain déterminant.

Par

Georges Dostor.

---

1. Nous nous proposons, dans cette note, de simplifier le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_2+a_3+\ldots+a_n-a_1, & b_2+b_3+\ldots+b_n-b_1, & \ldots & k_2+k_3+\ldots+k_n-k_1 \\ a_3+a_4+\ldots+a_1-a_2, & b_3+b_4+\ldots+b_1-b_2, & \ldots & k_3+k_4+\ldots+k_1-k_2 \\ a_4+a_5+\ldots+a_2-a_3, & b_4+b_5+\ldots+b_2-b_3, & \ldots & k_4+k_5+\ldots+k_2-k_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}-a_n, & b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}-b_n, & \ldots & k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}-k_n \end{vmatrix},$$

dans lequel la loi de composition des termes est facile à saisir, et que nous représenterons par Δ.

2. Posons

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=2A,\quad b_1+b_2+\ldots+b_n=2B,\quad \ldots\quad k_1+k_2+\ldots+k_n=2K;$$

notre déterminant pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} 2A-2a_1, & 2B-2b_1, & \ldots & 2K-2k_1 \\ 2A-2a_2, & 2B-2b_2, & \ldots & 2K-2k_2 \\ 2A-2a_3, & 2B-2b_2, & \ldots & 2K-2k_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2A-2a_n, & 2B-2b_n, & \ldots & 2K-2k_n \end{vmatrix},$$

ou, par la mise en évidence du facteur 2 dans les n lignes,

$$\Delta = 2^n \begin{vmatrix} A-a_1, & B-b_1, & \ldots & K-k_1 \\ A-a_2, & B-b_2, & \ldots & K-k_2 \\ A-a_3, & B-b_3, & \ldots & K-k_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A-a_n, & B-b_n & \ldots & K-k_n \end{vmatrix}.$$

Aux éléments de la première ligne ajoutons la somme des éléments correspondants de toutes les autres lignes, nous aurons

$$\Delta = 2^n \begin{vmatrix} nA-2A, & nB-2B, & \dots & nK-2K \\ A-a_2, & B-b_2, & \dots & K-k_2 \\ A-a_3, & B-b_3, & \dots & K-k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A-a_n, & B-b_n, & \dots & K-k_n \end{vmatrix},$$

et, en divisant la première ligne par $n-2$,

$$\Delta = (n-2)2^n \begin{vmatrix} A, & B, & \dots & K \\ A-a_2, & B-b_2, & \dots & K-k_2 \\ A-a_3, & B-b_3, & \dots & K-k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A-a_n, & B-b_n, & \dots & K-k_n \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, retranchons les éléments de la première ligne des éléments correspondants de toutes les autres lignes; le déterminant deviendra, après multiplication de la première ligne par 2,

$$\Delta = (n-2)2^{n-1} \begin{vmatrix} 2A, & 2B, & \dots & 2K \\ -a_2, & -b_2, & \dots & -k_2 \\ -a_3, & -b_3, & \dots & -k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n, & -b_n, & \dots & -k_n \end{vmatrix}.$$

Si nous ajoutons, aux éléments de la première ligne, la somme des éléments de toutes les autres lignes, nous aurons enfin

$$\Delta = (n-2)2^{n-1} \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \dots & k_1 \\ -a_2, & -b_2, & \dots & -k_2 \\ -a_3, & -b_3, & \dots & -k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n, & -b_n, & \dots & -k_n \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\Delta = (n-2)(-2)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \dots & k_1 \\ a_2, & b_2, & \dots & k_2 \\ a_3, & b_3, & \dots & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & \dots & k_n \end{vmatrix}.$$

3. Ainsi le déterminant du troisième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2+a_3-a_1, & b_2+b_3-b_1, & c_2+c_3-c_1 \\ a_3+a_1-a_2, & b_3+b_1-b_2, & c_3+c_1-c_2 \\ a_1+a_2-a_3, & b_1+b_2-b_3, & c_1+c_2-c_3 \end{vmatrix}$$

revient à



$$\varDelta = 2^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

ce qu'il est aisé de vérifier directement.

En effet, si l'on ajoute la première ligne à chacune des deux suivantes, on obtient

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_2+a_3-a_1, & b_2+b_3-b_1, & c_2+c_3-c_1 \\ 2a_3, & 2b_3, & 2c_3 \\ 2a_2, & 2b_2, & 2c_2 \end{vmatrix},$$

ou

$$\varDelta = 2^2 \begin{vmatrix} a_2+a_3-a_1, & b_2+b_3-b_1, & c_2+c_3-c_1 \\ a_3, & b_3, & c_3 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Il suffit ici d'ajouter à la première ligne la somme des deux autres, pour trouver que

$$\varDelta = 2^2 \begin{vmatrix} -a_1, & -b_1, & -c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\varDelta = 2^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$



VIII.

Untersuchungen über kürzeste Linien.

Von

R. Hoppe.

Hat man auf einer Fläche eine stetige Schar Kürzester, welche von einer stetigen Schar geodätischer Parallelen rechtwinklig geschnitten wird, so ist in jedem Schnittpunkte die Binormale der erstern identisch mit der Tangente der letztern, und umgekehrt ist jedes orthogonale Curvensystem auf einer Fläche, von der Eigenschaft dass die Binormalen der einen Schar mit den Tangenten der andern zusammenfallen, orthogonal geodätisch. Dieser Umstand gestattet uns das Problem der Kürzesten von der Flächentheorie abzulösen und ausschliesslich auf dem Boden der Curventheorie zu behandeln. Wir betrachten daher die Fläche nicht als gegeben, sondern erteilen einer Curve eine solche Variation, dass sie Kürzeste auf der von ihr erzeugten Fläche wird.

§. 1. Entwickelungsformeln.

Der Bogen einer Curve sei u, die Richtungscosinus ihrer Tangente f, g, h, ihrer Hauptnormale f', g', h', ihrer Binormale l, m, n. Betrachtet man diese 9 Grössen als ein beliebiges Orthogonalcoefficientensystem, das mit einem (von u unabhängigen) Parameter v variirt, so erfüllen ihre partiellen Differentialquotienten die Relationen:

$$f\frac{\partial f}{\partial v}+g\frac{\partial g}{\partial v}+h\frac{\partial h}{\partial v}=0$$

von u, v bestimmt seien, die den Gl. (6) (7) genügen. Dann lässt sich, mit Absehen von t, für jedes v eine Curve bilden, deren Bogen, Krümmung und Torsion u, π, ϱ sind. Deren Lage im Raume wird durch 6 willkürliche Functionen von v bestimmt; nehmen wir diese als stetig an, so ergeben sich f, f', l und die Analogen als stetige Functionen von u, v, welche nach §. 1. die Gl. (1) und (2) befriedigen. Setzt man zur Abkürzung

$$\varrho^2 t - \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = \pi T \tag{8}$$

und subtrahirt die Gl. (2) von den Gl. (6) (7) ergänzt durch (8), so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\varrho t - w_2)}{\partial u} &= -\varrho\left(\frac{\partial t}{\partial u} - w_1\right) \\ \frac{\partial(T-w)}{\partial u} &= \pi\left(\frac{\partial t}{\partial u} - w_1\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial t}{\partial u} - w_1\right) &= \varrho(\varrho t - w_2) - \pi(T-w) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hiernach stehen die 3 Grössen $T-w$, $\varrho t - w_2$, $\frac{\partial t}{\partial u} - w_1$ in derselben Relation wie f, l, f' nach den Gl. (1) links. Folglich genügen den Gl. (9) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} T - w &= \mu f + \mu_1 g + \mu_2 h \\ \varrho t - w_2 &= \mu l + \mu_1 m + \mu_2 n \\ \frac{\partial t}{\partial u} - w_1 &= \mu f' + \mu_1 g' + \mu_2 h' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wo μ, μ_1, μ_2 willkürliche Functionen von v sind. Vorstehende Gleichungen sind die allgemeinste Lösung des Systems (9); denn wenn man zwischen den Gl. (1) links 2 der Grössen f, l, f' eliminirt, so erhält man eine lineare Gleichung 3. Ordnung für die dritte, deren vollständiges Integral bekanntlich immer in der Form (10) aus 3 verschiedenen Speciallösungen zusammengesetzt werden kann. Setzt man $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 0$, so wird $\varrho t = w_2$ und $\frac{\partial t}{\partial u} = w_1$, und diese Relationen waren ausreichend zur Construction der Fläche.

Hiermit ist bewiesen, dass jede Lösung des Gleichungspares (6) (7) mindestens einer Fläche entspricht, auf welcher die Curven v = const. Kürzeste, die Curven u = const. geodätische Parallelen sind, und π, ϱ, t die genannte geometrische Bedeutung haben, so dass

$$1,\quad 0,\cdot t^2$$

die Fundamentalgrössen 1. Ordnung auf jener Fläche darstellen, d. h. dass ein beliebiges Linienelement ∂s den Ausdruck hat:

$$\partial s^2 = \partial u^2 + t^2 \partial v^2$$

§. 3. Ergebnisse aus den vorigen Bestimmungen.

Unterscheidet man die Bestimmungsstücke der Curven $u = \text{const.}$ durch den Index 1, so sind die Richtungscosinus ihrer Tangente

$$f_1 = l;\quad \text{etc.} \tag{11}$$

Hieraus ergeben sich durch Differentiation, wenn man

$$w = \mu \cos \nu;\quad w_1 = \mu \sin \nu$$

setzt, die ihrer Hauptnormale

$$f_1' = f' \cos \nu - f \sin \nu;\quad \text{etc.} \tag{12}$$

zugleich mit ihrer Krümmung

$$\frac{\partial \tau_1}{t \partial v} = \frac{\mu}{t} \tag{13}$$

dann aus (11) und (12) die ihrer Binormale

$$l_1 = -f' \sin \nu - f \cos \nu;\quad \text{etc.} \tag{14}$$

und durch neue Differentiation ihr Torsionswinkel

$$\vartheta_1 = \nu - \int w_2 \partial v \tag{15}$$

Ferner erhält man leicht durch partielle Differentiation der Coordinaten die Werte der Fundamentalgrössen 2. Ordnung der Fläche:

$$E = \varkappa;\quad F = -\varrho t;\quad G = tw \tag{16}$$

hieraus die Summe und das Product der Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \varkappa + \frac{w}{t};\quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\varkappa w}{t} - \varrho^2 \tag{17}$$

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \pm \sqrt{\left(\varkappa - \frac{w}{t}\right)^2 + 4\varrho^2} \tag{18}$$

§. 4. Bedingung verschiedener Flächen für gleich bestimmte Kürzeste.

Durch Bogen, Krümmung und Torsion ist die Curve u in sich bestimmt, aber nicht ihre Lage. Es bleibt daher, auch wenn π, ϱ in u, v gegeben sind, denkbar, dass die Curve verschiedene Flächen erzeugen kann. Existirten 2 solche Flächen, so müssten 2 Wertsysteme von w, w_1, w_2 für gegebene π, ϱ die Gl. (2) befriedigen. In §. 2. ist gezeigt, dass dann die 3 Differenzen die Form (10) haben würden. Die rechten Seiten von (10) gehen aber über in $\mu_0 f_2$, $\mu_0 l_2$, $\mu_0 f_2'$, wenn f_2, l_2, f_2' die Richtungscosinus der Tangente, Binormale, Hauptnormale der Curve u gegen eine gewisse neue, mit v variirende Axe bezeichnen. Jetzt kommen die Bestimmungen (4) hinzu. Sind also t und $t+t_1$ die entsprechenden Werte von t, so muss sein

$$\frac{\partial t_1}{\partial u} = \mu_0 f_2'; \quad \varrho t_1 = \mu_0 l_2 \tag{19}$$

woraus:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{l_2}{\varrho} = f_2'$$

das ist

$$f_2' = \varkappa l_2; \quad 2\varkappa = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\varrho} \tag{20}$$

Differentiirt man die Gleichung nach u und eliminirt f_2', so kommt:

$$f_2 = \left\{\varrho(1+\varkappa^2) - \frac{\partial \varkappa}{\partial u}\right\}\frac{l_2}{\pi}$$

oder, wenn man

$$\varkappa = \operatorname{tg}\zeta; \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{\varrho - \frac{\partial \zeta}{\partial u}}{\pi \cos\zeta} \tag{21}$$

setzt:

$$f_2 = l_2 \frac{\operatorname{tg}\eta}{\cos\zeta} \tag{22}$$

Dies verbunden mit (20) und der Gleichung

$$f_2^2 + f_2'^2 + l_2^2 = 1$$

ergiebt die Werte:

$$f_2 = \sin\eta; \quad l_2 = \cos\eta\cos\zeta; \quad f_2' = \cos\eta\sin\zeta \tag{23}$$

Nimmt man zu der betrachteten Axe der x_2 zwei orthogonale Axen der y_2 und z_2 hinzu, so findet man nach bekannter Methode*) die entsprechenden Werte:

*) Hoppe, Curventh. §. 8. Arch. LVI. p. 59.

$$g_2 = \cos\eta\cos\varphi; \quad h_2 = \cos\eta\sin\varphi$$
$$m_2 = -\sin\eta\cos\zeta\cos\varphi + \sin\zeta\sin\varphi$$
$$n_2 = -\sin\eta\cos\zeta\sin\varphi - \sin\zeta\cos\varphi$$
$$g_2' = -\sin\eta\sin\zeta\cos\varphi - \cos\zeta\sin\varphi$$
$$h_2' = -\sin\eta\sin\zeta\sin\varphi + \cos\zeta\cos\varphi$$

wo

$$\varphi = \int \frac{\partial\eta}{\cos\eta\,\mathrm{tg}\,\zeta} \tag{24}$$

zugleich aber den Krümmungs- und Torsionswinkel

$$\tau = \int \frac{\partial\eta}{\sin\zeta}; \quad \vartheta = \zeta + \int \frac{\partial\eta\,\mathrm{tg}\,\eta}{\mathrm{tg}\,\zeta} \tag{25}$$

welche beide von der Coordinatenaxenlage unabhängig sind, daher mit den durch

$$\pi = \frac{\partial\tau}{\partial u}; \qquad \varrho = \frac{\partial\vartheta}{\partial u}$$

bereits bestimmten übereinstimmen müssen. Es fragt sich nun, ob die 4 Gleichungen (21) (25) vereinbar sind. Nach ihnen ist

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\mathrm{tg}\,\zeta = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{\varrho}; \quad \mathrm{tg}\,\eta = \dfrac{\varrho - \dfrac{\partial\zeta}{\partial u}}{\pi\cos\zeta} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial u} = \pi\sin\zeta; \quad \dfrac{\partial\eta}{\partial u}\mathrm{tg}\,\eta = \left(\varrho - \dfrac{\partial\zeta}{\partial u}\right)\mathrm{tg}\,\zeta \end{array}\right\} \tag{26}$$

Die letzte Gleichung ist das Product der 2 vorhergehenden, kommt daher nicht in Rechnung. Doch kann man aus ihr ein Integral gewinnen, indem man für $\mathrm{tg}\,\zeta$ als Factor von ϱ seinen Wert setzt; dann kommt:

$$\partial\eta\,\mathrm{tg}\,\eta + \partial\zeta\,\mathrm{tg}\,\zeta + \frac{1}{2\varrho}\partial\varrho = 0$$

integrirt:

$$\cos\eta\cos\zeta = \sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon \text{ Funct. v. } v) \tag{27}$$

Ferner ist nach der 2. Gl. (26)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u} = \varrho - \pi\,\mathrm{tg}\,\eta \tag{28}$$

Differentiirt man mit Anwendung der so erhaltenen Werte von $\partial\eta$, $\partial\zeta$ Gl. (27), so kommt:

$$-\varrho\cos\eta\sin\zeta = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon}} \quad \text{oder}$$

$$\cos\eta\sin\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varrho^3}}\frac{\partial\varrho}{\partial u} \tag{29}$$

und als Summe der Quadrate von (27) und (29):

$$\cos^2\eta = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\varrho + \frac{1}{4\varrho^3}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2\right\} \tag{30}$$

Dies differentiirt giebt gemäss dem Werte von $\partial\eta$:

$$-2\pi\sin\eta\cos\eta\sin\zeta = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varrho}{\partial u}\left\{1 + \frac{1}{2\varrho^3}\frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2} - \frac{3}{4\varrho^4}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2\right\}$$

das ist nach Gl. (29):

$$\pi\sin\eta = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varrho^3}}\left\{2\varrho^3 + \frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2} - \frac{3}{2\varrho}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2\right\}$$

Entwickelt man noch den Wert von $\sin\eta$ aus Gl. (30), so findet man schliesslich:

$$\pi = \frac{2\varrho^3 + \frac{\partial^2\varrho}{\partial u^2} - \frac{3}{2\varrho}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{4(\varepsilon-\varrho)\varrho^3 - \left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2}} \tag{31}$$

Diese Relation zwischen u, π, ϱ ist demnach notwendige Bedingung dafür, dass mehr als ein Wert von t die Gl. (6) (7) befriedigt, dass also mehr als eine Fläche für dieselben u, π, ϱ existirt. Ist sie aber erfüllt, so vertritt sie eine der 3 Gl. (26), die beiden übrigen können durch η und ζ erfüllt werden; folglich ist (31) ausreichende Bedingung dafür, dass sich ein bekannter Wert t auf $t+t_1$ erweitern lässt. Nun ist nach (19) (23) (27)

$$t_1 = \frac{\mu_0 l_2}{\varrho} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon\varrho}}$$

daher erweitern sich t, w, w_1, w_2 auf

$$t + \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon\varrho}}; \quad w + \frac{\mu_0}{2\sqrt{\varepsilon\varrho^3}}\sqrt{4(\varepsilon-\varrho)\varrho^3 - \left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2}$$

$$w_1 - \frac{\mu_0}{2\sqrt{\varepsilon\varrho^3}}\frac{\partial\varrho}{\partial u}; \quad w_2 + \mu_0\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon}}.$$

§. 5. Ebene Kürzeste.

Da ϱ öfters als Divisor vorkommt, so ist der Fall $\varrho = 0$, wo die Kürzeste eben ist, besonders zu behandeln. Derselbe hat um so

mehr Interesse, weil hier die Gl. (6) (7) sich auflösen lassen, und eine entwickelte Darstellung der Fläche möglich ist.

Für $\varrho = 0$ reducirt sich Gl. (6) auf

$$\frac{\partial \pi}{\partial v} = 0$$

daher ist π Function von u allein, und alle Curven u congruent. Gl. (7) wird:

$$\pi \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}\right) = 0$$

Führt man den Krümmungswinkel

$$\tau = \int \pi \partial u$$

und die bereits in §. 1. und 2. gebrauchte Grösse

$$w_1 = \frac{\partial t}{\partial u}$$

ein, so lautet die Gleichung:

$$w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = 0$$

und giebt nach Integration:

$$w_1 = \frac{\partial V}{\partial v}\cos(\tau - \psi)$$

wo V und ψ willkürliche Functionen von v sind. Eine solche müsste auch als Addend in τ enthalten sein; da sie aber mit ψ verschmilzt, so betrachten wir τ als reine Function von u.

Ferner folgt aus (4), dass

$$w_2 = 0$$

demnach aus der 3. Gl. (2), dass

$$w = -\frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial v}\sin(\tau - \psi)$$

Dies verglichen mit den Werten in §. 3. zeigt, dass

$$\mu = \frac{\partial V}{\partial v}; \quad \nu = \mathrm{R} - \tau + \psi$$

daher nach Gl. (13) und (15)

$$\tau_1 = V; \qquad \vartheta_1 = \psi$$

ist, wenn man dabei beachtet, dass die Gl. (13) (15) über einen in

τ_1 und in ϑ_1 enthaltenen von u abhängigen Addenden nichts bestimmen, und festsetzt, dass τ_1 und ϑ_1 reine Functionen von v sein sollen.

Jetzt hat man:

$$w = \frac{\partial \tau_1}{\partial v}\sin(\tau - \vartheta_1); \quad w_1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial v}\cos(\tau - \vartheta_1); \quad w_2 = 0 \tag{32}$$

Sofern die Parameter u, v hier durch τ, τ_1 vertreten werden können, gehen die Formeln (1) über in

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \tau} = f' && \frac{\partial f'}{\partial \tau_1} = l\cos(\tau - \vartheta_1) \\ &\frac{\partial f'}{\partial \tau} = -f && \frac{\partial f'}{\partial \tau_1} = -l\sin(\tau - \vartheta_1) \\ &\frac{\partial l}{\partial \tau} = 0 && \frac{\partial l}{\partial \tau_1} = f'\sin(\tau - \vartheta_1) - f\cos(\tau - \vartheta_1) \end{aligned} \tag{33}$$

Hiernach sind die Grössen

$$f_1 = l; \quad \text{etc.} \tag{34}$$

unabhängig von u. Differentiirt man sie nach τ_1, so erhält man gemäss der letzten Formel:

$$f_1' = f'\sin(\tau - \vartheta_1) - f\cos(\tau - \vartheta_1); \quad \text{etc.} \quad (\text{unabh. v. } u)$$

und in Verbindung mit (34):

$$l_1 = -f'\cos(\tau - \vartheta_1) - f\sin(\tau - \vartheta_1); \quad \text{etc.} \quad (\text{unabh. v. } u)$$

woraus:

$$\begin{aligned} f &= -f_1'\cos(\tau - \vartheta_1) - l_1\sin(\tau - \vartheta_1); \quad \text{etc.} \\ f' &= f_1'\sin(\tau - \vartheta_1) - l_1\cos(\tau - \vartheta_1); \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{35}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial t}{\partial u} = w_1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial v}\cos(\tau - \vartheta_1)$$

woraus durch Integration:

$$t_1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial v}\int \partial u \cos(\tau - \vartheta_1) + \frac{\partial v_0}{\partial v} \quad (v_0 \text{ Fct. v. } v) \tag{36}$$

Nun hat man:

$$\partial x = f\partial u + l t\partial v; \quad \text{etc.}$$

daher nach Einsetzung des Wertes von t:

$$x = \int l\partial \tau_1 \int \partial u \cos(\tau - \vartheta_1) + \int l\partial v_0 + F(u); \quad \text{etc.}$$

oder, wenn man zur Abkürzung



$$S = \int l \partial\tau_1 \cos\vartheta_1; \quad T = \int l \partial\tau_1 \sin\vartheta_1; \quad x_0 = \int f_1 \partial v_0$$

setzt:

$$x = S \int \partial u \cos\tau + T \int \partial u \sin\tau + x_0 + F(u)$$

und nach Differentiation in Bezug auf u:

$$f = S \cos\tau + T \sin\tau + F'(u)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (35) rücksichtlich seiner Form in τ, so ergiebt sich:

$$S = l_1 \sin\vartheta_1 - f_1' \cos\vartheta_1$$
$$T = -l_1 \cos\vartheta_1 - f_1' \sin\vartheta_1; \quad F'(u) = 0$$

Folglich sind die definitiven Gleichungen der Fläche:

$$x = x_0 - f_1' \int \partial u \cos(\tau - \vartheta_1) - l_1 \int \partial u \sin(\tau - \vartheta_1); \quad \text{etc.} \tag{37}$$

Hier sind x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Punktes, der von beliebigem Anfang bei variirendem v in der Tangentialrichtung der geodätischen Parallelen um willkürliche, aber allen gemeinsame Bogenelemente ∂v_0 fortrückt.

Die Fläche ist, wie gleich anfänglich durch geometrische Betrachtung erhellen konnte, eine beliebige Canalfläche, erzeugt von der ebenen Curve u, indem sich jeder Punkt normal zu ihrer Ebene bewegt.

§. 6. Schraubenlinie als Kürzeste.

Ein zweiter Fall, wo die Gl. (6) (7) sich leicht integriren lassen, ist der, dass π und ϱ unabhängig von u sind; die Curven sind dann Schraubenlinien. Führt man die Krümmungsbreite λ und den Torsionsbogen σ ein, so dass

$$\frac{\varrho}{\pi} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \operatorname{tg}\lambda; \quad \pi^2 + \varrho^2 = \frac{\partial\tau^2 + \partial\vartheta^2}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2$$

also

$$\pi = \frac{\partial\sigma}{\partial u} \cos\lambda; \quad \varrho = \frac{\partial\sigma}{\partial u} \sin\lambda \quad (\sigma \text{ linear in } u)$$

wird, so geht Gl. (6) über in

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u \partial v} \cos\lambda - \frac{\partial\sigma}{\partial u} \frac{\partial\lambda}{\partial v} \sin\lambda + 2 \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial\sigma}{\partial u} \sin\lambda = 0$$

daher ist auch t linear in u, $\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}$ verschwindet, und Gl. (7) reducirt sich auf

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u \partial v}\sin\lambda + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\cos\lambda - \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\cos 2\lambda}{\cos\lambda} = 0$$

Beide Gleichungen verbinden sich zu

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u \partial v} : \frac{\partial\sigma}{\partial u} = -\frac{\partial t}{\partial u}\operatorname{tg}\lambda$$

$$\lambda' = \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial u} \tag{38}$$

woraus nach Integration:

$$t = t_0 + \lambda' u \quad (t_0 \text{ Function von } v) \tag{39}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \frac{\cos\lambda}{c} \quad (c \text{ constant})$$

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{u}{c}\cos\lambda \quad (\sigma_0 \text{ Fct. v. } v) \tag{40}$$

Jetzt wird

$$\varkappa = \frac{\cos^2\lambda}{c}; \quad \varrho = \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{c} \tag{41}$$

Aus der 2. Gl. (1) links erhält man durch neue Differentiation:

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial u^2} = -(\varkappa^2 + \varrho^2) f' \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial\sigma^2} + f' = 0 \tag{42}$$

wovon das allgemeine Integral bei constantem v lautet:

$$f' = v_1\cos\sigma + v_2\sin\sigma \quad (v_1,\ v_2 \text{ Fct. v. } v) \tag{43}$$

Dies differentiirt nach σ bei constantem v giebt:

$$l\sin\lambda - f\cos\lambda = -v_1\sin\sigma + v_2\cos\sigma) \tag{44}$$

Ausserdem findet man durch Elimination von f' zwischen der 1. und 3. Gl. (1) links:

$$\frac{\partial l}{\partial u}\cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial u}\sin\lambda = 0$$

und nach Integration:

$$l\cos\lambda + f\sin\lambda = v_3 \quad (\text{Fct. v. } v) \tag{45}$$

Die Quadratsumme der 3 Grössen (43) (44) (45) muss = 1 sein; daher ist

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

..i um dem zu genügen

$$v_1 = \sin\varepsilon \sin\mu; \quad v_2 = \sin\varepsilon\cos\mu; \quad v_3 = \cos\varepsilon$$

dann wird

$$\left.\begin{aligned} f &= -\sin\varepsilon\cos\lambda\cos(\sigma+\mu)+\cos\varepsilon\sin\lambda \\ l &= \sin\varepsilon\sin\lambda\cos(\sigma+\mu)+\cos\varepsilon\cos\lambda \\ f' &= \sin\varepsilon\sin(\sigma+\mu) \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Diese Werte haben noch die Gl. (1) rechts zu befriedigen. Hier ist nach (4) (39)

$$\left.\begin{aligned} w_1 = \lambda'; \quad w_2 &= \frac{t_0+\lambda' u}{c}\sin\lambda\cos\lambda \\ w &= \frac{t_0+\lambda' u}{c}\sin^2\lambda \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Nach Einführung in die erste derselben erhält man:

$$-\varepsilon'\{\cos\varepsilon\cos\lambda\cos(\sigma+\mu)+\sin\varepsilon\sin\lambda\}+\lambda' l$$
$$+f'\cos\lambda\left(\sigma_0'+\mu'-\frac{u}{c}\lambda'\sin\lambda\right) = \lambda' l - f'\frac{t_0+\lambda' u}{c}\sin\lambda\cos\lambda$$

Nach Hebung identischer Terme bleibt nur ein Term

$$-\varepsilon'\sin\varepsilon\sin\lambda$$

welcher keine periodische Function von u zum Factor hat; folglich ist $\varepsilon' = 0$, und es bleibt:

$$\sigma_0'+\mu' = -\frac{t_0}{c}\sin\lambda \tag{48}$$

Sei $\sigma_0+\mu = \omega$; dann hat man:

$$\sigma = \omega - \mu + \frac{u}{c}\cos\lambda \tag{49}$$

$$t = \lambda' u - \frac{c\omega'}{\sin\lambda} \tag{50}$$

Die analogen Grössen für f, l, f' müssen nun der Gl. (42) gleichfalls genügen; sie können sich daher nur durch die Werte der Integrationsconstanten v_1, v_2, v_3 oder ε, μ unterscheiden. Gl. (48) zeigt, dass μ' sich stets gleich bleibt, also μ nur constante Incremente bekommen kann. Diese sowol als die Werte des constanten ε bestimmen aber nur die Lage der Gesammtfigur im Raume. Es genügt daher ihnen die bequemsten Werte beizulegen, welche das System der 9 Richtungscosinus orthogonal und die Determinante $= +1$ machen. Dies geschieht, wenn wir in Betreff der x, y, z bzhw. für ε, μ setzen:

$$(0, \mu) \quad (R, \mu) \quad (R, \mu - R)$$

dann gehen die Gl. (46) mit Anwendung von (49) über in

$$f = \sin\lambda; \quad g = -\cos\lambda\cos\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right); \quad h = -\cos\lambda\sin\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right)$$

$$l = \cos\lambda; \quad m = \sin\lambda\cos\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right); \quad n = \sin\lambda\sin\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right)$$

$$f' = 0; \quad g' = \sin\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right); \quad h' = = -\cos\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right)$$

Ausserdem hat man nach (50):

$$t\partial v = u\partial\lambda - \frac{c\partial\omega}{\sin\lambda}$$

Führt man diese Werte in die Gleichung

$$x = \int (f\partial u + lt\,\partial v)$$

und in die analogen ein, so findet man:

$$x = u\sin\lambda - c\int\partial\omega\cot\lambda$$

$$y = -c\sin\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right)$$

$$z = c\cos\left(\frac{u\cos\lambda}{c} + \omega\right)$$

Statt ω kann man auch v schreiben. Die Fläche ist ein Rotationscylinder. In den Linien $v =$ const. sind im ganzen alle möglichen Kürzesten enthalten.



IX.

Lösung einiger Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Simon Spitzer.

Aufgabe 1. Drei Personen A, B und C machen ein Spiel. Jede Person erlegt den gleichen Einsatz $\frac{M}{3}$. Diejenige von diesen drei gleich gut spielenden Personen, die zuerst drei Spiele gewinnt, bekömmt den ganzen Einsatz M.

Nach einiger Zeit hat

die Person A 2 Spiele
- - B 2 -
- - C 1 Spiel

gewonnen. Und nun unterbrechen sie das Spiel. Wie ist der Einsatz M zu teilen? Wieviel gebührt der Person A, wieviel der Person B und wieviel der Person C?

Auflösung. Um diese Aufgabe zu lösen, denke man sich, die 3 Spieler spielen noch ein Spiel. Dieses kann sowohl der A, als der B, als der C gewinnen, und da alle 3 Spieler gleich gut spielen, so ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für alle 3 Spieler die gleiche. Gewinnt A, so hat A 3 Spiele gewonnen, ihm gebührt daher der ganze Einsatz M; B und C gehen leer aus. Gewinnt B, so gebührt ihm der ganze Einsatz M; A und C gehen leer aus; gewinnt endlich C, so hat jeder der Spieler zwei Spiele gewonnen, und es ist k

dass in diesem Falle jeder der 3 Spieler seinen gemachten Einsatz $\frac{M}{3}$ zurückerhält.

Der A erhält also entweder den ganzen Einsatz M, oder gar nichts, oder er erhält $\frac{M}{3}$, und da für ihn jeder der 3 Fälle gleich wahrscheinlich ist, so erhält er

$$\tfrac{1}{3}\left(M+0+\frac{M}{3}\right)=\tfrac{4}{9}M$$

Der B hat offenbar den gleichen Anspruch auf den Einsatz wie der A, ihm gebühren daher auch $\frac{4}{9}M$; dem C bleibt sonach $\frac{1}{9}M$.

Aufgabe 2. Nehmen wir wieder an, dass 3 Personen unter den in der früheren Aufgabe gegebenen Bedingungen spielen, dass aber nach einiger Zeit

die Person A 2 Spiele
- - B 1 Spiel
- - C 1 -

gewonnen hat. Wie ist in diesem Falle, wenn das Spiel unterbrochen wird, der Einsatz zu teilen?

Auflösung. Denkt man sich wieder, dass noch ein Spiel gespielt wird, so kann dieses der A oder der B oder der C gewinnen.

Gewinnt A, so gebührt ihm der ganze Einsatz M, der B und der C gehen leer aus.

Gewinnt B, so hat der A 2 Spiele, der B 2 Spiele und der C 1 Spiel gewonnen, nach Aufgabe 1. gebührt daher

dem A $\frac{4}{9}M$
- B $\frac{4}{9}M$
- C $\frac{1}{9}M$

Gewinnt endlich C, so hat A 2 Spiele. C 2 Spiele und B 1 Spiel gewonnen, nach Aufgabe 1. gebührt daher

dem A $\frac{4}{9}M$
- B $\frac{1}{9}M$
- C $\frac{4}{9}M$

Es hat demnach A Anspruch entweder auf den ganzen Einsatz M, oder auf $\frac{4}{9}M$, also gebühren dem A

$$\tfrac{1}{3}(M + \tfrac{4}{9}M + \tfrac{4}{9}M) = \tfrac{17}{27}M$$

Die beiden andern Spieler haben sich in den restirenden $\tfrac{10}{27}M$ auf gleiche Weise zu teilen, es gebührt demnach

dem A $\tfrac{17}{27}M$
 - B $\tfrac{5}{27}M$
 - C $\tfrac{5}{27}M$.

Aufgabe 3. Nehmen wir wieder an, dass die 3 Personen unter den bei den früheren Aufgaben gegebenen Bedingungen spielen, dass aber nach einiger Zeit

die Person A 2 Spiele
 - - B 2 -
 - - C kein Spiel

gewonnen hat, wie ist in diesem Falle, wenn das Spiel unterbrochen wird, der Einsatz zu teilen?

Auflösung. Denkt man sich wieder, dass noch ein Spiel gespielt wird, so kann dies der A, der B oder auch der C gewinnen.

Gewinnt A, so hat er 3 Spiele gewonnen, ihm gebührt daher der volle Einsatz M, B und C gehen leer aus.

Gewinnt der B, so hat er 3 Spiele gewonnen, ihm gebührt daher der volle Einsatz M, A und C gehen leer aus.

Gewinnt endlich der C, so hat nach der 1sten Aufgabe der A Anspruch auf $\tfrac{4}{9}M$, der B gleichfalls auf $\tfrac{4}{9}M$, der C aber hat blos Anspruch auf $\tfrac{1}{9}M$.

Es hat demnach der A Anspruch entweder auf den ganzen Einsatz M, oder auf gar nichts, oder auf $\tfrac{4}{9}M$; es gebührem demnach dem A

$$\tfrac{1}{3}(M + 0 + \tfrac{4}{9}M) = \tfrac{13}{27}M$$

eben so viel gebührt auch dem B, und somit bleibt für den C blos $\tfrac{1}{27}M$.

Aufgabe 4. Nehmen wir nochmals an, dass 3 Personen unter den in den früheren Aufgaben gegebenen Bedingungen spielen, dass aber vor Aufhören des Spieles

die Person A gewonnen hat 2 Spiele
 - - B - - 1 Spiel
 - - C - - kein Spiel

wie ist in diesem Falle der Einsatz zu teilen?

Auflösung. Wird noch ein Spiel gespielt, und gewinnt dies der A, so gebührt ihm der ganze Einsatz M, B und C gehen leer aus.

Gewinnt der B, so ist nach der früheren Aufgabe der Einsatz so zu teilen, dass

der A $\frac{13}{27}M$
- B $\frac{13}{27}M$
- C $\frac{1}{27}M$

erhält.

Gewinnt der C, so ist nach der zweiten Aufgabe der Einsatz so zu teilen, dass

der A $\frac{17}{27}M$
- B $\frac{5}{27}M$
- C $\frac{5}{27}M$

erhält.

Es hat demzufolge der A Anspruch entweder auf den ganzen Einsatz M oder auf $\frac{13}{27}M$ oder auf $\frac{17}{27}M$; demnach hat A Anspruch auf

$$\tfrac{1}{3}(M+\tfrac{13}{27}M+\tfrac{17}{27}M)=\tfrac{19}{27}M$$

Der B hat Anspruch entweder auf gar nichts, oder auf $\frac{13}{27}M$ oder auf $\frac{5}{27}M$, somit auf

$$\tfrac{1}{3}(0+\tfrac{13}{27}M+\tfrac{5}{27}M)=\tfrac{2}{9}M$$

Der C hat Anspruch entweder auf nichts, oder auf $\frac{1}{27}M$ oder auf $\frac{5}{27}M$, und da diese 3 Ansprüche mit gleicher Wahrscheinlichkeit erhoben werden können, so gebührt dem C

$$\tfrac{1}{3}(0+\tfrac{1}{27}M+\tfrac{5}{27}M)=\tfrac{2}{27}M$$

Es gebühren demnach

dem A $\frac{19}{27}M$
- B $\frac{2}{9}M$
- C $\frac{2}{27}M$.

Aufgabe 5. Fünf Personen A, B, C, D und E spielen, und wir nehmen an, dass bei jedem Spiele 2 Personen gewinnen, und 3 Personen verlieren *). Diejenige von diesen fünf gleich gut spielenden Personen, die zuerst 3 Spiele gewinnt, bekömmt den ganzen Ein-

---

*) Man kann sich das auf folgende Art denken. In einer Urne werden 2 weisse und 3 schwarze Kugeln gelegt. Die 5 Personen nehmen jeder blindlings und gleichzeitig eine Kugel aus der Urne. Diejenigen Personen, welche weisse Kugeln gezogen, gewinnen, diejenigen Personen, welche schwarze Kugeln gezogen, verlieren.

satz M; sollten aber 2 Personen gleichzeitig 3 Spiele gewinnen, so erhält jede derselben den halben Einsatz. Nach einiger Zeit

hat die Person A 2 Spiele
- - - B 2 -
- - - C 2 -
- - - D 1 Spiel
- - - E 1 -

gewonnen, und nun unterbrechen sie das Spiel. Wie ist der Einsatz M zu teilen? Wieviel gebührt jeder der 5 Personen?

Auflösung. Man denke sich, dass die 5 Spieler noch ein Spiel machen. Dieses Spiel kann der A und der B
oder - A - - C
- - A - - D
etc. gewinnen.

	der A	der B	der C	der D	der E
Gewinnt der A und der B so bekömmt	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	nichts	nichts	nichts
- - A - - C - -	$\frac{M}{2}$	nichts	$\frac{M}{2}$	-	-
- - A - - D - -	M	-	nichts	-	-
- - A - - E - -	M	-	-	-	-
- - B - - C - -	nichts	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	-	-
- - B - - D - -	-	M	nichts	-	-
- - B - - E - -	-	M	-	-	-
- - C - - D - -	-	nichts	M	-	-
- - C - - E - -	-	-	M	-	-
- - D - - E - -	$\frac{M}{5}$	$\frac{M}{5}$	$\frac{M}{5}$	$\frac{M}{5}$	$\frac{M}{5}$

Die Aufstellung ist klar. Denn gewinnt A und B, so hat jede von diesen beiden Personen 3 Spiele gewonnen, also ist der Einsatz unter ihnen gleich zu teilen, die andern 3 Personen C, D und E gehen leer aus, gewinnen A und C, so bekömmt jede dieser 2 Personen den halben Einsatz, der B, D und E gehen leer aus; gewinnt A und D, so hat der A allein 3 Spiele gewonnen, ihm gebührt daher der volle Einsatz u. s. w., gewinnen schliesslich D und E, so hat jeder der 5 Spieler zwei Spiele gewonnen, und demnach gebührt offenbar jedem $\frac{1}{5}$tel vom Einsatze.

Wird also, nachdem das Spiel unterbrochen wurde, noch ein Spiel gespielt, so erhält

der A	entweder	$\frac{M}{2}$
- -	oder	$\frac{M}{2}$
- -	-	M
- -	-	M
- -	-	nichts
- -	-	nichts
- -	-	nichts
- -	-	nichts
- -	-	nichts
- -	-	$\frac{M}{5}$

und da alle diese 10 Fälle gleich wahrscheinlich sind, so erhält der A ein Zehntel der Summe, d. i.

$$\tfrac{16}{50}M$$

ebensoviel erhält auch der B und der C; es bleibt also für den D und den E zusammen $\frac{2}{50}M$, uud da diese beiden gleiches Anrecht auf diese $\frac{2}{50}M$ haben, so gebührt dem D $\frac{1}{50}M$ und ebenso dem E $\frac{1}{50}M$.

Aufgabe 6. Fünf Personen spielen nach den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe. Nach einiger Zeit

hat die Person	A	2 Spiele
- - -	B	2 -
- - -	C	2 -
- - -	D	2 -
- - -	E	kein Spiel

gewonnen; und nun unterbrechen sie das Spiel, wie ist der Einsatz zu teilen?

Auflösung. Verfährt man genau so, wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfahren wurde, so hat man das nachfolgende Schema
llen:

	der A	der B	der C	der D	der E
Gewinnt der A und der B so bekömmt	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	nichts	nichts	nichts
- - A - - C - -	$\frac{M}{2}$	nichts	$\frac{M}{2}$	-	-
- - A - - D - -	$\frac{M}{2}$	-	nichts	$\frac{M}{2}$	-
- - A - - E - -	M	-	-	nichts	-
- - B - - C - -	nichts	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	-	-
- - B - - D - -	-	$\frac{M}{2}$	nichts	$\frac{M}{2}$	-
- - B - - E - -	-	M	-	nichts	-
- - C - - D - -	-	nichts	$\frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$	-
- - C - - E - -	-	-	M	nichts	-
- - D - - E - -	-	-	nichts	M	-

Wird also noch ein Spiel gespielt, so können hierbei zehn verschiedene Fälle eintreten, in keinem Falle erhält, wie man aus dem obigen Schema sieht, der E etwas, also geht der E leer aus, die übrigen vier haben gleichen Anspruch auf den Einsatz, somit erhält jeder von ihnen $\frac{M}{4}$.

Aufgabe 7. In einer Urne seien n mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... n numerirte Kugeln. Aus dieser Urne wird eine Kugel gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer, die ich gesetzt habe, gezogen wird?

Auflösung. Es ist klar, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ist. Würde ich 2 Nummern gesetzt haben, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der von mir besetzten Nummern gezogen wird, gleich $\frac{2}{n}$; hätte ich 3 Nummern gesetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 3 Nummern gezogen wird $\frac{3}{n}$ u. s. f.

Aufgabe 8. In einer Urne seien n mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... n numerirte Kugeln. Aus dieser Urne werden 2 Kugeln gezogen. Ich besitze ein Los, etwa das Los Nr. 1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los Nr. 1 gezogen wird?

Auflösung. Um die Wahrscheinlichkeit zu finden, hat man anzugeben die Anzahl aller möglichen Fälle, und die Anzahl aller günstigen Fälle. Letztere durch die erstere dividirt gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Anzahl aller Amben, die sich aus den n Zahlen construiren lässt, ist $\binom{n}{2}$; denn auf so viele verschiedene Arten als die Zahl $\binom{n}{2}$ anzeigt, lassen sich 2 Nummern aus n Nummern ziehen. Günstig sind alle jene Amben, bei welchen das Element 1 mit erscheint, also die Amben

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ \ldots\ 1n$$

Die Anzahl dieser Amben ist $n-1$; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$$

und das ist gleich

$$\frac{2}{n}$$

Aufgabe 9. In einer Urne seien n Kugeln, numerirt mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... n. Aus dieser Urne werden 2 Kugeln gezogen. Ich besitze die beiden Lose Nr. 1. und Nr. 2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los Nr. 1. gezogen wird, oder dass das Los Nr. 2. gezogen wird, oder dass beide Lose Nr. 1. und Nr. 2. gezogen werden?

Auflösung. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist wieder $\binom{n}{2}$. Die Anzahl der günstigen Fälle lässt sich leicht angeben. Man muss nämlich alle jene Amben der n Elemente aufstellen, in denen die beiden Elemente vorkommen. Diese sind:

$$\begin{array}{l} 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \ldots\ 1n \\ \quad\ \ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ \ldots\ 2n \end{array}$$

Die Anzahl aller dieser Amben ist $(n-1)+(n-2)$ also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{(n-1)+(n-2)}{\binom{n}{2}} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}.$$

Aufgabe 10. In einer Urne seien n Nummern. Aus dieser Urne werden 2 Nummern gezogen. Ich besitze m Lose. Wie gross

Ternen-Nr.		Ternen-Nr.		Ternen-Nr.		Ternen-Nr.	
1	123	22 . . .	159	43 . . .	259	64	389
2	124	23	167	44	267	65	456
3	125	24	168	45	268	66	457
4	126	25 . . .	169	46 . . .	269	67	458
5	127	26	178	47	278	68	459
6	128	27	179	48	279	69	467
7 . . .	129	28	189	49	289	70	468
8	134	29	234	50	345	71	469
9	135	30	235	51	346	72	478
10	136	31	236	52	347	73	479
11	137	32	237	53	348	74	489
12	138	33	238	54 . . .	349	75	567
13 . . .	139	34 . . .	239	55	356	76	568
14	145	35	245	56	357	77	569
15	146	36	246	57	358	78	578
16	147	37	247	58 . . .	359	79	579
17	148	38	248	59	367	80	589
18 . . .	149	39 . . .	249	60	368	81	678
19	156	40	256	61	369	82	679
20	157	41	257	62	378	83	689
21	158	42	258	63	379	84	789

Und nun sieht man aus diesem Tableau, dass die Anzahl sämmtlicher Ternen 84 ist, dass ferner das Element 1 so oft vorkömmt, und den ersten Platz jeder Terne einnimmt, als sich aus den 8 Elementen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Amben bilden lassen; d. i. 28mal. Lässt man die ersten 28 Ternen dieses Tableau's weg und zählt man ab die Anzahl der Ternen, in welchen das Element 2 vorkömmt, so sieht man, dass das Element 2 in 21 Ternen erscheint, d. i. in soviel Ternen, als sich aus den 7 Elementen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Amben bilden lassen, und bei diesen Ternen nimmt die Zahl 2 stets den ersten Platz ein. Lässt man nun auch diese 21 Ternen weg, so kommen dann eine Anzahl von Ternen, in denen den ersten Platz das Element 3 einnimmt. Die Anzahl dieser Ternen ist gleich der Anzahl der Amben, die sich aus den 6 Elementen 4, 5, 6, 7, 8, 9 bilden lassen, u. s. f.

Hieraus sieht man auch, dass

$$\binom{9}{3}=\binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$$

ist, nämlich die Anzahl sämmtlicher Ternen, die sich aus den 9 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 construiren lassen, ist gleich der Summe sämmtlicher Amben, die sich aus 8 Elementen, dann aus 7 Elementen, dann aus 6 Elementen etc. construiren lassen. Auf gleiche Weise findet man, dass

$$\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

ist.

Kommen wir nun wieder zu unserer Aufgabe zurück. Construirt man sämmtliche Ternen, und schreibt selbe in geregelter Ordnung auf, so findet man, dass das Element 1 so oft den ersten Platz einnimmt, als sich aus den $n-1$ Elementen 2, 3, 4 ... n Amben construiren lassen, d. i. $\binom{n-1}{2}$mal, sucht man dann, wie oft das Element 2 den ersten Platz einnimmt, so findet man, dass dies so oft geschieht, als sich aus den $n-2$ Elementen 3, 4, 5, 6 ... n Amben construiren lassen, d. i. $\binom{n-2}{2}$mal, es sind demnach die Anzahl aller günstigen Fälle, d. h. die Anzahl aller Ternen, in welchen die beiden Elemente 1 und 2 vorkommen

$$\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2}$$

somit ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Lotterie, die aus n Nummern besteht, aus welchen 3 Nummern gezogen werden, mit 2 Losen zu gewinnen:

$$w_2 = \frac{\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2}}{\binom{n}{3}}$$

auf gleiche Weise findet man, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen bei einer aus n Nummern bestehenden Lotterie, aus welchen 3 Nummern gezogen werden, wenn man 3 Lose dieser Lotterie besitzt, gleich ist:

$$w_3 = \frac{\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2}}{\binom{n}{3}}$$

Ebenso findet man, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen bei einer aus n Nummern bestehenden Lotterie, aus welchen 3 Nummern gezogen werden, wenn man m Lose dieser Lotterie besitzt, gleich ist:

$$w_m = \frac{\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{n-m}{2}}{\binom{n}{3}}$$

Aufgabe 13. In einer Urne seien n Nummern. Aus dieser Urne werden r Nummern gezogen. Ich besitze m Lose. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne?

Antwort. Es ist

$$w_m = \frac{\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\cdots+\binom{n-m}{r-1}}{\binom{n}{r}} \qquad (1)$$

Beispiel 1. Jemand gibt 90 Lose aus, und lässt sich für jedes Los eine Mark zahlen. 5 Lose werden gezogen, und jedes gezogene Los wird mit 18 Mark eingelöst.

Besitze ich ein Los, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne

$$w_1 = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

Besitze ich 2 Lose, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne, nicht doppelt so gross, wie früher, sondern:

$$w_2 = \frac{\binom{89}{4}+\binom{88}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{29}{267}$$

Besitze ich 3 Lose, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne

$$w_3 = \frac{\binom{89}{4}+\binom{88}{4}+\binom{87}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1871}{11748}$$

Besitze ich 4 Lose, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne

$$w_4 = \frac{\binom{89}{4}+\binom{88}{4}+\binom{87}{4}+\binom{86}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{106081}{511038} \quad \text{u. s. f.}$$

Besitze ich 11 Lose, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne

$$w_{11} = \frac{648841}{1,331796} = 0\cdot48719 \ldots$$

Besitze ich 12 Lose, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne

$$w_{12} = \frac{3,806363}{7,324878} = 0\cdot51964 \ldots$$

es ist also in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen grösser als die Wahrscheinlichkeit zu verlieren.

Beispiel 2. Am 15. Januar 1879 waren von dem Prämien-Anlehen der Stadt Wien noch 2772 Serien unverlost. Bei der nächsten am 1. April 1879 stattfindenden Ziehung werden 12 Serien-Nummern verlost. Jedes Los, dessen Serien-Nummer gezogen wird, gewinnt. Ich besitze 1, 2, 3, 4 ... Lose, welche alle verschiedene Serien-Nummern haben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich gewinne?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Lose zu gewinnen ist:

$$w_1 = \frac{\binom{2771}{11}}{\binom{2772}{12}} = \frac{1}{231} = 0\cdot00432 \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit mit 2 Losen zu gewinnen ist:

$$w_2 = \frac{\binom{2771}{11} + \binom{2770}{11}}{\binom{2772}{12}} = 12 . \frac{2771 + 2760}{2772 . 2771} = \frac{5531}{231 . 2771} = 0\cdot00864 \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit mit 3 Losen zu gewinnen ist:

$$w_3 = \frac{\binom{2771}{11} + \binom{2770}{11} + \binom{2769}{11}}{\binom{2772}{12}}$$

$$= 12 . \frac{2771.2770 + 2770.2760 + 2760.2759}{2772.2771.2770} = \frac{327653}{25,329711} = 0\cdot01293 \ldots$$

etc. Man sieht schon hieraus, wie complicirt solche Rechnungen werden, wenn eine nur einigermassen grosse Anzahl von Losen in Betracht kommt.

Beispiel 3. Am 15. Januar 1879 waren von dem Prämien-Anlehen der Stadt Wien noch 2772 Serien unverlost. Am 1. April 1879 werden 12 Serien-Nummern und am 1. Juli 1879 abermals 12 Serien-Nummern gezogen. Ich besitze 1, 2, 3, 4 ... Lose von verschiedenen Serien-Nummern. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich bei den beiden nächsten Ziehungen gewinne?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Lose zu gewinnen ist:

$$w_1 = \frac{\binom{2771}{23}}{\binom{2772}{24}} = \frac{2}{231} = 0{\cdot}00865 \ldots$$

und ist somit doppelt so gross, wie in dem vorhergehenden Beispiele. — Die Wahrscheinlichkeit mit 2 Losen zu gewinnen ist:

$$w_2 = \frac{\binom{2771}{23} + \binom{2770}{23}}{\binom{2772}{24}} = 24 . \frac{2771 + 2748}{2772 . 1771} = \frac{11038}{640101} = 0{\cdot}01724 \ldots$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist nicht doppelt so gross, wie die im vorhergehenden Beispiele gefundene Zahl w_2.

Die Wahrscheinlichkeit mit 3 Losen zu gewinnen ist:

$$w_3 = \frac{\binom{2771}{23} + \binom{2770}{23} + \binom{2769}{23}}{\binom{2772}{24}}$$

$$= 24 . \frac{2771 . 2770 + 2770 . 2748 + 2748 . 2747}{2772 . 2771 . 2770} = \frac{22,836386}{886,539885} = 0{\cdot}02575 \ldots,$$

Auch diese Wahrscheinlichkeit ist nicht doppelt so gross, wie die im vorhergehenden Beispiele gefundene Zahl w_3.

Aufgabe 14. In der vorhergehenden Aufgabe fanden wir für w_m folgenden Ausdruck:

$$w_m = \frac{\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \ldots + \binom{n-m}{r-1}}{\binom{n}{r}} \qquad (1)$$

Dieser Ausdruck ist, falls m, n und r ziemlich grosse Zahlen sind, äusserst beschwerlich auszurechnen, wir wollen daher diesen Ausdruck transformiren.

Setzen wir

$$w_m = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_m$$

so ist

$$A_1 = \frac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

$$A_2 = \frac{\binom{n-2}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

. . . . . .

$$A_m = \frac{\binom{n-m}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

und man hat

$$A_1 = \frac{r}{n}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{n-r}{n-1}$$

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{n-r-1}{n-2}$$

$$\frac{A_4}{A_3} = \frac{n-r-2}{n-3}$$

. . . .

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{n-r-m+2}{n-m+1}$$

folglich ist:

$$A_1 = \frac{r}{n}$$

$$A_2 = \frac{n-r}{n-1} \cdot A_1$$

$$A_3 = \frac{n-r-1}{n-2} \cdot A_2$$

$$A_4 = \frac{n-r-2}{n-3} \cdot A_3$$

. . . .

$$A_m = \frac{n-r-m+2}{n-m+1} \cdot A_{m-1}$$



und hieraus folgt weiter

$$w_m = \frac{r}{n} + \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n-1} + \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n-1} \cdot \frac{n-r-1}{n-2} + \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n-1} \cdot \frac{n-r-1}{n-2} \cdot \frac{n-r-2}{n-3} + \dots$$

$$+ \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n-1} \cdot \frac{n-r-1}{n-2} \cdot \frac{n-r-2}{n-3} \cdots \frac{n-r-m+2}{n-m+1} \qquad (2)$$

Beispiel. Ist $n = 2772$, $r = 12$, $m = 3$ (wie im Beispiele 2 der vorhergehenden Aufgabe) so ist:

$$w_3 = \frac{12}{2772} + \frac{12}{2772} \cdot \frac{2760}{2771} + \frac{12}{2772} \cdot \frac{2760}{2771} \cdot \frac{2759}{2770}$$

oder kürzer

$$w_3 = \frac{1}{231}\left[1 + \frac{2760}{2771} + \frac{2760}{2771} \cdot \frac{2759}{2770}\right].$$

$$w_3 = \frac{1}{231}[1 + 0\cdot996030 \dots + 0\cdot992074 \dots]$$

$$w_3 = \frac{2\cdot988104 \dots}{231} = 0\cdot01293 \dots$$

Auch die Formel (2) ist noch sehr complicirt, sie enthält m Gliede, die langsam abnehmen. Wir wollen daher die Formel (1) noch auf andere Weise transformiren. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass der Zähler der Formel (1) eine arithmetische Reihe der $r-1$ten Ordnung ist. Wird diese summirt, so findet man:

$$w_m = \frac{\binom{m}{1}\binom{n-1}{r-1} - \binom{m}{2}\binom{n-2}{r-2} + \binom{m}{3}\binom{n-3}{r-3} - \binom{m}{4}\binom{n-4}{r-4} + \dots}{\binom{n}{r}} \qquad (3)$$

Diese Reihe lässt sich auch so schreiben:

$$w_m = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + \dots$$

woselbst:

$$B_1 = \frac{\binom{m}{1}\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

$$B_2 = \frac{\binom{m}{2}\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n}{r}}$$

$$B_3 = \frac{\binom{m}{3}\binom{n-3}{r-3}}{\binom{n}{r}}$$

$$B_4 = \frac{\binom{m}{4}\binom{n-4}{r-4}}{\binom{n}{r}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ist. Nun hat man:

$$B_1 = \frac{mr}{n}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{r-1}{n-1}$$

$$\frac{B_3}{B_2} = \frac{m-2}{3} \cdot \frac{r-2}{n-2}$$

$$\frac{B_4}{B_3} = \frac{m-3}{4} \cdot \frac{r-3}{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

folglich ist:

$$w_m = \frac{mr}{n}\left[1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{r-1}{n-1} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{r-1}{n-1} \cdot \frac{r-2}{n-2} \right.$$
$$\left. - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{r-1}{n-1} \cdot \frac{r-2}{n-2} \cdot \frac{r-3}{n-3} + \cdots\right] \quad (4)$$

und diese Formel ist äusserst bequem für die Berechnung. Setzt man in dieselbe

$$w_m = \tfrac{1}{2}$$

und sucht man dann aus derselben das m, so findet man die Anzahl der Lose, die man haben muss, um bei einer aus n Nummern bestehenden Lotterie, bei welcher r Nummern gezogen werden, wahrscheinlich zu gewinnen.

Aufgabe 15. Am 15. Januar 1879 waren von dem Prämien-Anlehen der Stadt Wien noch 2772 Serien-Nummern unverlost. Bei der nächsten Ziehung werden 12 Nummern gezogen. Wieviel Lose dieses Anlehens (mit verschiedenen Serien-Nummern) muss man besitzen, um wahrscheinlich zu gewinnen?

Um diese Aufgabe zu lösen, hat man in den bis-

her aufgestellten Formeln $w_m = \frac{1}{2}$, $n = 2772$, $r = 12$ zu setzen; und dann m zu suchen. Aus der Gleichung (4) folgt:

$$\frac{1}{2} = \frac{m}{231}\left[1 - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{11}{2771} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{11}{2771} \cdot \frac{10}{2770} \right.$$
$$\left. - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{11}{2771} \cdot \frac{10}{2770} \cdot \frac{9}{2769} + \dots \right] \qquad (5)$$

und es ist hiebei zu bemerken, dass der 2. Teil dieser Gleichung aus 12 Gliedern besteht, und nach m vom 12ten Grade ist. Da nach dem frühern die Wahrscheinlichkeit mit einem Lose zu gewinnen $\frac{1}{231}$ ist, ferner die Wahrscheinlichkeit mit 2 Losen zu gewinnen kleiner ist als $\frac{2}{231}$, die Wahrscheinlichkeit mit 3 Losen zu gewinnen kleiner ist als $\frac{3}{231}$ u. s. f. so ist klar, dass m grösser sein muss als 115; versuchen wir daher in (5)

$$m = 116$$

zu setzen, so wird der 2. Teil der Gleichung (5) sein:

$$\frac{116}{231}\left[1 - \frac{115}{2} \cdot \frac{11}{2771} + \frac{115.114}{2.3} \cdot \frac{11.10}{2771.2770} \right.$$
$$\left. - \frac{115.114.113}{2.\ 3\ .\ 4} \cdot \frac{11.\ 10\ .\ 9}{2771.2770.2769} + \dots \right]$$

oder, wenn man die Rechnung in 6 Decimalen führt:

$$\frac{116}{231}[1 - 0\cdot228257 + 0\cdot031313 - 0\cdot002875 + 0\cdot000187 - 0\cdot000009]$$
$$= \frac{116}{231} \cdot 0\cdot800359 = 0\cdot401912$$

Wir sehen hieraus, dass die Wahrscheinlichkeit mit 116 Losen zu gewinnen, blos 0·401912 ist; wir sind daher genöthigt für m eine grössere Zahl als 116 anzunehmen.

Aus der Gleichung (1) folgen:

$$w_{116} = \frac{\binom{2771}{11} + \binom{2770}{11} + \binom{2769}{11} + \dots + \binom{2656}{11}}{\binom{2772}{12}}$$

und

$$w_{117} = w_{116} + \frac{\binom{2655}{11}}{\binom{2772}{12}}$$

Nun ist:

$$\frac{\binom{2655}{11}}{\binom{2772}{12}} = 12 \cdot \frac{2655.2654.2653 \ldots 2645.}{2772.2771.2770 \ldots 2762.2761}$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\binom{2655}{11}}{\binom{2772}{12}} = 0 \cdot 0027022 \ldots$$

Man sieht hieraus, dass, wenn die Anzahl der Lose von 116 auf 117 steigt, die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, um 0·0027022 ... wächst; man muss daher mindestens um 36 Lose mehr rechnen, wenn man haben will, dass die Wahrscheinlichkeit um 0·098088 ... wachsen soll; denn wenn die für 116 Lose statthabende Wahrscheinlichkeit um 0·098088 ... wächst, ist sie genau $\frac{1}{2}$.

Setzen wir daher im 2ten Teile der Gleichung (5)

$$m = 152$$

so erhält man:

$$\frac{152}{231}\left[1 - \frac{151}{2} \cdot \frac{11}{2771} + \frac{151.150}{2.\ 3} \cdot \frac{11.10}{2771.2770} - \frac{151.150.149}{2.\ 3\ .\ 4} \cdot \frac{11.10.9}{2771.2770.2769} + \ldots\right]$$

oder in 6 Decimalen berechnet:

$$\frac{152}{231}[1 - 0 \cdot 299711 + 0 \cdot 054099 - 0 \cdot 006550 + 0 \cdot 000560 - 0 \cdot 000035$$

$$+ 0 \cdot 000002] = \frac{152}{231} \cdot 0 \cdot 748365 = 0 \cdot 492430 \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit 152 Losen zu gewinnen, ist demnach schon sehr nahe $\frac{1}{2}$; nimmt man um 1 Los mehr, so wächst dadurch die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen um

$$\frac{\binom{2619}{11}}{\binom{2772}{12}}$$

Dies ist gleich:

$$12 . \frac{2619 . 2618 . 2617 \ldots 2609}{2772 . 2771 . 2770 \ldots 2767 . 2761}$$

oder

$$0 \cdot 0023247 \ldots$$

Man sieht hieraus, dass, wenn die Anzahl der Lose von 152 auf 153 steigt, die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, um 0·0023247 ... wächst, man muss daher mindestens um 3 Lose mehr nehmen, wenn man haben will, dass die Wahrscheinlichkeit um 0·007570 ... wachsen soll, denn wenn die für 152 Lose statthabende Wahrscheinlichkeit um 0·007570 wächst ... wächst, so ist sie genau $\frac{1}{2}$.

Setzen wir daher im 2ten Teile der Gleichung (5)

$$m = 155$$

so erhält man:

$$\frac{155}{231}\left[1 - \frac{154}{2} \cdot \frac{11}{2771} + \frac{154 . 153}{2 . 3} \cdot \frac{11 . 10}{2771 . 2770} - \frac{154 . 152 . 152}{2 . 3 . 4} \cdot \frac{11 . 10 . 9}{2771 . 2770 . 2769} + \ldots\right]$$

oder in 6 Decimalen berechnet:

$$\frac{155}{231}[1 - 0 \cdot 305666 + 0 \cdot 056278 - 0 \cdot 006951 + 0 \cdot 000607 - 0 \cdot 000038$$

$$+ 0 \cdot 000002] = \frac{155}{231} . 0 \cdot 744232 \ldots = 0 \cdot 499376 \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit mit 155 Losen zu gewinnen ist demnach schon äusserst nahe gleich $\frac{1}{2}$; versuchen wir daher zum Schlusse noch

$$m = 156$$

zu setzen, so erhält man aus der Gleichung (5)

$$\frac{156}{231}\left[1 - \frac{155}{2} \cdot \frac{11}{2771} + \frac{155 . 154}{2 . 3} \cdot \frac{11 . 10}{2771 . 2770}\right]$$

$$= \frac{156}{231}[1 - 0 \cdot 307651 + 0 \cdot 057014 - 0 \cdot 007088 + 0 \cdot 000623 - 0 \cdot 000040$$

$$+ 0 \cdot 000002] = \frac{156}{231} . 0 \cdot 742860 = 0 \cdot 50167 \ldots$$

Besteht daher eine Lotterie aus 2772 Nummern, werden hieraus 12 Nummern mit Treffer gezogen, so ist es wahrscheinlich, dass derjenige, der 156 Lose dieser Anleihe besitzt, mindestens mit einem seiner Lose gezogen wird.

X.

Miscellen.

1.

Sur un théorème concernant les séries trigonométriques.

Dans le tome 72 du journal de Crelle, M. Cantor démontre le théorème suivant:

„Si une série trigonométrique

(1) $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$

„est convergente pour toutes les valeurs de x comprises dans un „certain intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, les coefficients a_n et b_n tendent sur 0 „quand n augmente indéfiniment.“

La démonstration de M. Cantor étant assez longue je pense qu'on ne verra pas sans intérêt une démonstration plus simple de cet important théorème. La série (1) étant convergente pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, le terme général

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

tend vers 0 quand n augmente indéfiniment pour toutes ces valeurs de x. Appelons B_n la plus grande valeur absolue que prend A_n lorsque x varie de α à β; cette valeur B_n tend également sur 0 quand n augmente indéfiniment. On peut donc déterminer un entier m tel que pour $n = m$ et pour $n > m$ la valeur de B_n soit plus petite qu'un nombre E si petit qu'il soit

$$B_n < E \qquad (n \overline{\gtrless} m)$$

Soit alors x une valeur déterminée quelconque prise dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$; on a en valeur absolue

(2) $$a_n \cos nx + b_n \sin nx < E \qquad (n \geqq m)$$

puisque la valeur absolue de A_n est au plus égale à B_n. En outre, on peut toujours supposer m assez grand pour que la valeur $x + \frac{\pi}{2m}$ soit comprise dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$; la valeur $x + \frac{\pi}{2n}$ $(n \geqq m)$ est alors aussi comprise dans l'intervalle, et on a

$$a_n \cos n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) + b_n \sin n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) < E$$

ou bien

(3) $$-a_n \sin nx + b_n \cos nx < E \qquad (n \geqq m)$$

Elevant au carré les deux membres des inégalités (2) et (3) et ajoutant membre à membre on a l'inégalité

$$a_n^2 + b_n^2 < 2E^2 \qquad (n \geqq m)$$

Comme E est aussi petit qu'on le veut, cette dernière inégalité montre que a_n et b_n doivent tendre séparément vers 0 quand n augmente indéfiniment.

P. Appell.

2.

Freier Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche.

Betrachtet man die Erde als ein homogenes Rotationsellipsoid, so sind die Componenten ihrer Anziehung auf die Masseneinheit auf der Oberfläche oder im Innern proportional den Coordinaten des angezogenen Punktes, und zwar $\varkappa^2 x$, $\varkappa^2 y$, $\lambda^2 z$, wenn wir den Mittelpunkt zum Anfangspunkt, die Erdaxe zur Axe der z nehmen, also die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \varkappa^2 x = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varkappa^2 y = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \lambda^2 z = 0 \qquad (1)$$

Ein Punkt auf der Oberfläche in der Breite β, sei zur Zeit $t = 0$ abgelöst und der Anziehung überlassen. Die x Axe gehe durch seinen anfänglichen Meridian; a sei Radius des Aequators, b halbe Erdaxe. Dann sind die anfänglichen Werte von x, y, z:

$$\frac{a^2 \cos\beta}{r}, \quad 0, \quad \frac{b^2 \sin\beta}{r}, \quad \text{wo } r = \sqrt{a^2 \cos^2\beta + b^2 \sin^2\beta}$$

und, wenn μ die Rotationsgeschwindigkeit der Erde bezeichnet, die anfänglichen Componenten der Geschwindigkeit:

$$0,\quad \frac{\mu a^2 \cos\beta}{r},\quad 0$$

Entsprechend diesen äussern Bedingungen sind die Integrale der einzelnen Gl. (1):

$$x = \frac{a^2\cos\beta}{r}\cos\varkappa t;\quad y = \frac{\mu a^2\cos\beta}{\varkappa r}\sin\varkappa t;\quad z = \frac{b^2\sin\beta}{r}\cos\lambda t \qquad (2)$$

Die absolute Bahn ist demnach im allgemeinen eine doppelt gekrümmte, transcendente Linie, die einen elliptischen Cylinder vom Axenverhältniss $\varkappa:\mu$ umwindet, während sie periodisch in axialer Richtung zwischen 2 Grenzen auf und ab geht.

Wir betrachten nun die Bahn relativ zur Erde. Das System der $x_1y_1z_1$, anfangs mit dem xyz zusammenfallend, rotire mit der Erde. Dann sind die Relationen der Coordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\mu t + y\sin\mu t \\ y_1 &= -x\sin\mu t + y\cos\mu t \\ z_1 &= z \end{aligned}$$

also die Bahngleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2\cos\beta}{r}\left(\cos\varkappa t\cos\mu t + \frac{\mu}{\varkappa}\sin\varkappa t\sin\mu t\right) \\ y_1 &= \frac{a^2\cos\beta}{r}\left(-\cos\varkappa t\sin\mu t + \frac{\mu}{\varkappa}\sin\varkappa t\cos\mu t\right) \\ z_1 &= \frac{b^2\sin\beta}{r}\cos\lambda t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hieraus berechnet, werden für $t = 0$ die Richtungscosinus

der Tangente	$-\cos\beta$,	0,	$-\sin\beta$
der Hauptnormale	0,	1,	0
der Binormale	$\sin\beta$,	0,	$-\cos\beta$

Nimmt man diese 3 Geraden der Reihe nach zu Axen der x_2, y_2, z_2, so werden die Relationen der Coordinaten:

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(\frac{a^2\cos\beta}{r} - x_1\right)\cos\beta + \left(\frac{b^2\sin\beta}{r} - z_1\right)\sin\beta \\ y_2 &= y_1 \\ z_2 &= -\left(\frac{a^2\cos\beta}{r} - x_1\right)\sin\beta + \left(\frac{b^2\sin\beta}{r} - z_1\right)\cos\beta \end{aligned}$$

das untere giebt keine Bestimmung für t_1; daher hat ein Knotenpunkt die Coordinaten:

$$x = (-1)^k \frac{a^2 \cos\beta}{r} \cos\frac{2l\varkappa R}{\lambda}; \quad y = (-1)^k \frac{\mu a^2 \cos\beta}{\varkappa r} \sin\frac{2l\varkappa R}{\lambda}$$

$$z = (-1)^l \frac{b^2 \sin\beta}{r} \cos\frac{2k\lambda R}{\varkappa} \tag{10}$$

Fragen wir weiter: In welchem Abstande geht die Bahn am Mittelpunkte vorbei? Der Radiusvector zur Zeit t für die anfängliche Breite β sei $r(\beta, t)$; dann ist

$$r^2(\beta, t) = \frac{a^4 \cos^2\beta\left(1 - \frac{\varkappa^2 - \mu^2}{\varkappa^2} \sin^2\varkappa t\right) + b^4 \sin^2\beta \cos^2\lambda t}{a^2 \cos^2\beta + b^2 \sin^2\beta} \tag{11}$$

Den Maximis und Minimis bei constantem β entspricht die Bedingung:

$$T = \frac{\varkappa}{\lambda} \frac{\sin 2\lambda t}{\sin 2\varkappa t} = -\frac{a^2}{b^2} \cot^2\beta \tag{12}$$

Da λ wenig grösser als $\varkappa$, so kann, wenn nicht t sehr gross ist, T nur negativ werden, wo eine ganze Anzahl Rechte zwischen $\varkappa t$ und λt enthalten ist, so dass, wenn k eine ganze Zahl,

$$\varkappa t < kR < \lambda t$$

Da ferner von $t = 0$ an der Radiusvector abnimmt, so folgt, dass er für ungerade k seine Minima, für gerade k seine Maxima hat.

Um Gl. (12) approximativ aufzulösen, setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \varkappa t &= kR - \varkappa\varphi \\ \lambda t &= kR + \lambda(\nu - \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

wo

$$\nu = k \frac{\lambda - \varkappa}{\varkappa\lambda} R$$

dann wird Gl. (12):

$$T\varphi(1 - \tfrac{2}{3}\varkappa^2\varphi^2 + \ldots) + (\nu - \varphi)[1 - \tfrac{2}{3}\lambda^2(\nu - \varphi)^2 + \ldots] = 0$$

woraus in umgekehrter Entwickelung:

$$\varphi = \frac{\nu}{1 - T}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\nu^2 T \frac{T^2\lambda^2 - \varkappa^2}{(1 - T)^3} + \ldots\right\} \tag{14}$$

Nun ist, wenn

$$b = a \cos\alpha$$

gesetzt wird,

$$0 < \lambda - \varkappa < \lambda - \sqrt{\varkappa^2 - \mu^2} = \lambda \frac{a - b}{a} = 2\lambda \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

also

$$0 < \nu\varkappa < 4k\mathrm{R}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

Demnach sind $\nu\varkappa$, $\nu\lambda$ kleine Grössen von der Ordnung α^2; von gleicher Ordnung sind dann auch $\varkappa\varphi$, $\lambda\varphi$, ferner für gerade k auch $\sin\varkappa t$, $\sin\lambda t$, und, solange Terme mit dem Factor α^6 nicht in Rechnung kommen,

$$\varphi = \frac{\nu}{1-T}$$

Gegenwärtig ist

$$1-T = 1+\frac{\cot^2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta}$$

also

$$\varphi = \nu\sin^2\beta(1-\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\beta+\ldots)$$

Das Minimum des Radiusvectors wird nun:

$$r(\beta, t_\beta) = \frac{a\mu}{\varkappa}\cos\beta(1+\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha\sin^2\beta+\ldots) \tag{15}$$

am grössten auf dem Aequator:

$$r(0, t_0) = \frac{a\mu}{\varkappa}$$

In den Punkten grösster Radienvectoren,

$$r(\beta, t_\beta) = a(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\alpha\sin^2\beta+\ldots)$$

kommt die Bahn der Oberfläche stets nahe, doch nicht am nächsten. Bedingung des kleinsten Abstandes δ von der Oberfläche ist, dass die auf die Meridianebene projicirte Tangente der Bahn der Tangente des Meridians im Fusspunkte der Normale zur Oberfläche parallel sei. Bezeichnet γ die Breite des Fusspunkts, $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ den Abstand von der Axe, der Index 0 die Werte der topischen Grössen für den Fusspunkt, so sind die Bedingungen der Parallelität und der normalen Richtung:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = -\frac{\partial\varrho}{\partial z}; \qquad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{z_0-z}{\varrho_0-\varrho} \tag{16}$$

woraus:

$$\varrho_0\partial\varrho+z_0\partial z = \varrho\partial\varrho+z\partial z \tag{17}$$

Da

$$\varrho_0 = \frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\gamma}}; \qquad z_0 = \frac{a\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\gamma}}$$

ist, so erhält man nach Elimination von γ:

$$\varrho\partial\varrho+z\partial z = \frac{a\partial\varrho\sin^2\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\cos\alpha\right)^2}} \tag{18}$$

eine Gleichung welche zeigt, dass der Radiusvector $\sqrt{\varrho^2+z^2}$ bei grösster Nähe der Oberfläche noch um ein Geringes variirt und zwar in gleichem Sinne mit ϱ.

Führt man für $\partial\varrho$, ∂z ihre Werte aus (2) ein, so kommt, nach Division durch $\varrho\,\partial\varrho$:

$$1+T\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta=\frac{a\sin^2\alpha}{\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{z}{T\cos\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}\right)^2}} \tag{19}$$

Bis auf eine Differenz von der Ordnung α^{10} genügt dieser Gleichung der Wert:

$$T=-\cot^2\beta(1-\tfrac{1}{2}\lambda^2\nu^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta) \tag{20}$$

woraus nach der allgemeingültigen Gl. (14):

$$\varphi=\nu\sin^2\beta\{1+\tfrac{2}{3}\nu^2\cos^2\beta[\varkappa^2\sin^4\beta-\lambda^2\cos^2\beta(\cos^2\beta-\tfrac{3}{4}\sin^2\alpha\sin^2\beta)]\} \tag{21}$$

Durch Differentiation der Gl. (2) ergiebt sich:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial z}=\frac{\cot\beta}{T}\frac{\cos\lambda t}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\cos^2\alpha\sin^2\varkappa t}}=\pm\frac{\cot\beta}{T}\left\{1-\tfrac{1}{2}\lambda^2\left[(\nu-\varphi)^2-\varphi^2\cos^2\alpha\right]\right\}$$

daher ist nach (16), wenn man auch die Werte (20) (21) anwendet,

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\pm\,\mathrm{tg}\,\beta\left\{1-\frac{\lambda^2\nu^2}{2}\cos2\beta(1-\sin^2\alpha\sin^2\beta)\right\} \tag{22}$$

Durch φ sind nun nach (13) und (2) ϱ und z, durch γ die Grössen

$$\varrho_0=\frac{a^2\cos\gamma}{\sqrt{a^2\cos^2\gamma+b^2\sin^2\gamma}};\quad z_0=\frac{b^2\sin\gamma}{\sqrt{a^2\cos^2\gamma+b^2\sin^2\gamma}}$$

bekannt, und durch diese der kleinste Abstand von der Oberfläche

$$\delta=\frac{\varrho_0-\varrho}{\cos\gamma}=\frac{z_0-z}{\sin\gamma}$$

Beide Ausdrücke geben übereinstimmend:

$$\delta=\frac{a^2}{r}\frac{\lambda^2\nu^2}{2}\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta \tag{23}$$

In Gl. (22) gilt das obere Zeichen für gerade, das untere für ungerade $\frac{1}{2}k$. Sie zeigt, dass der fallende Körper nach Reflexion am Gegenpunkt der Erde weiter nördlich oder weiter südlich wiederkommt, jenachdem er nördlich oder südlich vom nördlichen Parallelkreise $\frac{1}{2}$R ausgegangen ist.

Die Berechnung giebt nun Anlass zu einigen Fragen. Setzt man $4k$ statt k, so zählt k die Rückkünfte des fallenden Körpers nach Reflexion am Gegenpunkte der Erde. In der Zwischenzeit

$$t = \frac{4k\mathrm{R}}{\varkappa} - \varphi$$

ist der Ausgangspunkt um

$$\mu t = \frac{4k\mu\mathrm{R}}{\varkappa} - \mu\varphi$$

nach Osten gerückt. Bezeichnet η die Länge der Projection des Körpers auf die Oberfläche zur Zeit der grössten Nähe vom anfänglichen Meridian an gerechnet nach Osten, so ist

$$x = \varrho\cos(\eta + \mu t);\quad y = \varrho\sin(\eta + \mu t)$$

also nach (2)

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}(\eta + \mu t) &= \frac{\mu}{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,\varkappa t = -\frac{\mu}{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,\varkappa\varphi \\ &= -\mathrm{tg}\left\{\mu\varphi\left(1 + \frac{\varkappa^2 - \mu^2}{3}\varphi^2 + \ldots\right)\right\} \end{aligned}$$

folglich nach (13) (21)

$$\eta = -\frac{4k\mu\mathrm{R}}{\varkappa} - \tfrac{1}{3}\mu(\varkappa^2 - \mu^2)\nu^3\sin^6\beta - \ldots \tag{24}$$

Die Zunahme der Breite beträgt:

$$\gamma - \beta = -\tfrac{1}{8}\lambda^2\nu^2\sin 4\beta(1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta) \tag{25}$$

bis auf eine Differenz von der Ordnung α^8. Nach (24) kommt der Körper stets ein beträchtliches weiter in Westen zurück.

Aus den Gl. (3) ergiebt sich die Geschwindigkeit relativ zur Erde:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = \frac{a^2}{r}(\varkappa^2 - \mu^2)\nu\sin\beta\cos\beta \tag{26}$$

und die Richtungscosinus der relativen Bahn:

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \sin\beta\cos\mu t;\quad \frac{\partial y_1}{\partial s_1} = -\sin\beta\sin\mu t;\quad \frac{\partial z_1}{\partial s_1} = -\cos\beta \tag{27}$$

Den numerischen Werten mögen zu Grunde liegen die der Halbaxen des Meridians in Meter

$$\log a = 6{,}80464;\quad \log b = 6{,}80319$$

die der Schwerkraft bei $\beta = \frac{1}{2}\mathrm{R}$ in Meter und Secunden

$$\frac{(\varkappa^2 - \mu^2)a}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos^2\alpha)}} = 9{,}8059$$

und der Rotationsgeschwindigkeit in Secunden

$$\mu = \frac{R}{21600}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\log(\varkappa^2 - \mu^2) = 4{,}18612 - 10$$
$$\log \varkappa = 7{,}09381 - 10$$
$$\log \lambda = 7{,}09451 - 10$$
$$\log \mu = 5{,}86167 - 10$$

Die Gleichungen der relativen Bahn für Nadir-, Ost- und Süd-Richtung und für $\beta = \frac{1}{2}R$ sind:

$$x_2 = 4{,}9030 t^2 (1 - 0{,}00000\,01292\,3 t^2)$$
$$y_2 = 0{,}00016\,808 t^3$$
$$z_2 = 0{,}00000\,00022\,144 t^4$$
$$s_2 = 4{,}9030 t^2 (1 - 0{,}00000\,01285\,7 t^2)$$

die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale:

$$f_2 = 1 - 0{,}00000\,00013\,221 t^2$$
$$g_2' = 1 - 0{,}00000\,00019\,393 t^2$$
$$n_2 = 1 - 0{,}00000\,00006\,1714 t^2$$
$$h_2' = - m_2 = 0{,}00003\,5132 t$$
$$l_2 = h_2 = 0{,}00000\,00009\,0329 t^2$$
$$g_2 = - f_2' = 0{,}00005\,1422 t$$

der Krümmungs- und Torsionsradius:

$$\frac{\partial s_2}{\partial \tau_2} = 190694 t$$
$$\frac{\partial s_2}{\partial \vartheta_2} = 93038 t$$

die Knoten der absoluten Bahn werden erreicht in den, den Doppelzeichen entsprechenden, in Stunden ausgedrückten Zeiten:

$$0{,}70200 l \pm 0{,}70592 k \qquad (k > 0, \quad l > k)$$

In den folgenden Fragen, deren Resultate wir wieder nur für $\beta = \frac{1}{2}R$ angeben, handelt es sich zunächst um die Werte von ν und φ. Hier ist

$$\log \frac{\nu}{k} = 0{,}31378; \qquad \log \frac{\varphi}{k} = 0{,}01275$$

Die Correction von φ in den Ausdrücken (14) und (21) ist etwas $< 10^{-8}$, daher ohne Anwendung.

Das erste Minimum der Entfernung vom Mittelpunkte findet statt nach 21,077 Minuten und ist

$$= 264801 \text{ Meter}$$

Das zweite Minimum der Entfernung von der Oberfläche, d. i. bei der ersten Rückkunft, wird erreicht nach 1,4051 Stunden und ist

$$\delta = 82{,}050 \text{ Meter}$$

Die Längenzunahme ist hier

$$\eta = -0{,}23438\,\mathrm{R} = -21{,}094 \text{ Grad}$$

die Breitenzunahme, wie Gl. (25) zeigt, $\gamma - \beta = 0$. Der Körper hat, wo er der Oberfläche am nächsten kommt, noch eine relative Geschwindigkeit

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = 40{,}393 \text{ Meter}$$

Die Tangentialrichtung in diesem Punkte bestimmt sich am einfachsten nach Uebergang zum Horizont des gleichzeitigen Ortes (Länge η, Breite γ). Die Gleichungen der Bahn in Bezug auf die neue Nadir-, Ost-, Südrichtung gehen aus (4) durch Substitution von $\mu t + \eta$ und γ für μt und β hervor, wobei jedoch das schon in (3) enthaltene β unverändert bleibt. Durch Differentiation der so gebildeten Coordinaten x_3, y_3, z_3 findet man genau $\partial x_3 = 0$ und in erster Näherung:

$$\partial z_3 : \partial y_3 = 1 : \mu\nu \sin^3\beta$$

beide Variationen positiv. Daher weicht die Tangente von der Südrichtung nach Osten zu um einen Winkel

$$\frac{\mu\nu}{2\sqrt{2}} = 0{,}00013485\,\mathrm{R}$$

ab.

Für andere Breiten β sind einesteils nur die Factoren $\sqrt{2}\sin\beta$, $\sqrt{2}\cos\beta$ hinzuzufügen, wie es die bezüglichen Formeln verlangen, im übrigen aber bedarf es noch kleiner Correctionen von der Form $\varepsilon \cos 2\beta$, welche gleichfalls aus den Formeln leicht zu entnehmen sind.

R. Hoppe.

3.

Beweis eines Satzes über Projectionen.

Herr Professor R. Staudigl hat in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien (math.-naturw. Classe.

LXIV. Bd. II. Abth. 1871.) eine Abhandlung „Ueber die Identität von Constructionen in perspectivischer, schiefer und orthogonaler Projection" abgefasst, welcher folgender, von ihm allererst in allgemeinster Form ausgesprochener Satz zu Grunde liegt:

„Alle Aufgaben der darstellenden Geometrie, bei denen weder ein Längen-, noch ein Winkelmaass in Betracht kommt, also alle Aufgaben, welche der Geometrie der Lage angehören, können auf ganz gleiche Weise, durch ganz dieselben Liniencombinationen sowohl in perspectivischer, wie in schiefer als auch orthogonaler (axonometrischer) Projection gelöst werden."

Der Verfasser gelangt zu diesem interessanten Schlusse, indem er zeigt, dass es für jeden beliebigen Punkt des Raumes unendlich viele, mit einem gegebenen collineare Raumgebilde gibt, welche aus demselben Punkte auf eine gegebene Ebene projicirt, dieselbe Projection liefern, wie das ursprüngliche für ein gegebenes Centrum.

Nachdem der ersterwähnte Punkt auch in unendlicher Ferne gedacht werden kann, ist einleuchtend, dass jede ebene Central- oder Parallelprojection irgend eines Raumgebildes sowohl als eine centrale, als auch eine schiefe oder orthogonale Projection eines mit dem gegebenen collinearen Raumgebildes für irgend ein beliebiges Projectionscentrum betrachtet werden kann.

In den folgenden Zeilen soll ein einfacher Beweis dieses letzteren Satzes geliefert, und einige Bemerkungen, das Wesen der Aufgabe betreffend, beigefügt werden. Bekanntlich genügt es, den Beweis für das einfachste Raumgebilde, für ein Dreieck zu liefern, wie es auch Herr Staudigl in seiner Abhandlung für hinreichend voraussetzte.

Wir denken uns ein Dreieck abc, die Projectionscentra s und ${}^1s$, dann die Projectionsebene E.

Vermittelst der Projectionsstralen $Sa\,Sb\,Sc$ aus s gelangen wir zu der Projection $a'b'c'$.

Durch das Centrum ${}^1s$ und diese Punkte sind nun neue drei Projectionsstralen gegeben, welche laut des zu beweisenden Satzes die Ecken des mit abc collinearen Dreiecks ${}^1a\,{}^1b\,{}^1c$ enthalten sollen. (Bezeichnen wir diese Stralen mit $S^1a\,S^1b\,S^1c$).

Um dasselbe zu finden berücksichtigen wir, dass die Seiten des Dreiecks abc die Projectionsebene in den Punkten mnp einer Geraden G treffen, welche (Punkte) auch den Seiten des Dreiecks $a'b'c'$ angehören müssen. Jede beliebige Ebene des Büschels $G(mnp)$ trifft die Geraden $S^1a\,S^1b\,S^1c$ in drei Punkten ${}^1a\,{}^1b\,{}^1c$, diese bilden ein

Dreieck, dessen Seiten unbedingt die Punkte mnp enthalten. Folglich ist dasselbe mit $a'b'c'$ collinear verwandt, und kann letzteres für die Projection des ersteren aus ${}^1s$ betrachtet werden.

Nun haben aber die Seiten der Dreiecke abc, ${}^1a{}^1b{}^1c$ in der Projectionsebene die Punkte mnp gemein, und sind folglich auch untereinander collinear. Daher müssen die Geraden $G(a^1a)$, $G(b^1b)$, $G(c^1c)$ einen gemeinschaftlichen Punkt, das Centrum ${}^2s$ der Collineation enthalten, was zu beweisen war.

Dass die Projectionsebene zur Collineationsebene wird, bedarf wohl keiner Erwähnung.

Es ist leicht einzusehen, dass nicht nur die Dreiecke abc, ${}^1a{}^1b{}^1c$, sondern die ganzen Systeme $SaSbSc$, $S^1aS^1bS^1c$ einander collinear verwandt sind, für ${}^2s$ als Centrum und E als Collineationsebene, folglich muss die Gerade s^1s das genannte Centrum ${}^2s$ enthalten.

Dass diese Beweisführung auch bei allgemeinen, also nicht ebenen Gebilden beibehalten werden kann, geht aus dem Umstande hervor, dass ein beliebiges Raumgebilde mit seiner ebenen Projection sich im Verhältnisse der Collineation befindet *).

Untersuchen wir näher die besprochene Collinearverwandtschaft, so finden wir, dass dieselbe immer zur Affinität (speciell Symmetrie) werden kann.

Hingegen muss der Fall der Aehnlichkeit (speciell Congruenz) immer ausgeschlossen bleiben, weil derselbe eine unendlich entfernte Collineationsebene erheischt, was unseren Voraussetzungen bezüglich der Projectionsebene widerspricht.

(Dass die Affinität unendliche Male, die Symmetrie aber nur ein Mal eintreffen kann, ist an sich klar.)

Liegt s im $\left\{\begin{matrix}\text{endlichen}\\ \text{unendlichen}\end{matrix}\right\}$ fällt bei der {Affinität, Symmetrie} ${}^2s$ in's unendliche; ${}^1s$ liegt dann in der $\left\{\begin{matrix}\text{endlichen}\\ \text{unendlichen}\end{matrix}\right\}$ Geraden $G(s^2s)$, und ist folglich im $\left\{\begin{matrix}\text{endlichen}\\ \text{unendlichen}\end{matrix}\right\}$ zu suchen.

Kehren wir nun zu der ursprünglichen Bedeutung unserer Aufgabe zurück, dann folgt daraus, dass in diesen Fällen die Projectionen entweder beide central oder beide klinogonal (orthogonal), also immer homogen sein müssen. Aus der Umkehrung folgt dann:

---

*) Das Modul derselben ist dann $\lambda = 0$, also $(sa\mathfrak{g}aa') = 0$, folglich $a\mathfrak{g}a' = 0$, oder $a' = a\mathfrak{g}$.

Sollen die Projectionen anhomogen sein — und dieses dürf
bei der praktischen Auswertung unseres Satzes einige Wichtigk
haben — darf weder der Fall der Affinität, noch der der Symmetr
vorausgesetzt werden, und es bleibt nachher nur der allgemein
Fall — der Collineation — zur Verfügung.

Aus diesem Schlusse geht wieder hervor, dass das Centrum bei anhomogenen Projectionen immer im endlichen zu suchen i
(Natürlich nicht umgekehrt.)

(Dass wir bei vorausgesetztem Originalgebilde, endlichem s und ^2s immer eine unendliche Anzahl von endlichen, und ein einziges unendliches ^1s erhalten, ist einleuchtend.)

Es sei endlich noch erlaubt, an einem Beispiele zu zeigen, wie ratsam es ist, bei Benutzung des Staudigl'schen Satzes die mehrmals besprochene allgemeine Collinearverwandtschaft der vertauschbaren Raumgebilde (als solche) gehörig im Auge zu behalten, um falschen Schlüssen vorzubeugen. Dem besprochenen Originalsatze zufolge müsste anscheinend folgender Schluss als richtig erscheinen:

Das centrale Bild von einem hyperbolischen Paraboloide mit hyperbolischer oder elliptischer Contour kann für das klinogonale (orthogonale) von einem collinearen hyperbolischen Paraboloide angesehen werden; — und doch ist laut anderen geometrischen Erfahrungen diese Voraussetzung falsch. Das Centrum ^1s liegt in vorliegendem Falle in unendlicher Entfernung, s entspricht folglich einem unendlich entfernten Punkte, die Ebene E_s (durch s parallel zur Projectionsebene, also Verschwindungsebene) nachher der unendlich entfernten Ebene.

Soll nun die Contour unseres Bildes hyperbolisch oder elliptisch sein, muss das hyperbolische Originalparaboloid die E_s in einer allgemeinen Curve zweiten Grades durchschneiden; dann muss aber die collineare Fläche mit der unendlich entfernten Ebene auch eine allgemeine Curve zweiten Grades gemein haben, ist also kein hyperbolisches Paraboloid mehr, sondern ein einmanteliges Hyperboloid.

Nur bei parabolischer Contour wird einem hyperbolischen Paraboloide ein collineares hyperbolisches Paraboloid entsprechen.

(Das ursprüngliche durchschneidet nämlich die E_s in zwei reellen Geraden, und folglich muss das collineare Raumgebilde mit der unendlich fernen Ebene auch zwei Gerade gemein haben, folglich auch ein hyperbolisches Paraboloid sein.)

Prag, März 1879. **Ant. Sucharda.**

4.

Bemerkungen über das Erzeugniss eines eindeutigen Strahlenbüschels und eines zweideutigen Strahlensystems zweiter Classe.

Die Gesammtheit der aus den Punkten einer Geraden p an einen Kegelschnitt T gelegten Tangenten sei die erzeugende Tangenten-Involution J, ihr möge das Strahlenbüschel $\varDelta$ projectivisch sein.

Beide Strahlgebilde bilden auf irgend einer Geraden G der Ebene zwei zweideutige Punktreihen α und β. Denn irgend ein Strahl x_1 von $\varDelta$ trifft G in einem Punkte α_1, welchem in der Reihe β die zwei Schnittpunkte β_1', β_1'' der x_1 entsprechenden Tangenten x_1', x_1'' von T mit G zugeordnet sind. Aber man kann auch aus jedem Punkte β_1 zwei Tangenten x_1', x_2' an den Trägerkegelschnitt T legen, welchen als Elementen der Tangenten-Involution zwei verschiedene Strahlen x_1, x_2 entsprechen; diese treffen nun G in den β_1 zugeordneten zwei Punkten α_1, α_2 von α. Die vier gemeinschaftlichen Punkte der zwei zweideutigen conlocalen Reihen sind die Schnittpunkte der Geraden G mit dem Erzeugnisse von J und $\varDelta$ und man kann daher sagen:

1. „Das Erzeugniss eines Strahlenbüschels und einer ihm projectivischen Tangenten-Involution zweiter Classe ist eine Curve vierter Ordnung." *)

Durch die Construction erhält man auf jedem Strahle von $\varDelta$ zwei Curvenpunkte, nämlich die Schnittpunkte eines Strahles mit den ihm entsprechenden Tangentenpaare der Involution, und es ist daher $\varDelta$ selbst ein Doppelpunkt der Curve.

Dies ist auch daraus ersichtlich, dass den aus $\varDelta$ an T gelegten Tangenten δ_1', δ_2', so der Tangente δ_1' und der ihr conjugirten δ_1'' ein Strahl δ_1 in $\varDelta$ entspricht, welcher von δ_1' in $\varDelta$ getroffen wird. Auf ihm liegt also ausser $\varDelta$ nur ein Curvenpunkt (δ_1, δ_1''), woraus wir erkennen, dass δ_1 und demnach auch δ_2 Tangenten der Curve im Punkte $\varDelta$ sind:

2. „Der Scheitel des erzeugenden Büschels ist ein Doppelpunkt der Curve, die den aus ihm an den Trägerkegelschnitt T gelegten Tangenten entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels sind die Doppelpunktstangenten."

Das Strahlenbüschel $\varDelta$ (Fig. 1.) und die Tangenten-Involution J bilden, wie bereits erwähnt, auf der Involutionsaxe p zwei coaxiale, projectivische Punktreihen $\mathfrak{x}$ und $\varkappa$, deren Doppelpunkte $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ heissen mögen.

*) Siehe bezüglich der Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve: „Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten" Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Jännerheft 1879.

Ist η_1 ein beliebiger Punkt der Geraden $\varDelta\varDelta_1$ und verbindet man ihn mit allen Punkten der von der Tangenten-Involution auf p gebildeten Reihe $\varkappa$, so erhält man ein mit $\varDelta$ perspectivisches Strahlenbüschel η_1, der perspectivische Durchschnitt y_1 geht durch den Punkt $\varDelta_2$.

Will man die auf einem Strahle x_1 liegenden Curvenpunkte construiren, so bestimme man den Schnittpunkt L_1 dieses Strahles mit y_1. Die Gerade $L_1\eta_1$ trifft p in dem x_1 entsprechenden Punkte $\varkappa_1$, die aus diesem Punkte an T gelegten Tangenten liefern mit x_1 zum Schnitt gebracht die gesuchten Curvenpunkte. Wählt man den Punkt L_1 in dem Schnittpunkte einer der aus η_1 an T gelegten Tangenten mit y_1, so erkennt man durch die Construction, dass diese Punkte die auf y_1 gelegenen Curvenpunkte sind.

Es erhellt aus dieser Betrachtung, dass da auf jeder durch $\varDelta_2$ gelegten Geraden y_1 nur zwei Punkte der Curve durch Construction erhalten werden, der Punkt $\varDelta_2$ (mithin auch $\varDelta_1$) ein Doppelpunkt der Curve ist.

Es ist ferner ersichtlich, dass wenn η_1 die Gerade $\varDelta\varDelta_1$ durchläuft, die Gerade y_1 ein Strahlbüschel $\varDelta_2$ erzeugt, welches mit der, aus den aus η an T gelegten Tangenten gebildeten Involution projectivisch ist und mit derselben die behandelte Curve erzeugt.

Die Doppelpunktstangenten in $\varDelta_2$ kann man entweder in der früher angegebenen Weise, oder auch wie folgt bestimmen. Man legt eine Tangente γ_1' aus $\varDelta_2$ an T und betrachtet diese als Element der $\varDelta_2$ zugehörigen Tangenten-Involution J_2, sie trifft die gegenüberliegende Seite $\varDelta\varDelta_1$ des Doppelpunktsdreiecks in einem Punkte η_γ. Man hat nun den diesem Punkt entsprechenden Strahl von $\varDelta_2$ zu bestimmen, dies geschieht dadurch, dass man η_γ mit irgend einem Punkte $\varkappa_1$ der Reihe $\varkappa$ verbindet, die Verbindungslinie schneidet den $\varkappa_1$ entsprechenden Strahl x_1 von $\varDelta$ in dem Punkte $L\gamma_1$, welcher mit $\varDelta_2$ verbunden den γ_1' entsprechenden Strahl von $\varDelta_2$, also die eine Doppelpunktstangente giebt.

Das Resultat der Untersuchung lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

3. „Die behandelte Curve ist eine allgemeine rationale Curve vierter Ordnung. Ein jeder der drei Doppelpunkte kann als Scheitel des erzeugenden Strahlenbüschels betrachtet werden und einem jeden entspricht eine besondere Tangenten-Involution, welche die dem betreffenden Doppelpunkte gegenüberliegende Seite des Doppelpunktsdreiecks zur Involutionsaxe hat. Die Doppelpunktstangenten der Curve entsprechen den sechs aus den Doppelpunkten an den Trägerkegelschnitt gelegten Tangenten."

4. „Construction der Schnittpunkte einer Tangente des Trägerkegelschnitts mit der Curve."

Jeder Tangente G (Fig. 2.) von T entspricht ein Strahl des erzeugenden Strahlenbüschels Δ, welcher diese in einem Curvenpunkte trifft. Auf der Tangente G liegen noch weitere drei Curvenpunkte, sie sind die gemeinschaftlichen Punkte der conlocalen ein-zweideutigen von der Tangenten-Involution und dem Büschel Δ auf ihr gebildeten Reihen α und β. Aus jedem Punkte β_1 der Reihe β kann man an T eine Tangente b_1 legen, die Gesammtheit derselben bildet ein Tangentensystem B. Die gemeinschaftlichen Strahlen dieses Tangentensystems und der erzeugenden Tangenten-Involution J schneiden G in den drei Curvenpunkten. Um diese Tangenten zu construiren verbinde man die Punkte des von B auf T gebildeten Punktsystems mit einem beliebigen Punkt s des Kegelschnitts T, dieses Büschel ist mit dem Scheine P der von J auf T gebildeten Punkt-Involution projectivisch *); beide erzeugen einen Kegelschnitt k, welcher T ausser in s in den Berührungspunkten d der gesuchten drei sich selbst entsprechenden Tangenten trifft.

5. „Der Trägerkegelschnitt der erzeugenden Tangenten-Involution berührt die behandelte Curve vierfach."

Betrachten wir den von dem erzeugenden Strahlbüschel Δ (Fig. 2.) und dem Scheine P der Punkt-Involution erzeugten Kegelschnitt K, so ist leicht zu erkennen, dass derselbe den Träger T in jenen Punkten d schneidet, welche dieser mit der Curve gemein hat. Denn verbindet man einen solchen Punkt mit Δ und P, so erhält man zwei einander entsprechende Strahlen x und ξ dieser Büschel; die in d an T gelegte Tangente als eine der x entsprechenden schneidet diesen Strahl in einem Curvenpunkte, welcher aber mit d zusammenfällt. Die Curve hat in jedem der Punkte d mit dem Kegelschnitt T mehr als einen Punkt gemein, da in Folge der Definition derselben sich kein reelles Continuum ihrer Punkte innerhalb des Trägerkegelschnittes befinden darf.

Man überzeugt sich auch durch blosse Construction der drei weitern auf der Tangente G in d liegenden Curvenpunkte, dass einer dieser Punkte mit d zusammenfällt, also T ein vierfach berührender Kegelschnitt der Curve ist.

Die Construction der drei Curvenpunkte ist in Art. 4. gegeben.

Um einen Punkt des dort mit k bezeichneten Kegelschnitts zu bestimmen lege man aus β_1 einem Punkte der Tangente G in d die Tangente τ_1 an T. Ihr Berührungspunkt b_1 mit einem beliebigen aber für's Weitere festen Punkt s von T verbunden und mit dem

---

*) Das Strahlenbüschel P, welches mit Δ projectivisch, kann auch dazu benutzt werden, die behandelte Curve blos mit dem Lineal zu construiren, die Construction selbst ist an sich klar.

diesem Strahle m_1 entsprechenden, also dem durch β_1 gehenden Strahle von $\varDelta$ zugeordneten Strahl ξ_1 des Büschels P zum Schnitt gebracht liefert einen Punkt von k.

Lässt man nun β_1 mit d coincidiren, so ersieht man aus der Wiederholung der eben angedeuteten Construction, dass d auch ein Punkt des Kegelschnitts k ist, also ein Schnittpunkt von T und k. Die in ihm an T gelegte Tangente trifft daher G in einem der drei sich selbst entsprechenden Punkte der conlocalen ein-zweideutigen Reihen. Diese Tangente fällt mit G zusammen und schneidet sie also in dem Berührungspunkte d, in diesem Punkte haben also G, T und die Curve zwei unendlich nahe Punkte gemein, was zu beweisen war.

6. „Construction der Curve C^4 aus den drei Doppelpunkten und fünf weitern Punkten, sowie Construction der unendlich vielen die behandelte Curve vierfach berührenden Kegelschnitte."

Einen der Doppelpunkte etwa $\varDelta_1$ wähle man zum Scheitel des erzeugenden Strahlbüschels, die Verbindungslinie der beiden andern zur Involutionsaxe p.

Die nach den einzelnen Curvenpunkten $m_1, m_2, \ldots m_5$ gehenden Strahlen des Büschels $\varDelta_1$ schneiden p in Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_5$ der Constructionsreihe $\mathfrak{x}$. Einem dieser Punkt $\mathfrak{x}_1$ weise man einen beliebigen Punkt $\varkappa_1$ der Geraden p als entsprechenden der von der Tangenten-Involution auf p gebildeten Reihe $\varkappa$ zu. Durch $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, $\mathfrak{x}_1$ und $\varkappa_1$ ist die Projectivität der Reihen $\mathfrak{x}$ und $\varkappa$ bestimmt.

Construirt man die den Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4, \mathfrak{x}_5$ entsprechenden Punke $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5$ der Reihe $\varkappa$ und verbindet diese mit den ihnen entsprechenden d. h. mit gleichem Index versehenen Curvenpunkten, so erhält man fünf Tangenten des Trägerkegelschnitts, durch welche dieser bestimmt ist.

Die Construction der Curve kann in der bereits angegebenen Weise durchgeführt werden.

Wir haben dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ einen beliebigen Punkt $\varkappa_1$ als entsprechend zugewiesen und erhielten einen ganz bestimmten Trägerkegelschnitt; daraus folgt, dass es unendlich viele solche Kegelschnitte gibt, deren jeder die Curve vierfach berührt und als Träger der Tangenten-Involution betrachtet werden kann.

Jeder dieser Kegelschnitte kann auch als Träger der Tangenten-Involution J_2 für einen andern Doppelpunkt $\varDelta_2$ als Scheitel des erzeugenden Strahlbüschels angesehen werden. Daraus folgt, dass es nur eine einfach unendliche Reihe solcher Kegelschnitte gibt, aber dreimal so viele dieselbe Curve erzeugende Tangenten-Involutionen.

Wien, März 1879. Adolf Ameseder.

XI.

Die dreiaxigen Coordinaten in den Gleichungen 1. und 2. Grades.

Von

W. Veltmann.

Die Grundlagen der Lehre von den Dreieckscoordinaten sollen im Folgenden unabhängig, also ohne die Cartesischen Coordinaten als Hülfsmittel zu benutzen, entwickelt werden. Als weitere Eigentümlichkeit der hier gegebenen Darstellung dieser Theorie werden in die Gleichung der geraden Linie und hierdurch auch in andere Gleichungen die Seiten des Axendreiecks mit eingehen. Es ist dies von wesentlicher Bedeutung für die Anwendung solcher Coordinatensysteme.

Die Natur des durch eine Gleichung gegebenen geometrischen Gebildes hängt nämlich nicht blos von den Coefficienten der Gleichung, sondern auch von der Beschaffenheit des Coordinatendreiecks ab. So kann z. B. je nach der Gestalt des letzteren eine und dieselbe Gleichung 2ten Grades eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel repräsentiren. Sobald aber von dem Coordinatendreieck die Seiten dem Verhältniss nach bekannt sind, während die absolute Grösse derselben, sowie die Lage des Dreiecks noch willkürlich bleibt, lässt sich entscheiden, welche von obigen Curven in einer gegebenen Gleichung 2ten Grades enthalten ist. In der Tat wird im Folgenden nach Aufstellung der allgemeinen Theorie der Dreieckscoordinaten als Anwendung derselben eine vollständige Discussion der Gleichung zweiten Grades gegeben werden. Vorausgesetzt werden einige Begriffsbestimmungen und Sätze aus der rein geometrischen Lehre vom Schwerpunkt.

1. Wir sprechen von den Gegenden einer Ebene, wie man von den Weltgegenden des Horizonts spricht. Unter der Richtung des senkrechten Abstandes eines Punktes von einer Geraden verstehen wir die Richtung nach dem Fusspunkte hin. Parallele Abstände, also solche die zu ein und derselben oder zu parallelen Geraden gehören, haben gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem sie nach derselben oder nach entgegengesetzten Gegenden der Ebene gerichtet sind.

2. $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 1.) sei das zur Bestimmung der Lage von Punkten und geraden Linien dienende Axendreieck. Die Abstände eines Punktes von den drei Axen nehmen wir alle drei positiv, wenn der Punkt im Innern des Dreiecks liegt. Für alle übrigen Punkte bestimmen sich dann die Vorzeichen der Axenabstände nach 1.

3. Nennen wir die Axenabstände eines Punktes x_1, x_2, x_3, die zugehörigen wesentlich positiven Seiten des Axendreiecks s_1, s_2, s_3 und den doppelten Inhalt des letzteren D, so ist immer

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = D \tag{1}$$

In Fällen, wo es dahingestellt bleibt, ob drei gegebene Grössen die Axenabstände eines Punktes ihrer Grösse oder nur ihrem Verhältniss nach sind, nennen wir sie Verhältnissabstände. Aus den Verhältnissabständen $a_1 : a_2 : a_3$ eines Punktes erhält man die wirklichen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1 D}{s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3} \\ x_2 &= \frac{a_2 D}{s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3} \\ x_3 &= \frac{a_3 D}{s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3} \end{aligned} \tag{2}$$

4. Die Abstände einer geraden Linie von den Ecken des Axendreiecks nennen wir die Knotenabstände der geraden Linie. Für die Vorzeichen derselben gilt das unter 1. Festgesetzte. Nach welcher von den beiden einander entgegengesetzten Gegenden der Ebene man die positiven Abstände gerichtet sein lässt, ist gleichgültig, falls nicht besondere Bedingungen hinzukommen, welche für eine bestimmte derselben entscheiden.

Blos ihrem Verhältniss nach gegebene Abstände nennen wir auch hier Verhältnissabstände. Aus letzteren lassen sich die wirklichen Abstände ebenfalls leicht berechnen. Es seien die Knotenabstände u_1, u_2, u_3 einer Geraden L (Fig. 1.) durch die Proportion

$$(3) \qquad u_1 : u_2 : u_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

gegeben, wo die b bekannte Grössen sind. Es sollen die wahren Werte der u bestimmt werden.

Man hat

$$(4) \qquad \begin{aligned} s_1^2 &= (u_2 - u_3)^2 + \overline{P_2P_3}^2 \\ s_2^2 &= (u_3 - u_1)^2 + \overline{P_3P_1}^2 \\ s_3^2 &= (u_1 - u_2)^2 + \overline{P_1P_2}^2 \end{aligned}$$

$$(5) \qquad \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_1} + \overline{P_1P_2} = 0$$

Nach Gl. (3) kann man setzen:

$$(6) \qquad u_1 = b_1 p, \quad u_2 = b_2 p, \quad u_3 = b_3 p$$

Setzt man diese Werte in (4), so wird:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= p^2(b_2 - b_3)^2 + \overline{P_2P_3}^2 \\ s_2^2 &= p^2(b_3 - b_1)^2 + \overline{P_3P_1}^2 \\ s_3^2 &= p^2(b_1 - b_2)^2 + \overline{P_1P_2}^2 \end{aligned}$$

und wenn man die hieraus bestimmten $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ in (5) einsetzt, so erhält zur Bestimmung von p die Gleichung

$$(7) \quad \sqrt{s_1^2 - p^2(b_2 - b_3)^2} + \sqrt{s_2^2 - p^2(b_3 - b_1)^2} + \sqrt{s_3^2 - p^2(b_1 - b_2)^2} = 0$$

Diese Gleichung befreien wir von den Wurzeln mit Hülfe des Satzes, dass, wenn

$$a + b + c = 0$$

ist, auch

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0$$

ist, welcher sich durch folgende nach und nach aus einander hervorgehende Gleichungen ergibt:

$$\begin{gathered} a + b + c = 0 \\ abc(a + b + c) = 0 \\ a^2bc + ab^2c + abc^2 = 0 \\ (ab + ac + bc)^2 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0 \\ [(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)]^2 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0 \\ (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0 \end{gathered}$$

Setzen wir hier für a, b und c die in Gleichung (7) enthaltenen Wurzeln, so wird

$$[s_1{}^2-p^2(b_2-b_3)^2]^2+[s_2{}^2-p^2(b_3-b_1)^2]^2+[s_3{}^2-p^2(b_1-b_2)^2]^2$$
$$-2\{[s_1{}^2-p^2(b_2-b_3)^2][s_2{}^2-p^2(b_3-b_1)^2]$$
$$+[s_1{}^2-p^2(b_2-b_3)^2][s_3{}^2-p^2(b_1-b_2)^2]$$
$$+[s_2{}^2-p^2(b_3-b_1)^2][s_3{}^2-p^2(b_1-b_2)^2]\}=0$$

oder

$$\{(b_2-b_3)^4+(b_3-b_1)^4+(b_1-b_2)^4-2[(b_2-b_3)^2(b_3-b_1)^2+(b_2-b_3)^2(b_1-b_2)^2$$
$$+(b_3-b_1)^2(b_1-b_2)^2]\}p^4+2\{s_1{}^2[-(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2+(b_1-b_2)^2]$$
$$+s_2{}^2[(b_2-b_3)^2-(b_3-b_1)^2+(b_1-b_2)^2]+s_3{}^2[(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2$$
$$-(b_1-b_2)^2]\}p^2+s_1{}^4+s_2{}^4+s_3{}^4-2(s_1{}^2s_2{}^2+s_1{}^2s_3{}^2+s_2{}^2s_3{}^2)=0$$

Nach obigem algebraischem Satze ist, da b_2-b_3, b_3-b_1 und b_1-b_2 zur Summe Null haben, der Coefficient von p^4 der Null gleich. Nach demselben Satze muss der von p freie Teil durch $s_1+s_2+s_3$ teilbar sein und man kann denselben daher als Product von $s_1+s_2+s_3$ mit einer Grösse dritter Dimension darstellen. Indem man zugleich den Coefficienten von p^2 etwas anders schreibt, erhält man:

$$2\{(b_2-b_3)^2(-s_1{}^2+s_2{}^2+s_3{}^2)+(b_3-b_1)^2(s_1{}^2-s_2{}^2+s_3{}^2)$$
$$+(b_1-b_2)^2(s_1{}^2+s_2{}^2-s_3{}^2)\}p^2-(s_1+s_2+s_3)[s_1(-s_1{}^2+s_2{}^2+s_3{}^2)$$
$$+s_2(s_1{}^2-s_2{}^2+s_3{}^2)+s_3(s_1{}^2+s_2{}^2-s_3{}^2)]=0$$

also, wenn man $\frac{s_1{}^2+s_2{}^2+s_3{}^2}{2}$ mit s^2 bezeichnet:

$$(8)\quad p^2=\frac{(s_1+s_2+s_3)[s_1(s^2-s_1{}^2)+s_2(s^2-s_2{}^2)+s_3(s^2-s_3{}^2)]}{[(b_2-b_3)^2(s^2-s_1{}^2)+(b_3-b_1)^2(s^2-s_2{}^2)+(b_1-b_2)^2(s^2-s_3{}^2)]}$$

Hieraus ergeben sich für p zwei Werte und die wirklichen Abstände der Linie L sind dann

$$u_1=\pm b_1p,\quad u_2=\pm b_2p,\quad u_3=\pm b_3p$$

Wenn demnach noch die Gegend angegeben ist, nach welcher dieselben positiv genommen werden sollen, so ist die Lage einer Geraden durch ihre Verhältnissabstände vollständig bestimmt.

Wenn man die Werte

$$b_1=\pm\frac{u_1}{p},\quad b_2=\pm\frac{u_2}{p},\quad b_3=\pm\frac{u_3}{p}$$

in Gl. (8) einsetzt, so erhält man, indem man zugleich den der Einheit gleichen Bruch umgekehrt schreibt:

$$(9)\quad 1=\frac{(u_2-u_3)^2(s^2-s_1{}^2)+(u_3-u_1)^2(s^2-s_2{}^2)+(u_1-u_2)^2(s^2-s_3{}^2)}{(s_1+s_2+s_3)[s_1(s^2-s_1{}^2)+s_2(s^2-s_2{}^2)+s_3{}^2(s^2-s_3{}^2)]}$$

als Bedingung dafür, dass drei Grössen u_1, u_2, u_3 die Knotenabstände einer geraden Linie sind.

5. Man lege eine Gerade L durch den Schwerpunkt O des Axendreiecks (Fig. 2.). Die Knotenabstände derselben seien v_1, v_2, v_3. Dann ist

$$(10) \qquad v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Denn dem absoluten Werte nach ist das arithmetische Mittel aus v_1 und v_2 gleich der Senkrechten vom Punkte P_3 auf L, diese Senkrechte aber die Hälfte von v_3.

Ferner ist, wenn man die Axenabstände des Schwerpunkts mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnet:

$$s_1 \xi_1 = s_2 \xi_2 = s_3 \xi_3$$

weil jedes von diesen Producten $\frac{2}{3}$ des Dreiecksinhalts ist. Daher ist auch nach (10)

$$(11) \qquad s_1 \xi_1 v_1 + s_2 \xi_2 v_2 + s_3 \xi_3 v_3 = 0$$

Für den Schwerpunkt und jede durch denselben gehende gerade Linie drückt also diese Gleichung die vereinigte Lage von Punkt und Gerade aus. Wir werden jetzt nachweisen, dass eine solche Gleichung allgemein diese Bedeutung hat.

Nehmen wir eine beliebige zu L parallele Linie M, deren Knotenabstände u_1, u_2, u_3 sind, und deren Abstand vom Schwerpunkt a ist. Wir nehmen a positiv und bestimmen demgemäss auch nach 1. pag. 114. die Vorzeichen der u und v. Dann ist

$$u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = u_3 - v_3 = a$$

also

$$a = \frac{u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3}{3}$$

oder wegen (10)

$$(12) \qquad a = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}.$$

6. $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 3.) sei das Axendreieck, O der Schwerpunkt desselben, L eine Gerade durch diesen, M eine zu L Parallele, Q ein beliebiger Punkt in dieser, v_1, v_2, v_3 die Knotenabstände von L, u_1, u_2, u_3 die von M, x_1, x_2, x_3 die Axenabstände von Q. Der Schwerpunkt des Dreiecks $Q A_2 A_3$ liegt auf der Linie QP_1, um $\frac{1}{3}$ von P_1, um $\frac{2}{3}$ von Q entfernt. Der Punkt P_1 hat nun von M den Abstand

$\frac{u_2+u_3}{2}$, der Schwerpunkt des Dreiecks QA_2A_3 also $\frac{2}{3}$ desselben $=\frac{u_2+u_3}{3}$. Ebenso steht der Schwerpunkt des Dreiecks QA_1A_2 um $\frac{u_1+u_2}{3}$, derjenige von QA_1A_3 um $\frac{u_1+u_3}{3}$ von M ab.

Setzen wir also die doppelte Momentensumme der Dreiecke QA_1A_2, QA_1A_3 und QA_2A_3 gleich der doppelten Momentensumme des Axendreiecks $A_1A_2A_3$ und nennen wir wieder letzteres doppelt genommen D, so haben wir

$$s_1x_1\frac{u_2+u_3}{3}+s_2x_2\frac{u_1+u_3}{3}+s_3x_3\frac{u_1+u_2}{3}=aD$$

oder

$$(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)\frac{u_1+u_2+u_3}{3}-\frac{s_1x_1u_1+s_2x_2u_2+s_3x_3u_3}{3}=aD$$

also, weil nach (1) und (12) das erste Glied links $=aD$ ist:

$$s_1x_1u_1+s_2x_2u_2+s_3x_3u_3=0 \tag{13}$$

Dies ist also die allgemeine Gleichung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade. Sie gilt auch, wenn die x und die u Verhältnissabstände sind.

7. Die Gleichung einer geraden Linie, deren Verhältnissabstände a_1, a_2, a_3 sind, ist nach 6.

$$s_1x_1a_1+s_2x_2a_2+s_3x_3a_3=0$$

wo die x die Verhältnissabstände der Punkte der Linie sind. Wenn die Linie sich ins Unendliche entfernt, so werden die a einander gleich und es ist also, unter den x endliche Verhältnissabstände verstanden,

$$s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0 \tag{14}$$

die Gleichung einer jeden unendlich entfernten Linie.

8. Wenn b_1, b_2, b_3 die Verhältnissabstände eines Punktes sind, so ist die Gleichung dieses Punktes nach 6.

$$s_1b_1u_1+s_2b_2u_2+s_3b_3u_3=0$$

wo die u die Verhältnissabstände der durch den Punkt gehenden Geraden sind. Wenn $b_1=b_2=b_3$, so erhält man die Gleichung

$$s_1u_1+s_2u_2+s_3u_3=0$$

des Mittelpunktes des in das Axendreieck eingeschriebenen Kreises.

Für den Schwerpunkt ist schon oben die Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

erhalten worden.

9. Eine Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

mit beliebigen Coefficienten a ist die Gleichung einer geraden Linie, deren Verhältnissabstände u sich bestimmen aus

$$s_1 u_1 : s_2 u_2 : s_3 u_3 = a_1 : a_2 : a_3$$

Ebenso ist

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = 0$$

mit beliebigen Coefficienten b die Gleichung eines Punktes, dessen Verhältnissabstände x sich bestimmen aus

$$s_1 x_1 : s_2 x_2 : s_3 x_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

10. Wenn man statt der rechtwinkligen Abstände x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 schiefwinklige

$$y_1 = a_1 x_1, \quad y_2 = a_2 x_2, \quad y_3 = a_3 x_3$$
$$v_1 = b_1 u_1, \quad v_2 = b_2 u_2, \quad v_3 = b_3 u_3$$

nimmt, so kann man die Grössen a und b, d. h. die Cosecanten der betreffenden Neigungswinkel so wählen, dass die Gleichung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0$$

wird. Man braucht zu dem Ende nur die b von den a abhängen zu lassen nach den Gleichungen:

$$a_1 b_1 : a_2 b_2 : a_3 b_3 = s_1 : s_2 : s_3$$

Hier werden solche schiefwinklige Abstände nicht weiter benutzt werden.

11. Es seien v_1, v_2, v_3 die Knotenabstände einer Geraden, x_1, x_2, x_3 die Verhältnissabstände eines Punktes. Man lege durch den Punkt x eine Parallele zu der Linie v, deren Knotenabstände u_1, u_2, u_3 seien. Dann ist

$$v_1 - u_1 = v_2 - u_2 = v_3 - u_3 = p$$

wo p nicht blos der Grösse, sondern wegen des in 1. Festgesetzten auch dem Zeichen nach der Abstand des Punktes x von der Linie v ist. Es folgt hieraus

$$u_1 = v_1 - p, \quad u_2 = v_2 - p, \quad u_3 = v_3 - p$$

Da der Punkt x auf der Linie u liegt, so ist also

$$s_1 x_1 (v_1 - p) + s_2 x_2 (v_2 - p) + s_3 x_3 (v_3 - p) = 0$$

mithin

$$p = \frac{s_1 x_1 v_1 + s_2 x_2 v_2 + s_3 x_3 v_3}{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3} \tag{15}$$

Man erhält also den Abstand eines Punktes von einer Geraden, indem man die Verhältnissabstände des Punktes in die mit den wirklichen Knotenabständen versehene Gleichung der Geraden und auch in die Gleichung der unendlich fernen Linie einsetzt und die linke Seite der ersteren Gleichung durch die der letzteren dividirt.

12. Es sollen die Formeln aufgestellt werden für den Uebergang von einem Axendreieck $s_1 s_2 s_3$ zu einem anderen $t_1 t_2 t_3$. Auch für das neue Dreieck soll die Bestimmung gelten, dass die Seiten desselben wesentlich positiv sind und Punkte im Innern des Dreiecks positive Axenabstände haben. Dagegen soll für den Fall, dass zufällig eine neue Axe einer alten parallel ist, für dieselben das unter 1. für parallele Linien Festgesetzte nicht massgebend sein. Lassen wir dann die neuen Axen durch ihre alten Knotenabstände gegeben sein, so sind durch die geometrische Lage der neuen Axen diese Transformationsdaten unzweideutig bestimmt. Dieselben seien die in folgender Tabelle angegebenen, wo also z. B. α_{11} der Abstand der neuen Axe t_1 von dem alten Axenknoten $\widehat{s_2 s_3}$ ist.

	$\widehat{s_2 s_3}$	$\widehat{s_3 s_1}$	$\widehat{s_1 s_2}$
t_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
t_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
t_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt P, dessen alte Verhältnissabstände x_1, x_2, x_3 sind; so ist dessen Abstand von t_1 nach 11.:

$$\frac{s_1 x_1 \alpha_{11} + s_2 x_2 \alpha_{12} + s_3 x_3 \alpha_{13}}{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}$$

Ebenso ist der Abstand des Punktes P von t_2:

$$\frac{s_1 x_1 \alpha_{21} + s_2 x_2 \alpha_{22} + s_3 x_3 \alpha_{23}}{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}$$

und der von t_3:

$$\frac{s_1 x_1 \alpha_{31} + s_2 x_2 \alpha_{32} + s_3 x_3 \alpha_{33}}{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}$$

Diese Ausdrücke sind also dem absoluten Werte und dem Zeichen nach die neuen Axenabstände y_1, y_2, y_3 des Punktes P.

Nehmen wir ferner eine beliebige Gerade L und bestimmen wir aus deren Knotenabständen u im alten System die v im neuen.

Die mit den wirklichen Knotenabständen versehenen Gleichungen der neuen Axen in Bezug auf das alte Dreieck sind:

$$\begin{aligned} &\text{von } t_1: \quad s_1 x_1 \alpha_{11} + s_2 x_2 \alpha_{12} + s_3 x_3 \alpha_{13} = 0 \\ &\quad\text{,,} \quad t_2: \quad s_1 x_1 \alpha_{21} + s_2 x_2 \alpha_{22} + s_3 x_3 \alpha_{23} = 0 \\ &\quad\text{,,} \quad t_3: \quad s_1 x_1 \alpha_{31} + s_2 x_2 \alpha_{32} + s_3 x_3 \alpha_{33} = 0 \end{aligned}$$

Wenn man die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} = \mathfrak{A}$ und deren Unterdeterminanten $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \alpha_{ij}} = \mathfrak{A}_{ij}$, setzt, so sind hiernach die durch Auflösung von je zwei der vorstehenden Gleichungen sich ergebenden alten Verhältnissabstände der Knoten $\widehat{t_2 t_3}$, $\widehat{t_3 t_1}$ und $\widehat{t_1 t_2}$ des neuen Axendreiecks:

$$\begin{aligned} &\text{von } \widehat{t_2 t_3}: \quad s_2 s_3 \mathfrak{A}_{11} \quad s_3 s_1 \mathfrak{A}_{12} \quad s_1 s_2 \mathfrak{A}_{13} \\ &\quad\text{,,} \quad \widehat{t_3 t_1}: \quad s_2 s_3 \mathfrak{A}_{21} \quad s_3 s_1 \mathfrak{A}_{22} \quad s_1 s_2 \mathfrak{A}_{23} \\ &\quad\text{,,} \quad \widehat{t_1 t_2}: \quad s_2 s_3 \mathfrak{A}_{31} \quad s_3 s_1 \mathfrak{A}_{32} \quad s_1 s_2 \mathfrak{A}_{33} \end{aligned}$$

Die mit ihren wahren Knotenabständen versehene Gleichung der Linie L im alten System ist:

$$s_1 x_1 u_1 + s_2 x_2 u_2 + s_3 x_3 u_3 = 0$$

Folglich ist nach 11. der Abstand der Linie L von der Ecke $\widehat{t_2 t_3}$:

$$= \frac{s_1 s_2 s_3 \mathfrak{A}_{11} u_1 + s_2 s_1 s_3 \mathfrak{A}_{12} u_2 + s_3 s_1 s_2 \mathfrak{A}_{13} u_3}{s_1 s_2 s_3 \mathfrak{A}_{11} + s_2 s_1 s_3 \mathfrak{A}_{12} + s_3 s_1 s_2 \mathfrak{A}_{13}}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}_{11} u_1 + \mathfrak{A}_{12} u_2 + \mathfrak{A}_{13} u_3}{\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{13}}$$

Diesen Ausdruck können wir nun $= v_1$ setzen. Bestimmen wir auf dieselbe Weise die Abstände der Linie L von $\widehat{t_3 t_1}$ und von $\widehat{t_1 t_2}$, so erhalten wir

$$v_2 = \frac{\mathfrak{A}_{21} u_1 + \mathfrak{A}_{22} u_2 + \mathfrak{A}_{23} u_3}{\mathfrak{A}_{21} + \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{A}_{23}}$$

$$v_3 = \frac{\mathfrak{A}_{31} u_1 + \mathfrak{A}_{32} u_2 + \mathfrak{A}_{33} u_3}{\mathfrak{A}_{31} + \mathfrak{A}_{32} + \mathfrak{A}_{33}}$$

Die v sind nach Früherem nach derselben Gegend der Ebene positiv, nach welchen die u positiv sind. Ueber die Vorzeichen der u konnte man nach 4. in zweierlei Weise verfügen; kehrt man die Zeichen der

u um, so kehren sich auch die der v um. Immer gilt aber auch für die v die für die u getroffene Bestimmung, dass sie alle drei nach derselben Gegend positiv sind.

Wir haben also jetzt folgende Transformationsformeln:

$$(16)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{s_1x_1a_{11} + s_2x_2a_{12} + s_3x_3a_{13}}{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3} \\ y_2 &= \frac{s_1x_1a_{21} + s_2x_2a_{22} + s_3x_3a_{23}}{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3} \\ y_3 &= \frac{s_1x_1a_{31} + s_2x_2a_{32} + s_3x_3a_{33}}{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3} \end{aligned}$$

$$(17)\qquad \begin{aligned} v_1 &= \frac{\mathfrak{A}_{11}u_1 + \mathfrak{A}_{12}u_2 + \mathfrak{A}_{13}u_3}{\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{13}} \\ v_2 &= \frac{\mathfrak{A}_{21}u_1 + \mathfrak{A}_{22}u_2 + \mathfrak{A}_{23}u_3}{\mathfrak{A}_{21} + \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{A}_{23}} \\ v_3 &= \frac{\mathfrak{A}_{31}u_1 + \mathfrak{A}_{32}u_2 + \mathfrak{A}_{33}u_3}{\mathfrak{A}_{31} + \mathfrak{A}_{32} + \mathfrak{A}_{33}} \end{aligned}$$

Die y, u, v sind hier die wirklichen, die x Verhältnissabstände. Wenn man die u als Verhältnissabstände betrachtet, so sind auch die v solche; sie bleiben aber mit den u nach derselben Gegend positiv.

Aus den Gleichungen (16) und (17) folgt, indem man die 1te, 2te, 3te der ersteren resp. mit der 1ten, 2ten, 3ten der letzteren multiplicirt, die Nenner fortschafft und dann die Gleichungen addirt:

$$(18)\quad [(\mathfrak{A}_{11}+\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{13})y_1v_1+(\mathfrak{A}_{21}+\mathfrak{A}_{22}+\mathfrak{A}_{23})y_2v_2+(\mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{32}+\mathfrak{A}_{33})y_3v_3] \times(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3) = (s_1x_1u_1+s_2x_2u_2+s_3x_3u_3)\mathfrak{A}$$

Nach 6. ist

$$(19)\qquad t_1y_1v_1 + t_2y_2v_2 + t_3y_3v_3 = 0$$

die Gleichung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade. Dieselbe Bedeutung hat aber auch

$$(20)\qquad s_1x_1u_1 + s_2x_2u_2 + s_3x_3u_3 = 0$$

oder nach (18)

$$(21)\quad (\mathfrak{A}_{11}+\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{13})y_1v_1+(\mathfrak{A}_{21}+\mathfrak{A}_{22}+\mathfrak{A}_{23})y_2v_2+(\mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{32}+\mathfrak{A}_{33})y_3v_3=0$$

Da nun die Grössen y_1v_1, y_2v_2, y_3v_3 durch Aenderung der Lage des Punktes y und der Geraden v (während aber beide stets vereinigt bleiben) beliebige Wertverhältnisse annehmen können, so folgt aus (19) und (21):

(22) $t_1:t_2:t_3 = \mathfrak{A}_{11}+\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{13}:\mathfrak{A}_{21}+\mathfrak{A}_{22}+\mathfrak{A}_{23}:\mathfrak{A}_{31}+\mathfrak{A}_{32}+\mathfrak{A}_{33}$

oder wenn wir letztere Summen mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ bezeichnen

$$t_1:t_2:t_3 = \mathfrak{A}':\mathfrak{A}'':\mathfrak{A}''' \tag{23}$$

Die Grössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ sind also die Verhältnissseiten des neuen Axendreiecks und, da diese positiv sind, von gleichem Zeichen.

13. Durch Auflösung der Gleichungen (16) und (17) pag. 122. erhält man die alten Coordinaten ausgedrückt durch die neuen. Aus den Gleichungen (16), in welchen hierbei die y auch Verhältnissabstände bedeuten können, ergeben sich folgende Verhältnissabstände x:

$$x_1 = \frac{\mathfrak{A}_{11}y_1+\mathfrak{A}_{21}y_2+\mathfrak{A}_{31}y_3}{s_1}$$

$$x_2 = \frac{\mathfrak{A}_{12}y_1+\mathfrak{A}_{22}y_2+\mathfrak{A}_{32}y_3}{s_2}$$

$$x_3 = \frac{\mathfrak{A}_{13}y_1+\mathfrak{A}_{23}y_2+\mathfrak{A}_{33}y_3}{s_3}$$

Hieraus kann man nach 2. die wahren Axenabstände bestimmen. In den Gleichungen (2) in 3. bedeuten dann die s die Seiten des alten Dreiecks, D den doppelten Inhalt desselben und wenn man in den Nenner, welchen wir hier D' nennen wollen, statt der a obige Werte einsetzt, so wird

$$D' = \mathfrak{A}'y_1 + \mathfrak{A}''y_2 + \mathfrak{A}'''y_3.$$

Da $\mathfrak{A}':\mathfrak{A}'':\mathfrak{A}''' = t_1:t_2:t_3$ und $t_1y_1+t_2y_2+t_3y_3$ der doppelte Inhalt des neuen Axendreiecks ist, so ist D' eine constante Grösse.

Löst man zugleich auch die Gleichungen (17) auf, so erhält man für die x und u die Formeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mathfrak{A}_{11}y_1+\mathfrak{A}_{21}y_2+\mathfrak{A}_{31}y_3}{s_1}\cdot\frac{D}{D'} \\ x_2 &= \frac{\mathfrak{A}_{12}y_1+\mathfrak{A}_{22}y_2+\mathfrak{A}_{32}y_3}{s_2}\cdot\frac{D}{D'} \\ x_3 &= \frac{\mathfrak{A}_{13}y_1+\mathfrak{A}_{23}y_2+\mathfrak{A}_{33}y_3}{s_3}\cdot\frac{D}{D'} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{A}'\alpha_{11}v_1+\mathfrak{A}''\alpha_{21}v_2+\mathfrak{A}'''\alpha_{31}v_3 \\ u_2 &= \mathfrak{A}'\alpha_{12}v_1+\mathfrak{A}''\alpha_{22}v_2+\mathfrak{A}'''\alpha_{32}v_3 \\ u_3 &= \mathfrak{A}'\alpha_{13}v_1+\mathfrak{A}''\alpha_{23}v_2+\mathfrak{A}'''\alpha_{33}v_3 \end{aligned} \tag{25}$$

Hier sind die x die wirklichen, und die y, u, v Verhältnissabstände.

14. Die allgemeine Gleichung 2ten Grades in Verhältnissabständen sei

$$(26)\qquad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$$

oder nach Clebsch'scher Symbolik

$$(26)\qquad (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^{II} = 0$$

oder mit einem kürzeren Symbol

$$(26)\qquad (a_x)^2 = 0$$

Es soll untersucht werden, welche geometrische Gebilde (Kegelschnitte) in dieser Gleichung enthalten sein können.

Wenn die Determinante der Gleichung $= 0$ ist, so stellt sie bekanntlich zwei gerade Linien dar, welche zusammenfallen, wenn zugleich sämmtliche Unterdeterminanten $= 0$ sind. Die Linien sind reell oder imaginär, je nachdem die Diagonalelemente der adjungirten Determinante (welche immer gleiche Zeichen haben) positiv oder negativ sind. Die Linien sind parallel, wenn die Gleichungen derselben, d. h. die linearen Factoren der Gleichung (26) mit der Gleichung der unendlich entfernten Linie zusammen eine verschwindende Determinante geben. Sind die Linien imaginär, so ist ihr Durchschnittspunkt reell; sind sie aber dann zugleich parallel, so liegt der reelle Durchschnittspunkt im Unendlichen und der Gleichung (26) genügt also in diesem Falle kein reeller Punkt.

15. Die Determinante von $(a_x)^2$ sei jetzt nicht $= 0$, $(a_x)^2$ also nicht in zwei Factoren zerlegbar. Wenn wir ($a_{ij} = a_{ji}$ voraussetzend) die Gleichung $(a_x)^2 = 0$ in der Form schreiben

$$(27)\qquad \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_3} x_3 = 0$$

und dann die Factoren x durch ξ ersetzen, so wird die Gleichung

$$(28)\qquad \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x^2} \xi_2 + \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_3} \xi_3 = 0$$

Von zwei Punkten x und ξ, die dieser Gleichung genügen, nennen wir jeden einen Pol des anderen in Bezug auf den Kegelschnitt. Die Gleichung soll die Polgleichung der Punkte x und ξ genannt werden.

Lassen wir von zwei Polen den einen sich ändern, während der andere fest bleibt, so durchläuft der erstere eine gerade Linie, welche die P o l a r e des letzteren, ihres P o l e s, genannt wird. Die Polare eines Punktes des Kegelschnitts ist die Tangente des letzteren in

diesem Punkte. Wenn ein Punkt und eine Gerade vereinigt liegen, so liegen die Polare des Punkts und der Pol der Geraden auch vereinigt. Nimmt man zu einem solchen Paare noch die Verbindungslinie der beiden Punkte und den Durchschnittspunkt der beiden Linien hinzu, so hat man ein Dreieck, in welchem jede Seite die Polare des Gegeneckpunktes ist, Polardreieck.

Die Verhältnissabstände der Polare v eines Punktes x ergeben sich aus der Gleichung (28), wenn man diese als Gleichung (mit den Veränderlichen ξ) der Polare von x betrachtet:

$$
\begin{aligned}
s_1 v_1 &= \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
s_2 v_2 &= \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad (29) \\
s_3 v_3 &= \frac{\partial (a_x)^2}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3
\end{aligned}
$$

Da die Determinante A dieser Gleichungen nicht $= 0$ ist, so erhält man durch Auflösung derselben die Verhältnissabstände des Poles x einer Geraden v:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_{11}s_1v_1 + A_{12}s_2v_2 + A_{13}s_3v_3 \\
x_2 &= A_{21}s_1v_1 + A_{22}s_2v_2 + A_{23}s_3v_3 \qquad (30) \\
x_3 &= A_{31}s_1v_1 + A_{32}s_2v_2 + A_{33}s_3v_3
\end{aligned}
$$

wo die A_{ij} die Unterdeterminanten von A sind.

16. Wir wollen die Gleichung des Kegelschnitts auf ein Polardreieck als Axendreieck transformiren. Die Seiten t_1, t_2, t_3 desselben seien gegeben durch ihre wahren Knotenabstände nach folgender Tabelle:

	$\widehat{s_2s_3}$	$\widehat{s_3s_1}$	$\widehat{s_1s_2}$
t_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
t_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
t_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Indem wir die Transformationsformeln (24) pag. 123. anwenden, möge die Gleichung $(a_x)^2 = 0$ sich in

$$a'_{11}y_1^2 + a'_{22}y_2^2 + a'_{33}y_3^2 + 2a'_{12}y_1y_2 + 2a'_{13}y_1y_3 + 2a'_{23}y_2y_3 = 0$$

verwandeln. Wenn für irgend welche Punkte und Linien Pol- und Polarenbeziehungen stattfinden, wie sie durch die Gleichungen (28) bis (30) ausgedrückt sind, so gelten diese Beziehungen auch, wenn man in ihnen die alten Coefficienten und Coordinaten durch die neuen

ersetzt. Hieraus lässt sich aber folgern, dass in der neuen Gleichung die nicht quadratischen Glieder verschwinden. Um dies z. B. für $2a_{12}'y_1y_2$ und $2a_{13}'y_1y_3$ zu erkennen, wenden wir die Gleichungen (29) pag. 125. auf die Seite t_1 und deren Pol, die Ecke $\widehat{t_2t_3}$ an. Dann ist $y_2 = y_3 = 0$, $v_2 = v_3 = 0$, also

$$t_1v_1 = a_{11}'y_1$$
$$0 = a_{12}'y_2$$
$$0 = a_{13}'y_3$$

mithin $a_{12}' = a_{13}' = 0$, da y_1 nicht $= 0$ ist. Die neue Gleichung wird daher

$$a_{11}'y_1^2 + a_{22}'y_2^2 + a_{33}'y_3^2 = 0$$

Transformiren wir jetzt rückwärts mittels der Formeln (16) pag. 122., so können wir

$$(31) \qquad \begin{aligned} (a_x)^2 = {} & a_{11}'(s_1x_1\alpha_{11} + s_2x_2\alpha_{12} + s_3x_3\alpha_{13})^2 . m \\ & + a_{22}'(s_1x_1\alpha_{21} + s_2x_2\alpha_{22} + s_3x_3\alpha_{23})^2 . m \\ & + a_{33}'(s_1x_1\alpha_{31} + s_2x_2\alpha_{32} + s_3x_3\alpha_{33})^2 . m \end{aligned}$$

setzen, wo m ein constanter Factor ist.

Hiermit ist also nachgewiesen, dass die Function $(a_x)^2$ sich darstellen lässt als linearer Ausdruck aus den Quadraten von drei linearen Functionen, welche $= 0$ gesetzt, die Seiten eines Polardreiecks darstellen. Nur lineare Functionen von letzterer Eigenschaft können zu einer derartigen Zerlegung benutzt werden. Denn wenn wir die linearen Functionen, deren Quadrate in Gl. (31) vorkommen, mit f_1, f_2, f_3 bezeichnen, so hat die Polare eines Punktes x die Verhältnissabstände v_1, v_2, v_3 nach folgenden Gleichungen:

$$s_1v_1 = \frac{\partial(a_x)^2}{\partial x_1} = a_{11}'\alpha_{11}s_1f_1 + a_{22}'\alpha_{21}s_1f_2 + a_{33}'\alpha_{31}s_1f_3$$

$$s_2v_2 = \frac{\partial(a_x)^2}{\partial x_2} = a_{11}'\alpha_{12}s_2f_1 + a_{22}'\alpha_{22}s_2f_2 + a_{33}'\alpha_{32}s_2f_3$$

$$s_3v_3 = \frac{\partial(a_x)^2}{\partial x_3} = a_{11}'\alpha_{13}s_3f_1 + a_{22}'\alpha_{23}s_3f_2 + a_{33}'\alpha_{33}s_3f_3$$

Lässt man hier x z. B. den Durchschnittspunkt der Geraden $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ sein, so werden in vorstehenden Ausdrücken die zweiten und dritten Glieder $= 0$; und wenn man dann noch die gemeinsamen Factoren fortlässt, so hat die Polare von x die Verhältnissabstände $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ und die Gleichung $\alpha_{11}s_1x_1 + \alpha_{12}s_2x_2 + \alpha_{13}s_3x_3 = f_1 = 0$. Der Durchschnittspunkt von zweien der Geraden $f = 0$ hat also zur Polaren die dritte.

Um die Zerlegung von $(a_x)^2$ wirklich auszuführen, verfahren wir in folgender Weise.

Die Gleichungen der Seiten des Polardreiecks sind

$$f_1 = a_{11}s_1x_1 + a_{12}s_2x_2 + a_{13}s_3x_3 = 0$$
$$f_2 = a_{21}s_1x_1 + a_{22}s_2x_2 + a_{23}s_3x_3 = 0$$
$$f_3 = a_{31}s_1x_1 + a_{32}s_2x_2 + a_{33}s_3x_3 = 0$$

Wir setzen

$$(a_x)^2 = m_1f_1^2 + m_2f_2^2 + m_3f_3^2$$

und bestimmen die Coefficienten m. Zu dem Ende lassen wir die x nach einander die Verhältnissabstände des Durchschnittspunktes von $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$, von $f_3 = 0$ und $f_1 = 0$, von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ sein. Wenn wir dann die Determinante $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$, welche nicht $= 0$ ist, mit $\mathfrak{A}$ und ihre Unterdeterminanten mit $\mathfrak{A}_{ij}$ bezeichnen, so erhalten wir zur Bestimmung der m folgende (in den a symbolische) Gleichungen:

$$(a_1s_2s_3\mathfrak{A}_{11} + a_2s_3s_1\mathfrak{A}_{12} + a_3s_1s_2\mathfrak{A}_{13})^{II} = m_1s_1^2s_2^2s_3^2\mathfrak{A}^2$$
$$(a_1s_2s_3\mathfrak{A}_{21} + a_2s_3s_1\mathfrak{A}_{22} + a_3s_1s_2\mathfrak{A}_{23})^{II} = m_2s_1^2s_2^2s_3^2\mathfrak{A}^2$$
$$(a_1s_1s_2\mathfrak{A}_{21} + a_2s_3s_1\mathfrak{A}_{32} + a_3s_1s_2\mathfrak{A}_{33})^{II} = m_3s_1^2s_2^2s_3^2\mathfrak{A}^2$$

Da kein Eckpunkt des Polardreiecks auf dem Kegelschnitt liegt, so erhält man hieraus für alle m von Null verschiedene Werte. Dieselben sind entweder alle positiv oder alle negativ oder es sind zwei mit dem dritten von entgegengesetztem Zeichen. Bringt man dieselben in die Quadrate hinein, so erscheint $(a_x)^2$ als Summe der Quadrate von drei linearen Functionen, deren Coefficienten aber da, wo das Vorzeichen negativ war, imaginär sind.

17. Nach 16. können wir $(a_x)^2$ darstellen unter der Form:

$$(32)\quad (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 + (q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3)^2 + (r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3)^2$$

oder mit kürzerer Bezeichnung:

$$p_x^2 + q_x^2 + r_x^2$$

wo entweder die p, q und r sämmtlich reell oder sämmtlich rein imaginär, oder die p und q reell, die r imaginär, oder die p und q imaginär, die r reell sind.

Die Coefficienten von $(a_x)^2$ bestimmen sich aus den p, q und r nach folgenden Gleichungen:

$$(33)\qquad \begin{array}{ll} p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = a_{11} & p_2p_3 + q_2q_3 + r_2r_3 = a_{23} \\ p_2^2 + q_2^2 + r_2^2 = a_{22} & p_1p_3 + q_1q_3 + r_1r_3 = a_{13} \\ p_3^2 + q_3^2 + r_3^2 = a_{33} & p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = a_{12} \end{array}$$

dieselben Werte haben, so ist die Curve entweder eine geschlossene, oder sie hat Unterbrechungen im Unendlichen. Die Bedingungen, unter welchen das Eine oder Andere stattfindet, ein reeller Punkt der Curve im Unendlichen existirt oder nicht, ergeben sich, wenn man den Durchschnittspunkt der Curve mit der unendlich fernen Linie bestimmt. Setzen wir zu dem Ende in die Gleichung der letzteren

$$s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0$$

die Verhältnissabstände aus Gl. (38) ein, so erhalten wir:

(39) $$\Sigma\pm s_1q_2r_3\,.\cos\alpha+\Sigma\pm p_1s_2r_3\,.\sin\alpha-i\Sigma\pm p_1q_2s_3=0$$

oder, wenn wir die Determinanten Σ in dieser Gleichung mit P, Q, R bezeichnen:

(40) $$P\cos\alpha+Q\sin\alpha-iR=0$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man

(41) $$\cos\alpha=\frac{iPR\pm Q\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{P^2+Q^2}$$
$$\sin\alpha=\frac{iQR\mp P\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{P^2+Q^2}$$

Setzen wir diese Werte in Gl. (38) ein, so werden die Verhältnissabstände der unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts:

$$x_1:x_2:x_3=$$

$$-iR_1+\frac{i(P_1P+Q_1Q)R\pm(P_1Q-Q_1P)\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{P^2+Q^2}$$

$$:-iR_2+\frac{i(P_2P+Q_2Q)R\pm(P_2Q-Q_2P)\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{P^2+Q^2}$$

$$:-iR_3+\frac{i(P_3P+Q_3Q)R\pm(P_3Q-Q_3P)\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{P^2+Q^2}$$

Der Radicand der Wurzel ist

$$P^2+Q^2+R^2=$$
$$(s_1P_1+s_2P_2+s_3P_3)^2+(s_1Q_1+s_2Q_2+s_3Q_3)^2+(s_1R_1+s_2R_2+s_3R_3)^2=$$
$$(P_1^2+Q_1^2+R_1^2)s_1^2+(P_2^2+Q_2^2+R_2^2)s_2^2+(P_3^2+Q_3^2+R_3^2)s_3^2$$
$$+2(P_1P_2+Q_1Q_2+R_1R_2)s_1s_2+2(P_1P_3+Q_1Q_3+R_1R_3)s_1s_3$$
$$+2(P_2P_3+Q_2Q_3+R_2R_3)s_2s_3$$

Dies ist aber nach den Gl. (35):

ginäre Natur des durch die Gleichung $(a_x)^2 = 0$ dargestellten Kegelschnitts.

18. Wir ersetzen die Gleichung

$$p_x^2 + q_x^2 + r_x^2 = 0$$

durch folgende beiden

$$p_x = i r_x \cos\alpha$$
$$q_x = i r_x \sin\alpha$$

wo $i = \sqrt{-1}$; oder

$$(36)\quad (p_1 - ir_1\cos\alpha)x_1 + (p_2 - ir_2\cos\alpha)x_2 + (p_3 - ir_3\cos\alpha)x_3 = 0$$
$$(37)\quad (q_1 - ir_1\sin\alpha)x_1 + (q_2 - ir_2\sin\alpha)x_2 + (q_3 - ir_3\sin\alpha)x_3 = 0$$

Die Gleichung (36) stellt eine gerade Linie dar, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden $p_x = 0$ und $r_x = 0$ geht. Ebenso stellt (37) eine Gerade dar, welche sich mit $q_x = 0$ und $r_x = 0$ in einem Punkte schneidet. Der dritte Eckpunkt des so gebildeten Dreiecks ist ein Punkt des Kegelschnitts. Giebt man dem Winkel α die Werte $-\pi$ bis $+\pi$, so erhält man sämmtliche Punkte des Kegelschnitts als dritte Eckpunkte eines Dreiecks, von welchem zwei Seiten sich um die beiden anderen Eckpunkte so drehen, dass sie homographische Büschel bilden.

Aus den Gleichungen (36) und (37) erhält man

$$x_1 : x_2 : x_3 =$$
$$(p_2q_3 - p_3q_2) + (r_2p_3 - r_3p_2)i\sin\alpha + (q_2r_3 - q_3r_2)i\cos\alpha$$
$$:(p_3q_1 - p_1q_3) + (r_3p_1 - r_1p_3)i\sin\alpha + (q_3r_1 - q_1r_3)i\cos\alpha$$
$$:(p_1q_2 - p_2q_1) + (r_1p_2 - r_2p_1)i\sin\alpha + (q_1r_2 - q_2r_1)i\cos\alpha$$

oder gemäss früherer Bezeichnung (pag. 128.) und nach Multiplication mit $-i$:

$$x_1 : x_2 : x_3 =$$
$$(38)\quad \begin{aligned} &P_1\cos\alpha + Q_1\sin\alpha - iR_1 \\ &: P_2\cos\alpha + Q_2\sin\alpha - iR_2 \\ &: P_3\cos\alpha + Q_3\sin\alpha - iR_3 \end{aligned}$$

Für reelle Winkel α sind diese Verhältnissabstände reell, wenn die r imaginär sind, also auch nach (17) der Kegelschnitt reell ist. Die Proportion liefert dann, indem man α alle Werte von $-\pi$ bis $+\pi$ durchlaufen lässt, sämmtliche reelle Punkte des Kegelschnitts. Keine drei derselben können in gerader Linie liegen, da sonst die Gleichung $(a_x)^2 = 0$ in lineare Factoren zerfiele. Man erhält also eine stetig gekrümmte Curve ohne Winkelpunkte, Rückkehrpunkte, Inflexionspunkte und vielfache Punkte. Da $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ für $\alpha = +\pi$ und $\alpha = -\pi$

tungen, welche eine Gleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante haben kann, ergaben sich in 17. und 18. folgende Kriterien:

Wenn das Product aus der Determinante und einem ihrer Diagonalelemente sowie auch die einem der beiden anderen Diagonalelemente entsprechende Unterdeterminante positiv ist, so stellt die Gleichung kein reelles Gebilde dar. Ist jene Bedingung nicht erfüllt, so stellt sie einen reellen Kegelschnitt dar.

Wenn in letzterem Falle $(A_s)^2$, d. h. die Grösse, welche man erhält, wenn man in $(a_x)^2$ die Coefficienten durch die entsprechenden Unterdeterminanten und die x durch die Seiten des Axendreiecks ersetzt, positiv ist, so hat der Kegelschnitt keine unendlich entfernten Punkte; er ist also eine geschlossene Curve. Ellipse.

Wenn $(A_s)^2$ negativ ist, so besteht die Curve aus zwei durch unendlich ferne Punkte getrennten Teilen. Hyperbel.

Ist endlich $(A_s)^2 = 0$, so hat die Curve nur einen unendlich fernen Punkt. Parabel.

20. Dass jeder der unendlich fernen Punkte der Hyperbel nicht nach einer, sondern nach zwei einander entgegengesetzten Richtungen im Unendlichen liegt, folgt schon daraus, dass sonst gerade Linien existiren würden, welche die Curve in drei Punkten schnitten. Man erkennt es aber auch leicht direct. Es sei nämlich

$$s_1 u_1 x_1 + s_2 u_2 x_2 + s_3 u_3 x_3 = 0$$

die mit ihren wirklichen Knotenabständen u versehene Gleichung einer beliebigen geraden Linie, nur nicht einer solchen, auf welcher ein unendlih ferner Punkt der Hyperbel liegt. Wenn nun y_1, y_2, y_3 die durch Gl. (38) gegebenen Verhältnissabstände eines Punktes der Hyperbel sind, so ist nach 11. und weil $s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3$ gleich der linken Seite der Gl. (40) ist, der Quotient:

$$\frac{s_1 u_1 y_1 + s_2 u_2 y_2 + s_3 u_3 y_3}{P\cos\alpha + Q\sin\alpha - iR}$$

gleich dem Abstand des Punktes y von der Linie u. Für die Werte von α, für welche der Nenner $= 0$ wird, wird der Zähler nicht $= 0$, da die unendlich fernen Hyperbelpunkte nicht auf der Linie u liegen. Jenachdem also beim Durchgange von α durch diesen Wert der Nenner durch Null geht oder an der einen Seite von Null bleibt, wechselt der Abstand sein Zeichen oder nicht, und geht also der unendlich ferne Punkt von der einen Seite der Linie u auf die andere über oder nicht. Es fragt sich also, ob $P\cos\alpha + Q\sin\alpha + R$ für einen

der betreffenden Werte von α ein Maximum oder Minimum hat oder nicht. Setzt man das Differential $= 0$, also

$$-P\sin\alpha + Q\cos\alpha = 0$$

so wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Q}{P}$$

Für einen der unendlich fernen Punkte ist dagegen nach der Gl. (41)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-QR \mp P\sqrt{P^2+Q^2-R^2}}{-PR \pm Q\sqrt{P^2+Q^2-R^2}}$$

Dies kann nur $= \frac{Q}{P}$ sein, wenn die Wurzel $= 0$ ist. Der Ausdruck $P\cos\alpha + Q\sin\alpha + R$ hat also kein Maximum oder Minimum; die Curve springt daher in den unendlich fernen Punkten aus der Richtung nach einer Gegend in die nach der entgegengesetzten über und besteht somit aus zwei ganz getrennten Teilen derart, dass die Punkte des einen sich nirgends denen des anderen beliebig nähern.

21. Der Abstand eines Poles x von seiner Polare ist, wenn v_1, v_2, v_3 die wahren Knotenabstände der letzteren sind, nach (11):

$$q = \frac{s_1x_1v_1 + s_2x_2v_2 + s_3x_3v_3}{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3}$$

oder wenn man die Werte der x aus (30) einsetzt:

$$q = \frac{(A_{11}s_1v_1 + A_{12}s_2v_2 + A_{13}s_3v_3)s_1v_1 + (A_{21}s_1v_1 + A_{22}s_2v_2 + A_{23}s_3v_3)s_2v_2 + (A_{31}s_1v_1 + A_{32}s_2v_2 + A_{33}s_3v_3)s_3v_3}{(A_{11}s_1v_1 + A_{12}s_2v_2 + A_{13}s_3v_3)s_1 + (A_{21}s_1v_1 + A_{22}s_2v_2 + A_{23}s_3v_3)s_2 + (A_{31}s_1v_1 + A_{32}s_2v_2 + A_{33}s_3v_3)s_3}$$

Damit die Polare eine Tangente des Kegelschnitts sei, muss der Pol auf derselben liegen, also der Abstand $q = 0$ sein und es ist daher

$$(43)\quad A_{11}s_1^2v_1^2 + A_{22}s_2^2v_2^2 + A_{33}s_3^2v_3^2 + 2A_{12}s_1s_2v_1v_2 + 2A_{13}s_1s_3v_1v_3 + 2A_{23}s_2s_3v_2v_3 = 0$$

die Gleichung des Kegelschnitts in den Knotenabständen seiner Tangenten oder die K n o t e n g l e i c h u n g desselben.

Wenn man $\Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33} = \mathfrak{D}$ und $\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial A_{ij}} = \mathfrak{D}_{ij}$ setzt, so ist $\mathfrak{D}_{ij} = a_{ij}A$ und die Gleichung $(a_x)^2 = 0$ kann daher geschrieben werden:

$$(44)\quad \mathfrak{D}_{11}x_1^2 + \mathfrak{D}_{22}x_2^2 + \mathfrak{D}_{33}x_3^2 + 2\mathfrak{D}_{12}x_1x_2 + 2\mathfrak{D}_{13}x_1x_3 + 2\mathfrak{D}_{23}x_2x_3 = 0$$

Lassen wir demnach

$$\alpha_{11}v_1^2+\alpha_{22}v_2^2+\alpha_{33}v_3^2+2\alpha_{12}v_1v_2+2\alpha_{13}v_1v_3+2\alpha_{23}v_2v_3=0$$

als Knotengleichung eines Kegelschnitts ursprünglich gegeben sein, so erhalten wir daraus die Axengleichung desselben, indem wir die Determinante $\Sigma \pm \frac{\alpha_{11}}{s_1 s_1} \frac{\alpha_{22}}{s_2 s_2} \frac{\alpha_{33}}{s_3 s_3}$ bilden und deren Unterdeterminanten statt der $\mathfrak{D}_{ij}$ in Gl. (44) einsetzen.

22. Die Knotenabstände einer beliebigen geraden Linie seien v_1, v_2, v_3. Bestimmen wir die Abstände derselben von den zu ihr parallelen Tangenten des Kegelschnitts. Die Knotenabstände der letzteren sind v_1+p, v_2+p, v_3+p, wenn p der gesuchte Abstand ist. Setzen wir in Gl. (43) statt der v die um p vermehrten v, so wird dieselbe symbolisch:

$$[(A_1s_1v_1+A_2s_2v_2+A_3s_3v_3)+(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)p]^{II}=0$$

oder wenn wir

$$(45)\qquad \begin{aligned} &(A_1s_1v_1+A_2s_2v_2+A_3s_3v_3)^{II}=L \\ &(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)^{II}=N \\ &(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)\times(A_1s_1v_1+A_2s_2v_2+A_3s_3v_3)=M \end{aligned}$$

setzen:

$$L+2Mp+Np^2=0$$

also

$$(46)\qquad p=\frac{-M\pm\sqrt{M^2-LN}}{N}$$

Wenn N nicht $=0$ ist, d. h. nach 20., wenn die Curve keine Parabel ist, so hat man also immer zwei zu der Linie v parallele Tangenten, die aber nicht nach allen Richtungen der letzteren reell zu sein brauchen. Sollen die Abstände der Linie v von den beiden Tangenten entgegengesetzt gleich sein, so muss $M=0$ sein. Die Gleichung $M=0$ mit veränderlichen v ist aber die Gleichung eines Punktes; alle Geraden durch diesen Punkt liegen also in der Mitte zwischen den zu denselben parallelen Tangenten. Hieraus folgt aber, dass jede durch diesen Punkt gehende Sehne in demselben halbirt ist und dass sie die Berührungspunkte paralleler Tangenten verbindet. Denn zwei Paare von parallelen Tangenten bilden ein Parallelogramm, dessen Mittelpunkt der Punkt $M=0$ ist; und wenn die beiden Paare einander unendlich nahe sind, so fallen zwei Gegenecken mit den Berührungspunkten zusammen. Der Punkt M ist also der Mittelpunkt der Curve und es sind daher Ellipse und Hyperbel Kegelschnitte mit Mittelpunkt.

Die Verhältnissabstände des Mittelpunktes sind, wie man aus der Gleichung $M = 0$ erkennt:

$$
(47)\qquad
\begin{aligned}
\xi_1 &= A_{11}s_1 + A_{12}s_2 + A_{13}s_3\\
\xi_2 &= A_{21}s_1 + A_{22}s_2 + A_{23}s_3\\
\xi_3 &= A_{31}s_1 + A_{32}s_2 + A_{33}s_3
\end{aligned}
$$

Dass ein Durchmesser, d. h. eine Sehne durch den Mittelpunkt, die zu den Tangenten in seinen Endpunkten parallelen Sehnen halbirt, sowie andere Eigenschaften eines Polardreiecks, dessen eine Seite im Unendlichen liegt, während die beiden anderen conjugirte Durchmesser sind, ergeben sich auf gewöhnliche Weise.

Wenn man die Function $(a_x)^2$ in Bezug auf ein Polardreieck der erwähnten Art in drei Quadrate zerlegt, also etwa in Gl. (34) an die Stelle von $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ resp. $\alpha_{31}+\alpha, \alpha_{32}+\alpha, \alpha_{33}+\alpha$ setzt und nun α ins Unendliche wachsen lässt, während zugleich die beiden anderen Seiten des Dreiecks sich so ändern, dass letzteres ein Polardreieck bleibt, so convergirt $a_{33}'\alpha$ gegen eine bestimmte endliche Grenze, die wir a nennen wollen. Die Gleichung des Kegelschnitts kann also dann geschrieben werden:

$$\frac{a_{11}'}{a}\left(\frac{s_1x_1\alpha_{11}+s_2x_2\alpha_{12}+s_3x_3\alpha_{13}}{s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3}\right)^2+\frac{a_{22}'}{a}\left(\frac{s_1x_1\alpha_{21}+s_2x_2\alpha_{21}+s_3x_3\alpha_{31}}{s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3}\right)^2+1=0$$

wo

$$s_1x_1\alpha_{11}+s_2x_2\alpha_{12}+s_3x_3\alpha_{13}=f_1=0$$

und

$$s_1x_1\alpha_{11}+s_2x_2\alpha_{21}+s_3x_3\alpha_{31}=f_2=0$$

die mit den wahren Knotenabständen α versehenen Gleichungen zweier conjugirten Durchmesser sind. Die Ausdrücke in den Klammern sind nach 11. die senkrechten Abstände des Punktes x von diesen Durchmessern. Lässt man x einen Endpunkt eines der letzteren, etwa von $f_2 = 0$ sein, so wird

$$\frac{a_{11}'}{a}\left(\frac{s_1x_1\alpha_{11}+s_2x_2\alpha_{12}+s_3x_3\alpha_{13}}{s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3}\right)^2+1=0$$

und es ist also $\sqrt{-\frac{a}{a_{11}'}}$ der Abstand dieses Endpunktes von dem anderen Durchmesser $f_1 = 0$. Ebenso ist $\sqrt{-\frac{a}{a_{22}'}}$ der Abstand eines Endpunktes des letzteren von dem Durchmesser $f_2 = 0$. Bezeichnet man den Winkel der beiden conjugirten Durchmesser mit φ, so ist also

$$\frac{a_{11}'}{a}\left(\frac{f_1}{s_x \cos\varphi}\right)^2 \cos^2\varphi + \frac{a_{22}'}{a}\left(\frac{f_2}{s_x \cos\varphi}\right)^2 \cos^2\varphi + 1 = 0$$

die Gleichung des Kegelschnitts in den zu den conjugirten Durchmessern parallelen Coordinaten $\frac{f_1}{s_x \cos\varphi}$ und $\frac{f_2}{s_x \cos\varphi}$ und es sind $\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{-\frac{a}{a_{11}'}}$, und $\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{-\frac{a}{a_{22}'}}$ die conjugirten Halbmesser.

Irgend einer der Durchmesser ist der kleinste, oder es sind mehrere kleiner oder wenigstens nicht grösser als alle übrigen. Auf einem solchen stehen die Tangenten in seinen Endpunkten senkrecht. Dieser Durchmesser und der auf ihm senkrechte sind also conjugirte Durchmesser und da jeder derselben die zu dem andern parallelen Sehnen halbirt, so ist die Curve zu beiden symmetrisch.

Es sei PQ (Fig. 4.) ein kleinster Durchmesser, L und M die Tangenten in seinen Endpunkten. Die Curve kann in den Punkten P und Q entweder die concave oder die convexe Seite dem Mittelpunkte O zuwenden. Ersterer Fall entspricht offenbar dem der geschlossenen, letzterer dem der aus zwei getrennten Zweigen bestehenden Curve. Von beiden kann man sich hiernach eine klare Vorstellung machen. Die Ellipse hat zwei reelle auf einander senkrechte Durchmesser, bei der Hyperbel ist der eine imaginär.

Wenn in Gl. (46) $M = 0$ ist, so wird dieselbe

$$p = \pm\sqrt{-\frac{L}{N}} \tag{48}$$

Bedeuten nun die v in L die Knotenabstände der Hauptaxe, so muss $\frac{L}{N}$ positiv sein, da es parallel zur Hauptaxe keine Tangenten gibt. Lässt man jetzt v aus dieser Lage sich um den Mittelpunkt drehen, bis es zu derselben parallele Tangenten gibt, so ist L negativ geworden. Wegen der stetigen Aenderung von L muss also eine Grenzlage der Linie v bestehen, bei welcher L und daher auch $p = 0$ ist. Dann ist also die Linie v selbst eine Tangente. Der Berührungspunkt liegt aber im Unendlichen; denn wäre dies nicht der Fall, so würde in einer benachbarten Lage dieselbe mit der Curve vier Durchschnittspunkte haben. Wegen der Symmetrie existiren zwei solche Asymptoten.

Nehmen wir jetzt an, es sei $N = 0$, die Curve sei also eine Parabel. Nach Gl. (46) wird der Abstand p unendlich gross; die parallelen Tangenten sind unendlich weit von einander entfernt. Ein Teil der Curve liegt notwendig in endlicher Entfernung; zu den Tan-

genten an diesen gibt es also keine parallele Tangenten. Die Axenabstände des Mittelpunktes genügen der Gleichung der unendlich entfernten Linie, da $N=0$; der Mittelpunkt liegt also im Unendlichen und die Durchmesser, auf welchen auch hier die Mitten paralleler Sehnen liegen, sind parallel. Da man durch eine kleine Aenderung der Coefficienten von $(a_x)^2$ die Grösse N negativ machen kann, so kann die Curve als einer Ellipse oder Hyperbel mit sehr langer Hauptaxe benachbart betrachtet werden. Sie hat Aehnlichkeit mit einem Hyperbelzweig; jedoch sind die Asymptoten der Axe parallel und unendlich weit entfernt.

23. Die Gleichungen zweier einander ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte können wir symbolisch in den a darstellen durch

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^{II}=0$$

$$\{a_1[f_1+(x_1-f_1)g]+a_2[f_2+(x_2-f_2)g]+a_3[f_3+(x_3-f_3)g]\}^{II}=0$$

wo f_1, f_2, f_3 die Axenabstände des Aehnlichkeitspunktes und g der Proportionalitätsfactor ist. Um die zweite Gleichung wieder homogen zu machen, multipliciren wir, unter den x die wahren Abstände verstehend, f_1, f_2 und f_3 mit $\frac{s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3}{D}$. Alsdann können wir in beiden Gleichungen die x auch als Verhältnissabstände betrachten und wenn wir jetzt die Durchschnittspunkte der beiden Kegelschnitte mit der unendlich fernen Linie bestimmen, so ist in der zweiten Gleichung $s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3=0$ zu setzen, worauf auch g herausfällt und die zweite Gleichung also mit der ersten übereinstimmt. Aehnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte schneiden also die unendlich ferne Linie in denselben Punkten. Insbesondere haben alle Kreise mit dieser Linie dieselben beiden imaginären Durchschnittspunkte.

24. Sehr einfach erhält man die Knotengleichung eines beliebigen Kreises. Der Mittelpunkt desselben sei durch seine Axenabstände ξ_1, ξ_2, ξ_3 gegeben, der Radius $=r$. Die wahren Knotenabstände einer Tangente seien u_1, u_2, u_3; dann ist nach 11.:

$$\left(\frac{s_1u_1\xi_1+s_2u_2\xi_2+s_3u_3\xi_3}{s_1\xi_1+s_2\xi_2+s_3\xi_3}\right)^2=r^2$$

Um diese Gleichung in den u homogen zu machen, multipliciren wir sie mit der Gl. (9) und erhalten:

$$\left(\frac{s_1u_1\xi_1+s_2u_2\xi_2+s_3u_3\xi_3}{s_1\xi_1+s_2\xi_2+s_3\xi_3}\right)^2=$$

$$\frac{(u_2-u_3)^2(s^2-s_1^2)+(u_3-u_1)^2(s^2-s_2^2)+(u_1-u_2)^2(s^2-s_3^2)}{(s_1+s_2+s_3)[s_1(s^2-s_1^2)+s_2(s^2-s_2^2)+s_3(s^2-s_3^2)]}\cdot r^2$$

als allgemeine Knotengleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte
und dem Radius $= r$.

Wir wollen von dieser Gleichung ausgehen, um die imaginären Kreispunkte der unendlich fernen Linie wirklich zu bestimmen. Da es einerlei ist, welchen Kreis wir hierzu nehmen, so lassen wir ihn mit dem inneren Berührungskreise des Axendreiecks concentrisch sein, setzen also $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ und bestimmen den Radius aus der Gleichung

$$\frac{r^2(s_1+s_2+s_3)r^2}{s_1(s^2-s_1^2)+s_2(s^2-s_2^2)+s_3(s^2-s_3^2)} = 1$$

welche einen reellen Wert für r liefert. Die Knotengleichung des Kreises wird dann:

$$(s_1u_1+s_2u_2+s_3u_3)^2 =$$
$$(u_2-u_3)^2(s^2-s_1^2)+(u_3-u_1)^2(s^2-s_2^2)+(u_1-u_2)^2(s^2-s_3^2)$$

Die Glieder mit den Quadraten der u sind auf beiden Seiten dieselben. Denn links erhält man z. B. $s_1^2u_1^2$ und rechts $(2s^2-s_2^2-s_3^2)u_1^2 = s_1^2u_1^2$. Die Gleichung wird also

$$s_1s_2u_1u_2+s_1s_3u_1u_3+s_2s_3u_2u_3 =$$
$$-(s^2-s_3^2)u_1u_2-(s^2-s_2^2)u_1u_3-(s^2-s_1^2)u_2u_3$$

oder, wenn man $\frac{s_1^2+s_2^2+s_3^2}{2}$ für s^2 setzt, mit 2 multiplicirt und Alles nach rechts bringt:

$$0 = [(s_1+s_2)^2-s_3^2]u_1u_2+[(s_1+s_3)^2-s_2^2]u_1u_3+[(s_2+s_3)^2-s_1^2]u_2u_3$$

oder nach Division durch $s_1+s_2+s_3$ und indem man $\frac{s_1+s_2+s_3}{2} = \sigma$ setzt:

$$(49) \qquad 0 = (\sigma-s_1)u_2u_3+(\sigma-s_2)u_3u_1+(\sigma-s_3)u_1u_2$$

Um hieraus die Axengleichung des Kreises zu erhalten, muss man nach 21. den Coefficienten von u_iu_j durch s_is_j dividiren, die Unterdeterminanten bilden und diese als Coefficienten der Axengleichung nehmen. Jene Determinante ist nun

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sigma-s_3}{s_1s_2} & \frac{\sigma-s_2}{s_1s_3} \\ \frac{\sigma-s_3}{s_1s_2} & 0 & \frac{\sigma-s_1}{s_2s_3} \\ \frac{\sigma-s_2}{s_1s_3} & \frac{\sigma-s_1}{s_2s_3} & 0 \end{vmatrix}$$

Die Axengleichung wird also:

$$\frac{(\sigma-s_1)^2}{s_2^2 s_3^2} x_1^2 + \frac{(\sigma-s_2)^2}{s_1^2 s_3^2} x_2^2 + \frac{(\sigma-s_3)^2}{s_1^2 s_2^2} x_3^2 = 0$$

oder nach Multiplication mit $s_1^2 s_2^2 s_3^2$:

$$(50) \qquad s_1^2(\sigma-s_1)^2 x_1^2 + s_2^2(\sigma-s_2)^2 x_2^2 + s_3^2(\sigma-s_3)^2 x_3^2 = 0$$

Zur Bestimmung der Verhältnissabstände der unendlich fernen Punkte dieses Kreises benutzen wir nun die Proportion (42). Wir haben dann zu setzen:

$$\begin{vmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1(\sigma-s_1) & 0 & 0 \\ 0 & s_2(\sigma-s_2) & 0 \\ 0 & 0 & s_3(\sigma-s_3) \end{vmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} P_1 &= s_2 s_3(\sigma-s_2)(\sigma-s_3) \\ Q_2 &= s_1 s_3(\sigma-s_1)(\sigma-s_3) \\ R_3 &= s_1 s_2(\sigma-s_1)(\sigma-s_2) \end{aligned}$$

Die übrigen Unterdeterminanten sind $= 0$. Ferner ist

$$P = \begin{vmatrix} s_1 s_2 s_3 \\ q_1 q_2 q_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{vmatrix} = s_1 s_2 s_3(\sigma-s_2)(\sigma-s_3)$$

$$Q = \begin{vmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ s_1 s_2 s_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{vmatrix} = s_1 s_2 s_3(\sigma-s_1)(\sigma-s_3)$$

$$R = \begin{vmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{vmatrix} = s_1 s_2 s_3(\sigma-s_1)(\sigma-s_2)$$

Um endlich $(A_s)^2$ zu erhalten, hat man die Determinante der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} s_1^2(\sigma-s_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2(\sigma-s_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3^2(\sigma-s_3)^2 \end{vmatrix}$$

zu nehmen, jede Unterdeterminante derselben vom Index ij mit $s_i s_j$ zu multipliciren und die Producte zu addiren. Es ist also

$$(A_s)^2 = s_1^2 s_2^2 s_3^2[(\sigma-s_2)^2(\sigma-s_3)^2 + (\sigma-s_1)^2(\sigma-s_3)^2 + (\sigma-s_1)^2(\sigma-s_2)^2]$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Proportion (42) und bezeichnet $\frac{(A_s)^2}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}$ mit S, so wird nach den nötigen Reductionen:

$$x_1 : x_2 : x_3 =$$

$$(\sigma - s_2)^2 (s_3 - s_1) - (\sigma - s_3)^2 (s_1 - s_2) \pm (s_3 - s_2)\sqrt{-S}$$

$$:(\sigma - s_3)^2 (s_1 - s_2) - (\sigma - s_1)^2 (s_2 - s_3) \pm (s_1 - s_3)\sqrt{-S}$$

$$:(\sigma - s_1)^2 (s_2 - s_3) - (\sigma - s_2)^2 (s_3 - s_1) \pm (s_2 - s_1)\sqrt{-S}$$

Dies sind also die Verhältnissabstände der allen Kreisen in der Ebene gemeinsamen unendlich fernen imaginären Punkte, bezogen auf ein beliebig gelegenes Axendreieck, dessen Verhältnissseiten s_1, s_2, s_3 sind.

25. Es sei jetzt [illegible]

$$(\text{[illegible]}) = 0$$

die allgemeine Gleich[illegible]es in Knotenabständen u. Wenn die Determinant[illegible]chwindet, so zerfällt sie in zwei Factoren, welche [illegible] sind, zwei einzelne Punkte darstellen, die auch zu[illegible]en. Sind die Factoren imaginär, so genügt der [illegible] reelle Verbindungslinie der beiden imaginären Punkte [illegible] Punkte oder beide können im Unendlichen liegen und wenn dieselben imaginär sind, so kann die reelle Verbindungslinie die unendlich entfernte Linie sein.

Zerfällt die Gleichung nicht, so kann aus derselben die Axengleichung des durch sie dargestellten Kegelschnitts abgeleitet und auf diese die Kriterien für Hyperbel, Parabel und Ellipse angewandt werden. Oder man kann auch mit der Knotengleichung ganz so verfahren, wie es mit der Axengleichung geschehen ist.

Das in Vorstehendem auf einen Teil der Theorie der Kegelschnitte angewandte Verfahren auf die ganze analytische Geometrie der Ebene und des Raumes auszudehnen bleibt einem später herauszugebenden Lehrbuch vorbehalten.

XII.

Ueber Fusspunktcurven der Kegelschnitte.

Von

Adolf Ameseder,

ord. Hörer an der technischen Hochschule in Wien.

Für die Fusspunktcurve eines Kegelschnittes gilt der Satz:

„Die Brennpunkte des von den Doppelpunktstangenten umhüllten Kegelschnittes halbiren die zwischen dem Pole und den Brennpunkten des Directrix-Kegelschnittes gelegenen Strecken."

Die Fusspunktcurve eines Kegelschnittes T kann als das Erzeugniss einer Tangenten-Involution auf diesem Kegelschnitte mit unendlich ferner Involutionsaxe und eines der Tangenten-Involution projectivischen Strahlenbüschels $\varDelta$, dessen Strahlen senkrecht auf den ihnen entsprechenden Tangentenpaaren der Involution stehen, betrachtet werden.

Wir erkennen demnach die Fusspunktencurven der Kegelschnitte als Curven vierter Ordnung, sechster Classe, welche den Pol und die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten haben [1]).

Ich habe in der Abhandlung „Bemerkungen über das Erzeugniss eines eindeutigen Strahlenbüschels und eines zweideutigen Strahlensystems zweiter Classe" [1]) gezeigt, wie man die Tangenten in einem der Doppelpunkte construiren kann und will, um den aufgesetzten Satz zu beweisen, die Construction der Doppelpunktstangenten für einen der imaginären Kreispunkte etwa $\varDelta_1$ durchführen.

Es seien zu dem Ende ψ, ψ' die Brennpunkte des Trägerkegelschnittes T, der unendlich ferne Punkt des Strahles $\overline{\varDelta\psi}$ von $\varDelta$ sei

---

1) Siehe den Aufsatz X. p. 109.

α, der des ihm entsprechenden [1]), also auf ihm senkrechten Strahles sei α'.

Wir legen aus Δ_1 eine Tangente δ_1' an T, sie geht durch den einen reellen Brennpunkt ψ dieses Kegelschnittes und trifft die gegenüberliegende Seite $\overline{\Delta\Delta_2}$ des Doppelpunktsdreieckes in einem Punkte η, welcher mit α' verbunden eine $\overline{\Delta\psi}$ in L schneidende Gerade giebt. Der Punkt L mit Δ_1 verbunden liefert die gesuchte Doppelpunktstangente. Verbinden wir η mit α, so können wir η als Scheitel eines Strahlenbüschels betrachten gegen welches die Punktreihen $\Delta_1\Delta_2\alpha'\alpha$ und $\psi\Delta L\alpha$ perspectivisch liegen.

Der Annahme zufolge ist $(\Delta_1\Delta_2\alpha'\alpha) = -1$, es ist demnach auch $(\psi\Delta L\alpha) = -1$, und da α der unendlich ferne Punkt der Geraden $\overline{\Delta\psi}$ ist, ist L, der Schnittpunkt der Doppelpunktstangente mit $\overline{\Delta\psi}$, der Halbirungspunkt dieser Strecke.

Eine der aus Δ_2 an T gelegten Tangenten geht auch durch ψ, die ihr entsprechende Doppelpunktstangente geht daher auch durch L.

Es ist klar, dass man in derselben Weise zeigen kann, dass die andern zwei Doppelpunktstangenten von Δ_1 und Δ_2 sich in dem Halbirungspunkte L' der Strecke $\overline{\Delta\psi'}$ schneiden müssen.

Wir sind nun in der Lage das folgende Problem zu lösen:

„Es sind die Brennpunkte des von den Doppelpunktstangenten umhüllten Kegelschnittes, der reelle Doppelpunkt und eine Tangente in demselben gegeben, die dadurch bestimmte Fusspunktcurve ist zu construiren."

Es ist leicht die folgende Sätze als specielle Fälle des bewiesenen Satzes zu erkennen.

„Die Rückkehrtangenten der Limaçon in den imaginären Kreispunkten schneiden sich im Mittelpunkte ihres Grundkreises."

„Die drei Rückkehrtangenten der Kardioide treffen sich im Mittelpunkte des Grundkreises derselben."

„Die Inflexionstangenten der Lemniskate in den imaginären Kreispunkten treffen sich paarweise in den Brennpunkten derselben."

Wien, März 1879.

---

1) Jener Strahl von Δ, welcher parallel zu dem $\overline{\Delta\psi}$ entsprechenden Tangentenpaare von T ist.

XIII.

Zur Theorie der Fusspunktencurven der Kegelschnitte.

Von

Adolf Ameseder.

Anschliessend an die Abhandlung „Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ [1]) und die kurze Notiz „Ueber Fusspunktencurven der Kegelschnitte“ behandle ich die letztgenannten Curven in dem vorliegendem Aufsatze etwas eingehender. Es ist nicht so sehr meine Absicht mit derselben eine Reihe von neuen Sätzen dem mathematischen Publicum vorzulegen als vielmehr die in den citirten Arbeiten entwickelte Art der Untersuchung an diesen speciellen Curven durchzuführen.

1. „Die Fusspunktencurven der Kegelschnitte sind cyklische Curven vierter Ordnung, sechster Classe, welche den Pol und die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten haben. Die Doppelpunktstangenten im reellen Doppelpunkt sind die Normalen auf die aus diesem Punkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten“.

Liegt die Involutionsaxe p der erzeugenden Tangenten-Involution J im Unendlichen, sind also conjugirte Tangenten derselben parallel, und stehen die Strahlen des erzeugenden Strahlenbüschels Δ auf den ihnen entsprechenden Tangenten senkrecht, so ist klar, dass das Erzeugniss beider Strahlengebilde die Fusspunktencurve des Trägerkegelschnittes bezüglich Δ als Pol ist.

---

1) Sitzb. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Januarheft 1879. Diese Abhandlung betreffende Citate sind mit (I. A.) bezeichnet.

Die Tangenten-Involution J bildet auf der unendlich fernen Geraden eine Punktreihe $\varkappa$, der Schein derselben in Δ bildet mit diesem Strahlenbüschel eine rechtwinklige Strahlen-Involution, die Doppelstrahlen derselben schneiden die unendlich ferne Involutionsaxe in zwei Dppelpunkten der Curve, diese sind demnach die imaginären Kreispunkte. Legt man eine Tangente γ_1' aus Δ an T und betrachtet diese als Strahl von J, so steht der ihr entsprechende Strahl γ_1 von Δ senkrecht auf derselben, er ist die eine Doppelpunktstangente in Δ. Die Fusspunktencurve berührt den Träger T vierfach, die Berührungspunkte sind die Fusspunkte der aus Δ auf T gefällten vier Perpendikel.

Da die Bestimmung der Scheitel P_1 und P_2 des Kegelschnittsnetzes P, (I. A. Art. 6.) als der Pole der durch die imaginären Kreispunkte gehenden Geraden $\overline{\Delta\Delta_1}$, $\overline{\Delta\Delta_2}$ in vielen Fällen nicht möglich ist [1]) wird man die Schnittpunkte irgend einer Geraden mit der Fusspunktencurve in der Weise bestimmen, dass man die Punkte des der Geraden „zugeordneten" Kegelschnittes in der in (I. A. Art. 1.) angegebenen Art construirt; derselbe ist durch diese drei Punkte, den Pol der Geraden bezüglich T und den Mittelpunkt dieses Kegel-Kegelschnittes bestimmt.

Für die Lösung der Tangentenprobleme will ich ein anderes Verfahren angegeben, welches auf folgender Betrachtung beruht.

Es sei Δ (Fig. 1.) der Scheitel des erzeugenden Strahlenbüschels, also der Pol der Fusspunktencurve und T der Trägerkegelschnitt der Tangenten-Involution; ferner sei a ein beliebiger Curvenpunkt, ϱ der diesem Punkte zugeordnete Strahl von Δ, r die Verbindungslinie des Berührungspunktes n der ϱ entsprechenden Tangente der Involution mit Δ. Das Dreieck Δan ist bei a rechtwinklig, der über $\overline{\Delta n}$ als Durchmesser beschriebene Kreis k geht daher durch a. Dasselbe gilt für den dem Punkt a benachbarten Punkt a'.

Ist G die Verbindungslinie der Punkte a, a', so ist klar, dass wenn a' unendlich nahe an a rückt der Kreis k' mit dem Kreise k zusammenfällt und G in die dem Kreise k und der Fusspunktencurve in a gemeinschaftliche Tangente übergeht. Diese Ueberlegung giebt die bekannte Construction der Tangente in einem Curvenpunkte: „Man zeichnet den dem Dreiecke Δna umschriebenen Kreis, seine Tangente im Punkte a ist zugleich Tangente der Curve in diesem

---

1) Für die Kardioide und Lemniskate bietet die Bestimmung dieser Punkte keine Schwierigkeiten.

Punkte". Der geometrische Ort der Mittelpunkte m jener Kreise L, welche durch den Punkt $\varDelta$ gehen und die Gerade G berühren, ist eine Parabel $\mathfrak{P}$, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt und G zur Directrix hat.

Der Ort der Halbirungspunkte 0 der Strecken $\overline{\varDelta n}$ ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welchen wir kurz den bezüglich $\varDelta$ und T aequidistanten Kegelschnitt nennen wollen. Einer der Kreise L hat seinen Mittelpunkt m auf der Geraden $\overline{\varDelta n}$, wird G zur Curventangente in a, so fällt der Kreis L mit dem Kreise K zusammen.

Der Kreis K berührt in diesem Fall die Gerade G im Punkte a und gehört daher auch zum Systeme der Kreise L. Sein Mittelpunkt ist $m \equiv 0$, dieser liegt demnach sowohl auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ als auch der Parabel $\mathfrak{P}$ und zwar ist er ein Berührungspunkt beider Kegelschnitte; denn ist $00' \equiv t_1$ die Verbindungslinie der benachbarten auf r resp. r' gelegenen Punkte von Q und $mm' \equiv t_2$ die Verbindungslinie der auf denselben Strahlen von $\varDelta$ gelegenen Punkte der Parabel $\mathfrak{P}$, so ist leicht einzusehen, dass diese Verbindungslinie, wenn G in eine Curventangente übergeht, mit der in diesem Fall beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ in dem Punkte $m \equiv 0$ gemeinschaftlichen Tangente coincidiren. Die beiden Geraden $p' \equiv \overline{0'a'}$, $p \equiv \overline{0a}$ fallen auch mit dem aus dem Berührungspunkte 0 der Kegelschnitte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}$ auf G gefällten Perpendikel zusammen. Der Fusspunkt a desselben ist der Berührungspunkt dieser Curventangente.

Ist M ein beliebiger Punkt der Tangente G, so muss, weil letztere die Directrix von $\mathfrak{P}$ ist, die in M'' $(\overline{\varDelta M''} = \frac{1}{2}\varDelta M)$ auf $\overline{\varDelta M}$ gefällte Senkrechte eine Tangente der Parabel $\mathfrak{P}$ sein.

Um daher die sechs aus einem Punkte M an die Fusspunktencurve zu legenden Tangenten zu bestimmen, hat man diesen Punkt mit $\varDelta$ zu verbinden und in M'' die Senkrechte t auf $\overline{\varDelta M}$ zu fällen.

Die durch diesen Punkt gehenden Directricen jener sechs Parabeln $\mathfrak{P}$, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt und t zur Tangente haben und den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ berühren, sind die gesuchten Tangenten. Ihre Berührungspunkte ergeben sich als die Fusspunkte a der auf sie aus den Berührungspunkten der ihnen beigeordneten Parabeln P mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gefällten Perpendikel.

Diese Bestimmung hat das Missliche, dass man den Contour des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ zeichnen muss, und ich gebe deshalb eine andere Construction an, welche von dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ Umgang nimmt und eine möglichst einfache zu sein scheint.

Jene Parabel $\mathfrak{P}'$, deren Punkte N von $\varDelta$ zweimal so weit liegen

als die auf demselben Strahle gelegenen Punkte der Parabel $\mathfrak{P}$, hat die Eigenschaft, dass falls $\mathfrak{P}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in dem Punkte m berührt, sie den Trägerkegelschnitt T in dem auf demselben Strahle von $\varDelta$ gelegenen Punkt N berührt.

Dies wird klar, wenn man überlegt, dass die in dem $\mathfrak{P}'$ und T gemeinschaftlichen Punkte N an beide Kegelschnitte gelegten Tangenten τ_1, τ_2 parallel sind zu jenen in m an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten t_1, t_2; da aber die letztern zusammenfallen, falls G eine Tangente der Fusspunktencurve wird, coincidiren auch τ_1 und τ_2.

Die Parabel $\mathfrak{P}'$ hat G zur Scheiteltangente und $\varDelta$ zum Brennpunkt. Die Bestimmung der aus einem Punkte M der Ebene an die Fusspunktencurve C zu legenden Tangenten gestaltet sich folgenderweise:

„Man verbindet den Punkt M mit dem Pole $\varDelta$ und fällt in M die Senkrechte t auf $\overline{\varDelta M}$. Die Scheiteltangenten jener sechs Parabeln, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt, t zur Tangente haben und T berühren sind die durch M gehenden Tangenten von C.

Die Entfernung der Directrix G' der Parabel $\mathfrak{P}'$ ist von $\varDelta$ eine doppelt so grosse als jene der Geraden G, „um daher den Berührungspunkt der Tangente G zu bestimmen fällt man aus dem Halbirungspunkte m der Strecke $\overline{\varDelta N}$ auf G eine Senkrechte, ihr Fusspunkt ist der gesuchte Berührungspunkt."

Wir haben in dieser Untersuchung keine der Eigenschaften des Trägers T [Directrixcurve] als Kegelschnitt benutzt, und es gilt daher der folgende Satz:

2. „An die Fusspunktencurve C einer Curve $n$ter Ordnung T für einen beliebigen Punkt $\varDelta$ als Pol kann man aus einem Punkte M der Ebene so viele Tangenten legen als es Parabeln gibt, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt, die in M' $(\overline{\varDelta M'} = 2\overline{\varDelta M})$ auf $\overline{\varDelta M'}$ gefällte Senkrechte zur Tangente haben und die Curve T berühren. Die Berührungspunkte dieser Tangenten sind die den Berührungspunkten der ihnen beigeordneten Parabeln $\mathfrak{P}$ mit T in obiger Weise entsprechenden Punkte."

Berührt die Parabel $\mathfrak{P}'$ die Directrix T doppelt, so ist G eine Doppeltangente der Fusspunktencurve, die Bestimmung der Berührungspunkte geschieht ebenfalls in der oben angebenen Weise.

3. „Die Fusspunktencurve C einer Curve $n$ter Ordnung T für

einen beliebigen Punkt $\varDelta$ als Pol hat so viele Doppeltangenten als es Parabeln gibt, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt haben und T doppelt berühren etc."

Ebenso gilt der folgende Satz:

4. Die Fusspunktencurve C einer Curve $n$ter Ordnung für einen Punkt $\varDelta$ als Pol hat so viele Inflexionstangenten als es Parabeln gibt, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt haben und T osculiren etc." [1])

Ein analoger Satz gilt für Undulationstangenten etc.

Aus dem Satze 2. fliesst der folgende:

5. „Die Scheiteltangenten aller Parabeln, welche denselben Brennpunkt $\varDelta$ haben und eine Curve T berühren, umhüllen die Fusspunktencurve von T bezüglich $\varDelta$ als Pol."

Ebenso sind die folgenden Sätze leicht einzusehen:

6. „Alle Kreise, welche man über das zwischen einem Punkte $\varDelta$ und einer Curve T gelegene Stück als Durchmesser beschreiben kann, umhüllen die Fusspunktencurve von T bezüglich $\varDelta$."

7. „Man kann sich die Fusspunktencurve $n$ter Classe T auf unendlich viele Arten als das Erzeugniss eines besondern Kreisbüschels und einer Tangenten-Involution auf der Curve T entstanden denken. Die Kreise berühren sich im Pole $\varDelta$ der Fusspunktencurve. Die aus den $\varDelta$ diametral gegenüberliegenden Punkten dieser Kreise an T gelegten n Tangenten treffen den ihnen entsprechenden Kreis in Curvenpunkten."

Die oben angegebene Construction der Tangente in einem Punkte der Curve kann umgekehrt zur Lösung des folgenden Problems benutzt werden:

8. „Die Fusspunktencurve einer Curve T ist durch diese und den Pol $\varDelta$ gegeben, es ist der Berührungspunkt B der ebenfalls gegebenen Tangente t zu construiren."

Man zeichnet jene Parabel $\mathfrak{P}'$, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt und

---

1) Diesen Satz hat Herr Prof. Dr. Em. Weyr in seiner Abhandlung: „Construction des Krümmungskreises für Fusspunktencurven" im XIX. Bd. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. II. Abt. Februar-Heft 1869 [illegible] aufgestellt.

t zur Scheiteltangente hat, sie berührt T in dem, dem Berührungs-punkte B zugeordneten Punkte b. Die aus dem Halbirungspunkt m der Strecke $\overline{\Delta b}$ auf t gefällte Senkrechte trifft diese Tangente im Punkte B.

II.

1. „Die Fusspunktencurve des Kreises für einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol ist eine Curve vierter Ordnung, vierter Classe, welche die imaginären Kreispunkte zu Spitzen hat. Sie wird vom Trägerkreis in ihren Scheiteln berührt."

Die Verbindungslinie $\overline{\Delta P}$ (Fig. 2.) des Poles mit dem Mittelpunkt des Trägerkreises T trifft diesen rechtwinklig in den zwei Punkten s und s', diese sind daher die reellen Berührungspunkte der Fusspunktencurve und des Kreises T.

Bedient man sich der bekannten Construction der Krümmungskreise[1]), so überzeugt man sich, dass diese in den Punkten s und s' ganz ausserhalb der Curve liegen, und diese Punkte daher reelle Scheitel derselben sind.

2. „**Die Fusspunktencurve eines Kreises T mit dem Mittelpunkte P und dem Radius r für den Punkt Δ als Pol ist die Limaçon des Pascal des über $\overline{\Delta P}$ als Durchmesser beschriebenen Kreises k für den Punkt Δ mit dem Parameter r.**"

Beschreibt man über $\overline{\Delta P}$ (Fig. 2.) als Durchmesser den Kreis k, und sind p, p' zwei beliebige auf demselben Strahle x von Δ gelegene Punkte der Fusspunktencurve des Kreises T für Δ als Pol, ferner A der Schnittpunkt des Strahles x mit dem Kreise k; so ist $\overline{PA}$ senkrecht auf x, daher parallel zu $\overline{\pi p}$ und $\overline{\pi' p'}$ und es besteht demnach die folgende Relation:

$$\overline{\pi P} = \overline{pA} = \overline{P\pi'} = \overline{Ap'} = r,$$

aus welcher zu ersehen ist, dass p und p' conjugirte Punkte der Limaçon des Kreises k für Δ mit dem Parameter r sind.

3. „Die Limaçon hat eine eine eigentliche reelle Doppeltangente, welche in der Entfernung $\overline{SP} = \frac{4a^2+r^2}{4a}$ vom Mittelpunkt des

1) Siehe die citirte Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Em. Weyr: „Construction des Krümmungskreises der Fusspunktencurven."

Trägerkreises T senkrecht auf dem, durch den reellen Doppelpunkt Δ gehenden Radius dieses Kreises steht. Ihre Berührungspunkte sind symmetrisch gegen diesen Radius angeordnet, ihre gegenseitige Entfernung ist $B_1B_2 = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2r^2 - r^4}$, wobei r der Radius des Kreises T und $a = \overline{\Delta P}$ ist."

Jene Parabel $\mathfrak{P}'$, welche Δ zum Brennpunkt hat und den Kreis T doppelt berührt, hat wie leicht einzusehen die Gerade $\overline{\Delta P}$ zur Axe. Die Berührungspunkte beider Kegelschnitte liegen demnach symmetrisch gegen diese Gerade. Ist N einer der zwei Berührungspunkte, so haben $\mathfrak{P}'$ und T in diesem Punkte dieselbe Tangente t und dieselbe Normale n. Die letztere geht als Normale des Kreises T durch den Punkt P.

Die Geraden t und n schneiden aber als Tangente und Normale in einem Punkte der Parabel $\mathfrak{P}'$ die Axe $\overline{\Delta P}$ derselben in den Punkten P und α, die zu verschiedenen Seiten des Brennpunktes Δ von diesem gleich weit abstehen. Um daher den Punkt N zu bestimmen trägt man die Strecke $\overline{P\Delta}$ über Δ auf diese Gerade auf und zieht aus dem Endpunkte d derselben die Tangente t an T. Fällt man vom Brennpunkte Δ die Senkrechte σ auf t und aus dem Fusspunkt B_1 derselben das Perpendikel D auf $\overline{\Delta P}$, so ist diese Gerade die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{P}'$ und mithin die Doppeltangente der Limaçon.

Um einen Berührungspunkt der Doppeltangente zu bestimmen, construirt man die Directrix Δ' der Parabel $\mathfrak{P}'$, fällt also in dem Punkte δ, wobei $\overline{\delta S} = \overline{S\Delta}$ ist, eine Senkrechte Δ' auf $\overline{\Delta P}$; der Fusspunkt b_1 des aus N auf Δ' gefällten Perpendikels mit Δ verbunden giebt eine Gerade, welche D in dem einen Berührungspunkte trifft. Dieser ist offenbar mit dem Punkte B_1 identisch.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $d\Delta B_1 \sim dPN \sim B_1\Delta S$ ergeben sich, wenn man $\overline{\Delta P} = a$ setzt, folgende Gleichungen:

$$SP = \frac{4a^2 + r^2}{4a}, \quad \overline{B_1 S} = \frac{1}{4a}\sqrt{4a^2r^2 - r^4}$$

Die zwei imaginären Doppeltangenten der behandelten Curve sind die mit den imaginären Kreispunkten an dieselbe gelegten Tangenten, sie schneiden sich wie leicht einzusehen in einem Punkte der Geraden $\overline{\Delta P}$. Bezüglich der Rückkehrtangenten dieser Curve sowie der Kardioide und Lemniskate siehe die Notiz: „Ueber Fusspunktencurven der Kegelschnitte."

III.

1. „Die Fusspunktencurve eines Kreises T mit dem Radius r, für einen Punkt $\varDelta$ desselben als Pol ist eine Kardioide; sie hat den Pol zur Spitze und ist daher eine Curve vierter Ordnung, dritter Classe. Die Rückkehrtangente R in der reellen Spitze $\varDelta$ geht durch den Mittelpunkt P des Trägerkreises, die Doppeltangente D der Kardioide steht in dem Abstande $\frac{5r}{4}$ von D senkrecht auf R; ihre Berührungspunkte sind symmetrisch gegen R angeordnet und werden aus $\varDelta$ unter einem Winkel von 120^0 gesehen."

Der Identitätsbeweis der behandelten Fusspunktencurve mit der Kardioide ist in jenem für die Limaçon enthalten. Die Rückkehrtangente R (Fig. 3.) im Punkte $\varDelta$ steht senkrecht auf der in diesem Punkt an T gelegten Tangente, geht also durch den Mittelpunkt P des Trägerkreises.

Die Construction der Doppeltangente ist die dieselbe wie bei der Limaçon. Man trägt $\overline{P\varDelta}$ über $\varDelta$ bis α auf und zieht die Tangente t aus d an T, ihr Berührungspunkt sei N. Das Perpendikel σ aus $\varDelta$ auf t trifft diese in B_1, einem Berührungspunkte der auf R senkrechten Doppeltangente D. Es ist aus der Construction zu ersehen, dass das Dreieck $\varDelta PN$ gleichseitig ist, woraus folgt, dass:

$$S\varDelta B_1 = 60^0, \quad \overline{\varDelta P} = \frac{5r}{4} \quad \text{und} \quad \overline{B_1 S} = \frac{r}{4}\sqrt{3},$$

welche Relationen man auch aus den für die Limaçon aufgestellten erhält, wenn man $\alpha = r$ setzt.

2. Die Evolute der Kardioide ist wieder eine Kardioide, für welche der Radius des Grundkreises ein Drittel so gross ist, als jener bei der gegebenen." [1])

Man zeichne einen Kreis t (Fig. 3.), welcher den gegebenen T in $\varDelta$ berührt, und dessen Radius ein Drittel so gross als der des gegebenen Kreises T ist. Es sei x ein Strahl des Büschels $\varDelta$, x', x'' die ihm entsprechenden Tangenten der Involution. Verbindet man die Berührungspunkte π, π' dieser Tangenten, so erhält man das Rechteck $pp'\pi'\pi$. Von $\varDelta$ eine Senkrechte $\overline{\varDelta q}$ auf $\overline{\pi\pi'}$ gefällt und q mit p verbunden giebt die Normale τ der Kardioide C im

1) Siehe den analytischen Beweis in „Theorie der Kardioide" von Prof. K. Zahradnik. Archiv für Mathematik und Physik. Bd. 59.

Punkte p. Die Gerade $\overline{qp'}$ ist aus demselben Grunde die Normale ν' in p'.

Um den Krümmungsmittelpunkt M des Punktes p zu bestimmen [1]) fälle man vom Schnittpunkte a der Diagonalen des Rechteckes $p\Delta\pi q$ eine Senkrechte $\overline{ab}$ auf $\pi\pi'$, b mit Δ verbunden giebt auf ν den gesuchten Punkt M.

Da M der Schwerpunkt des Dreiecks $\Delta\pi q$ ist, ist:

$$\overline{\Delta M} = \tfrac{2}{3}\overline{\Delta b}$$

und in Folge der Construction

$$\overline{\Delta\delta} = \tfrac{2}{3}\overline{\Delta P},$$

daher

$$\overline{M\delta} \equiv x_0 \parallel \overline{\pi\pi'} \parallel x.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden $\overline{\Delta\pi}$ und des Kreises t mit L, so ist

$$\overline{\Delta L} = \frac{\overline{\Delta\pi}}{3},$$

es ist aber auch

$$\overline{qM} = \frac{2.\overline{aq}}{3} = \frac{\overline{\Delta\pi}}{3},$$

also

$$\overline{aL} = \overline{aM}$$

und daher

$$\overline{ML} \parallel \overline{\Delta q} \parallel x' \parallel x_0'.$$

Die Gerade $\overline{ML}$ geht also durch L und ist parallel zu der Tangente x' des Kreises T in π, sie ist also die Tangente des Kreises t in L.

Damit ist bewiesen, dass der Punkt M der Evolute der Kardioide C ein Punkt jener Kardioide C' ist, welche t zum Trägerkreis und δ zur Spitze hat.

Beschreibt man über $\overline{\delta L}$ als Durchmesser den Kreis k' und verbindet seinen Mittelpunkt ν mit M, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck νLM, welches $\overline{LM}$ zur Basis hat. Es ist Wkl. $\alpha_1 = \beta_1$.

Die Geraden $\overline{\nu L}$ und $\overline{\Delta\pi}$ stehen auf einander senkrecht ($\Delta L\nu$ im Halbkreis) und weil wie bewiesen wurde $\overline{aL} = \overline{aM}$, also $\alpha_2 = \beta_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, ist auch $\beta_1 + \beta_2 = 90^0$, es steht demnach auch $\overline{\nu M} \perp \nu$.

---

[1]) Prof. Dr. [illegible]: „Construction des Krümmungskreises etc.“



Die Normale τ der Kardioide C ist demnach die Tangente des Kreises k' im Punkte M und daher auch die der Kardioide C' in demselben Punkte.

Es ist leicht einzusehen, dass die Kardioide C mit ihrer Evolute C' dieselbe Rückkehrtangente hat, dass ferner die Doppeltangente der Evolute parallel zu der Doppeltangente der Evolvente ist.

Die Entfernung der Doppeltangente D' der Evolute von P ist $\frac{r}{4}$.

Bezeichnet man den Schnittpunkt von D' mit der Rückkehrtangente R mit S' und sind B_1', B_2' die Berührungspunkte von D', so besteht folgende Proportion:

$$B_1S : \overline{B_2'S'} = Sm : S'm,$$

daraus folgt:

3. „**Die wechselweisen Verbindungslinien der Berührungspunkte der Doppeltangenten der Kardioide und ihrer Evolute schneiden sich im Mittelpunkte des Grundkreises der erstern.**"

Es bedarf wohl keines Beweises, dass der Krümmungsmittelpunkt M' des Punktes p' mit δ verbunden eine Gerade giebt, die auch parallel zu x ist, dass ferner $qp' \equiv \tau'$ die Normale von C in p' die Tangente von C' in M' ist. Wir können also sagen:

4. „**Auf demselben Punkte x von Δ liegende Punkte der Kardioide haben jene Punkte der Evolute zu Krümmungsmittelpunkten, welche auf dem zu x parallelen Strahl x' von δ liegen.**"

Da der Winkel $\pi\Delta\pi' = 90^0$ ist, ist auch $\tau\tau' = 90^0$. Der Durchschnittspunkt q von τ und τ' liegt auf dem Kreise k.

5. „**Die Tangenten in auf demselben Strahle von δ liegenden Punkten der Evolute stehen auf einander senkrecht, der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes ist der Grundkreis der Kardioide.**"

Die Gerade τ' ist offenbar die Tangente des über $\Delta\pi$ als Durchmesser beschriebenen Kreises im Punkte q. Woraus mit Berücksichtigung des Satzes I. 6. folgt:

6. „Beschreibt man über die durch den Punkt Δ eines Kreises gehenden Sehnen als Durchmesser Kreise, so umhüllen diese eine Kardioide mit der Spitze Δ.

Jene Tangente dieser Kreise, welche den Berührungspunkten derselben mit der Kardioide diametral gegenüber liegen, umhüllen die Evolute der Kardioide."

Aus der Construction des Krümmungsmittelpunktes ergiebt sich, wenn man $\overline{\varDelta\pi}=m$ setzt, der Wert des Krümmungsradius für irgend einen Punkt: $\varrho = pa + aM = \frac{2m}{3}$. Bemerkt man, dass π und p „zugeordnete" Punkte sind, so kann man sagen:

7. „Die Krümmungsradien der Punkte der Kardioide verhalten sich wie die Entfernungen der diesen Punkten zugeordneten Punkte des Trägerkreises vom Pole $\varDelta$."

Setzt man $m = 2r$, so ist $\varrho = \frac{4r}{3}$.

8. „Der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels der Kardioide ist die Spitze der Evolute."

9. „Der Grundkreis der Kardioide ist der Krümmungskreis der Evolute im Scheitel."

Dieser Satz mit III. 5. verbunden giebt:

10. „Die Tangenten in Punkten der Kardioide, welche auf demselben Strahle von $\varDelta$ liegen, stehen auf einander senkrecht. Der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes ist der Krümmungskreis der Kardioide im Scheitel."

Der Krümmungsradius des Punktes p ist $\varrho_1 = \frac{2m}{3}$, jener des Punktes p' $\varrho_2 = \frac{2m'}{3}$. Die Strecken m und m' sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $\pi\varDelta\pi'$, es ist daher $m^2 + m'^2 = 4r^2$, oder also:

$$a) \quad \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \frac{16r^2}{9},$$

daraus fliesst der Satz:

11. „Die Summe der Quadrate der Krümmungsradien von auf demselben Strahle von $\varDelta$ liegenden Punkten der Kardioide ist constant."

Es sei k ein beliebiger durch $\varDelta$ und P gelegter Kreis; er schneidet die Kardioide in $\varDelta$ in zwei Punkten und in den imaginären Kreispunkten in vier Punkten und kann daher mit der Kardioide nur noch zwei Punkte gemein haben, welche immer reell sind. Um diese Punkte zu construiren, zeichne man den $\varDelta$ diametral gegenüber lie-



genden Punkt $\varDelta'$ des Kreises k, die Tangenten aus diesem Punkte an T treffen k in den gesuchten Punkten p_1' und p_2. Der Winkel $\varDelta P \varDelta'$ ist als Winkel im Halbkreis k ein rechter, der Winkel, welchen die in π_1' resp. π_2 berührenden Tangenten $\overline{\varDelta' p_1'}$, $\varDelta' p_2$ mit einander bilden, sei 2ψ, er wird durch $\overline{\varDelta\varDelta'}$ halbirt.

Derselbe Winkel erscheint auch bei P und zwar ist $\varDelta P \pi_1' = \psi$ und es ist daher, weil der π_1' diametral gegenüber liegende Punkt π_2' im Kreise T zugleich mit π_2 bezüglich R symmetrisch liegt: $\varDelta P \pi_1' = \psi$, also $\varDelta \pi_2 \pi_1' = \frac{\psi}{2}$. Ebenso liegt der π_2 gegenüber liegende Punkt π_1 mit π_1' symmetrisch gelegen, daher $\varDelta \pi_2' \pi_1' = \frac{\psi}{2}$.

Aus diesen Relationen folgt, wenn man $\overline{\varDelta \pi_1'} = m_1'$ und wie früher $\overline{\varDelta \pi_2} = m_2$ setzt:

$$m_1' = 2r \sin\frac{\psi}{2}, \quad m_2 = 2r \cos\frac{\psi}{2}$$

$$1) \ldots \quad \varrho_1' = \tfrac{2}{3} m_1' = \tfrac{4}{3} r \sin\frac{\psi}{2}, \quad \varrho_2' = \tfrac{2}{3} m_2 = \tfrac{4}{3} r \cos\frac{\psi}{2},$$

daher

$$2) \ldots \ldots \quad \varrho_1'^2 + \varrho_2'^2 = \tfrac{16}{9} r^2.$$

12. „Die Summe der Quadrate der Krümmungsradien von Punkten der Kardioide, welche auf demselben durch $\varDelta$ und P gelegten Kreise liegen, ist constant."

Vergleicht man die Gleichung 2) mit der Gl. 10. α und setzt man:

$$\varrho_1' = \varrho_1$$

so ist auch

$$\varrho_2' = \varrho_2$$

und man kann demnach sagen:

13. „Der durch den Punkt p_1 der Kardioide und $\varDelta$, P gelegte Kreis trifft dieselbe in einem Punkte p, dessen bezüglich R symmetrisch gegenüber liegender Punkt mit p_1 auf demselben Strahle von $\varDelta$ liegt."

„Jeder durch $\varDelta$, P gelegte Kreis schneidet die Kardioide in zwei Punkten, deren symmetrisch gelegene mit diesen wechselweise auf denselben Strahlen von $\varDelta$ liegen."

Aus Gl. 11. 1. ist weiter ersichtlich, dass

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_2'} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} \quad \text{ist.}$$

14. „Das Verhältniss der Krümmungsradien von Punkten p_1', p_2 der Kardioide, welche auf demselben durch Δ, P gelegten Kreise liegen, ist $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, wobei 2ψ der Winkel ist, welchen die Tangenten an T in den, den Punkten p_1', p_2 zugeordneten Punkten mit einander bilden."

Die Gerade $\overline{aq}$ (Fig. 3) umhüllt bei der Bewegung des Punktes π_2 auf dem Kreise T die Kardioide C'. Ihr Berührungspunkt M ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{aq}$ mit der Verbindungslinie des Punktes Δ und des Halbirungspunktes b der Strecke $\overline{\pi q}$. Diese Bemerkung giebt zu folgendem Satz Veranlassung:

15. „Sind T und k zwei feste im Punkte Δ sich berührende Kreise, und ist der Radius von k halb so gross als jener von T, ist ferner P der Mittelpunkt und π ein beliebiger Punkt des Kreises T; so umhüllt bei Bewegung des Punktes π auf T, die Verbindungslinie $\overline{aq}$ der Schnittpunkte der zwei Dreieckseiten $\overline{\Delta\pi}$ und $\overline{P\pi}$ mit k eine Kardioide."[1])

Man kann auch aus dieser Eigenschaften der Kardioide ableiten. Fällt π mit Δ zusammen, so übergeht die Erzeugende $\overline{aq}$ in die Tangente der Kreise in Δ, die Kardioide berührt demnach beide Kreise im Punkte Δ. Coincidirt π mit s, so sieht man, dass $\overline{\Delta s}$ die Rückkehrtangente der Kardioide ist. Für eine gewisse Lage von π wird $\overline{aq} \perp \overline{\Delta s}$, für die bezüglich $\overline{\Delta s}$ symmetrische Lage ebenfalls, daher hat die behandelte Curve eine auf ihrer Rückkehrtangente senkrechte Doppeltangente etc. Bemerkt man, dass der Trägerkreis der durch $\overline{aq}$ erzeugten Kardioide der Kreis t ist, dessen Radius zwei Drittel des Radius von k ist, so kann man folgende Aufgabe sehr einfach lösen:

16. „Es ist der Trägerkreis t, der Rückkehrpunkt δ und eine Tangente τ der Kardioide gegeben, der Berührungspunkt der letztern ist zu construiren."

Man zeichnet jenen Kreis k, dessen Radius um ein Drittel grösser ist als der des gegebenen und der diesen in dem δ diametral gegenüber liegenden Punkte Δ berührt. Er trifft τ in zwei reellen Punkten a, q, welche mit Δ und P verbunden (P ist der zweite Schnittpunkt

1) Durch Projection kann diese Erzeugungsart verallgemeinert werden.

von $\overline{\delta\varDelta}$ und k) den Punkt π geben. Der Halbirungspunkt h der Strecke $\overline{\pi q}$ mit $\varDelta$ verbunden trifft τ im gesuchten Punkt M.

IV.

1. „Die Fusspunktencurve der gleichseitigen Hyperbel für den Mittelpunkt als Pol ist die Lemniskate. Diese ist daher eine Curve vierter Ordnung, sechster Classe, welche den Pol und die imaginären Kreispunkte zu Doppel-Inflexionspunkten hat. Die Inflexionstangenten im reellen Doppelpunkt sind die Asymtoten der gleichseitigen Hyperbel."

Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel stehen auf einander senkrecht, ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden trennen demnach die imaginären Kreispunkte harmonisch und das Doppelpunktsdreieck ist daher sich selbst conjugirt. Die Doppelpunktstangenten in den drei Doppelpunkten sind Inflexionstangenten. Die Inflexionstangenten im reellen Doppelpunkt sind die Asymptoten, da sie auf einander senkrecht stehen [1]).

2. „Die Lemniskate hat zwei eigentliche Doppeltangenten, deren jede in der Entfernung $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ parallel zur Axe der Lemniskate läuft. Ihre Berührungspunkte werden aus dem Doppelpunkte $\varDelta$ unter einem Winkel von 120^0 gesehen und sind gegen $\varDelta$ und die Axen symmetrisch gelegen." [2])

---

1) Es gilt ganz allgemein:

„Ist ein Doppelpunkt einer rationalen Curve vierter Ordnung der Pol der gegenüber liegenden Seite des Doppelpunktsdreiecks bezüglich eines Trägerkegelschnittes T, so sind die Tangenten in demselben Inflexionstangenten."

Um diesen Satz zu beweisen, wähle man jenen Doppelpunkt $\varDelta_3$, welcher der Pol der gegenüber liegenden Seite $\overline{\varDelta_1\varDelta_2}$ des Doppelpunktsdreiecks bezüglich T ist, zum Scheitel des erzeugenden Strahlenbüschels. Die Seite $\overline{\varDelta_1\varDelta_2}$ ist dann die Involutionsaxe von J (I. A. Art. 2.). Die $\varDelta_3$ und J gemeinschaftlichen Strahlen fallen mit den Doppelstrahlen d_1, d_2 von J zusammen, daher die Verzweigungsstrahlen mit den Doppelpunktstangenten. Ein Verzweigungsstrahl v_1 wird von dem ihm entsprechenden Doppelstrahl d_1 in $\varDelta_3$ geschnitten; daher liegen auf v_1 und ebenso auf v_2 ausser $\varDelta_3$ keine weitern Curvenpunkte, und es sind daher diese Strahlen Inflexionstangenten der Curve in $\varDelta_3$. Daraus folgt unmittelbar, dass, wenn das Doppelpunktsdreieck sich selbst conjugirt ist, die sechs Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind.

2) Siehe: Prof. Dr. Em. Weyr: „Lemniskate in rationaler Behandlung" k. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. Prag 1873.

Die Scheitel des Kegelschnittsnetzes P coincidiren mit den drei Doppelpunkten der Lemniskate, daher sind in ihrer Ebene allen Geraden durch $\varDelta$ (Fig. 4.) gehende Kreise „zugeordnet“ (I. A. 6.). Infolge dessen ist die Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit der Lemniskate sowie die Lösung der Tangentenprobleme eine einfachere als im allgemeinen Fall.

Wir werden aber dennoch zur Bestimmung der Doppeltangenten jene Methode anwenden, welche wir am Beginne dieser Abhandlung kennen gelernt haben, da sie zu interessanten metrischen Relationen und einer einfachen Construction führt.

Es ist klar, dass jene reellen Parabeln, welche T doppelt berühren und $\varDelta$ zum Brennpunkt haben, die imaginäre Axe der Hyperbel zur Axe haben.

Beschreibt man mit der halben linearen Excentricität $\overline{\varDelta\psi}$ der gleichseitigen Hyperbel um den Punkt l $(\overline{l\varDelta} = \overline{\varDelta\psi})$ der imaginären Axe den Kreis k_2, so berührt dieser die Hyperbel doppelt, die Berührungspunkte B, B^{IV} sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem um $\varDelta$ mit der halben linearen Excentricität beschriebenen Kreise k_1 [1]).

Jene Parabel, welche $\varDelta$ zum Brennpunkt hat und k_2 doppelt berührt, berührt diesen Kreis (nach III. 1.) in den Punkten B, B^{IV}; sie ist demnach identisch mit der die Hyperbel T doppelt berührender Parabel $\mathfrak{P}_1'$.

Die gemeinschaftliche Tangente der drei Kegelschnitte T, k_2 und $\mathfrak{P}_1'$ in B sei t, sie geht durch den zweiten Schnittpunkt l' des Kreises k_1 mit der imaginären Hyperbelaxe. Die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{P}_1'$, mithin die eine Doppeltangente der Lemniskate, ergiebt sich als die, durch den Fusspunkt B, der aus $\varDelta$ auf t gefällten Senkrechten zu der reellen Axe der Hyperbel gezogene Parallele D_1.

---

1) Ein einfacher Beweis für die Richtigkeit des Gesagten ist der folgende: Die Gleichung der Hyperbel sei

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

demnach jene des Kreises k_2

$$x^2 + (y^2 - a\sqrt{2})^2 = 2a^2;$$

die Coordinaten des Punktes B sind $\left(a\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. Die Gleichung der Tangente in B ist:

$$x\sqrt{3} - y = a\sqrt{2},$$

welche identisch ist mit der Gleichung der Hyperbeltangente für denselben Punkt.

Der Punkt B_1 ist ein Berührungspunkt dieser Doppeltangente. Da die zweite Parabel $\mathfrak{P}_2'$, welche Δ zum Brennpunkt hat und T doppelt berührt mit P_1' bezüglich der Axe der Lemniskate symmetrisch gelegen ist, liegt auch die zweite reelle Doppeltangente D_2 mit D_1 gegen $\Delta\psi$ symmetrisch.

Ebenso leicht ist der Construction zu entnehmen, dass die zwei Berührungspunkte einer Doppeltangente symmetrisch gegen die imaginäre Hyperbelaxe liegen; dass ferner je zwei auf derselben Seite dieser Axe gelegene Berührungspunkte symmetrisch gegen die reelle Axe liegen.

3. „Es ist die Axe $\overline{SS'} = 2a$ der Lemniskate gegeben, die Doppeltangenten und ihre Berührungspunkte sind zu construiren."

Man ziehe durch den Halbirungspunkt Δ (Fig. 4.) der Axe eine Gerade α unter einem Winkel von 45^0 und schneide diese mit dem über $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreise $\mathfrak{k}$. Die Tangente t in dem einen Schnittpunkte M an diesen Kreis trifft die Axe im Brennpunkte ψ der, der Lemniskate beigeordneten gleichseitigen Hyperbel T. Beschreibt man mit $\overline{\Delta\psi}$ als Radius um Δ den Kreis k, und mit demselben Radius um den einen Schnittpunkt I dieses Kreises mit der in Δ auf $\overline{\Delta\psi}$ errichteten Normalen den Kreis k_2, so schneiden sich beide Kreise in zwei reellen Punkten B, B^{IV}. Das aus I auf $\overline{B\Delta}$ gefällte Perpendikel trifft diese Gerade in dem einen Berührungspunkt der Doppeltangente D_1, welche parallel zu $\overline{\Delta\psi}$ zu ziehen ist. Fällt man aus Δ eine Senkrechte auf $\overline{BI'}$, so ist der Fusspunkt B_1 ein Berührungspunkt der Doppeltangente D_2.

Will man das Ziehen der Senkrechten vermeiden, so zeichne man um I' als Mittelpunkt mit $\overline{I'\Delta}$ als Radius den Kreis k_2'. Die Sehnen $\overline{B\Delta}$ und $\overline{IB'}$ schneiden sich in B_2, die Sehnen $\overline{B'\Delta}$ und $\overline{I'B}$ in B_1.

Das Dreieck $BB'\Delta$ ist der Construction zu Folge gleichseitig und $\overline{BB'} \perp \overline{\Delta\psi}$, daher ist:

$$B\Delta\psi = 30^0, \quad \overline{B_2 n} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \overline{n\Delta} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Der nun mit $\overline{\Delta B_1}$ als Radius beschriebene Kreis trifft die Axe der Lemniskate in den Brennpunkten der letztern.

Da man aus Δ auf BB' nur eine reelle Normale ziehen kann, welche

mit der reellen Axe $\overline{\varDelta\psi}$ coincidirt, so berührt die Lemniskate die Hyperbeln in den Scheiteln, welche, da die Krümmungskreise dieser Punkte der Lemniskate diese in denselben nicht durchschneiden, auch Scheitel der letztern sind.

Der über $\overline{B\varDelta}$ als Durchmesser beschriebene Kreis $\mathfrak{K}$ berührt die Lemniskate in B_1. Er hat mit derselben in $\varDelta$ zwei Punkte und in den imaginären Kreispunkten vier Punkte gemein, da er durch den Punkt B geht, liegt er ganz ausserhalb der Lemniskate. Zeichnet man die Kardioide des Kreise k_2 für $\varDelta$ als Pol, so ist leicht einzusehen, dass diese mit der Lemniskate die eine Doppeltangente D_1 gemein hat und diese in denselben Punkten berührt.

Beide Curven haben in $\varDelta$ vier Punkte, in B_1 und B_1' vier weitere Punkte und in den imaginären Kreispunkten acht Punkte gemein. Die Kardioide liegt aber ganz ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$, daher die Lemniskate ganz innerhalb der Kardioide.

4. „Jene Lemniskate, welche mit einer Kardioide den Doppelpunkt und die Doppeltangente gemein hat und die letztere in denselben Punkten berührt, liegt ganz innerhalb der Kardioide.“

Um die Schnittpunkte einer Geraden G mit der Lemniskate zu bestimmen, construire man ihren Pol g bezüglich T. Jener Kreis k, welcher durch g, $\varDelta$ und den irgend einem Punkt L der Geraden zugeordneten Punkt L' geht, trifft T in jenen Punkten, deren Tangenten G in den gesuchten Schnittpunkten mit der Lemniskate schneiden.

Es ist zweckmässig als L den unendlich fernen Punkt der Geraden anzunehmen. Um den ihm zugeordneten Punkt L' zu bestimmen, ziehe man $x_\infty \parallel G$, der diesem entsprechende Strahl ξ_∞ des Büschels $P \equiv \varDelta$ (I. A. 1.) ist die Berührungssehne der auf x_∞ senkrecht stehenden Tangenten der Hyperbel T, also der x_∞ gleiche Durchmesser, welcher, da x_∞ parallel zu G ist, senkrecht auf $\overline{g\varDelta}$ steht [1]).

Die Polare des Punktes L_∞, welche durch g und $\varDelta$ geht, also mit $\overline{g\varDelta}$ coincidirt, trifft ξ_∞ in dem L_∞ zugeordneten Punkte L'_∞. Der G „zugeordnete“ Kreis $\mathfrak{k}$ hat daher mit ξ_∞ in $\varDelta$ zwei Punkte gemein, ist also der über $\overline{g\varDelta}$ als Durchmesser beschriebene Kreis. Daraus folgt:

---

1) Der einem Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel bezüglich der Axe symmetrisch gelegene steht senkrecht auf der dem ersteren conjugirten Richtung.

5. „Um die Schnittpunkte einer Geraden mit der Lemniskate zu construiren, beschreibe man über der Verbindungslinie des Poles der Geraden bezüglich der gleichseitigen Hyperbel mit ihrem Mittelpunkte als Durchmesser den Kreis, dieser schneidet die gleichseitige Hyperbel in vier Punkten, deren Tangenten die Gerade in den gesuchten Curvenpunkten treffen."

Will man die Schnittpunkte einer Tangente τ_1 der Träger-Hyperbel mit der Lemniskate bestimmen, so zeichne man über der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes b_1 mit Δ als Durchmesser den Kreis $\mathfrak{k}_1$. Dieser schneidet die Hyperbel ausser in b_1 in drei Punkten b_1', b_2', b_3', deren Tangenten (an T) τ_1', τ_2', τ_3' die Tangente τ_1 in Punkten der Lemniskate treffen. Zwei der Punkte b' sind imaginär, ausgenommen den Grenzfall, wenn der Kreis k_1 in eine Asymptote übergeht, also b_1 ein unendlich ferner Punkt der Hyperbel ist. Sieht man von den imaginären Tangenten ab, so kann man sagen:

6. „Die Lemniskate ist das Erzeugniss zweier confocaler besonderer Tangentensysteme einer gleichseitigen Hyperbel."

Der über $\overline{\Delta w}$ als Durchmesser beschriebene Kreis berührt nach früherem die Lemniskate in v.

7. „Die Enveloppe der über den Halbmessern einer gleichseitigen Hyperbel als Durchmesser beschriebenen Kreise ist eine Lemniskate."

8. „Der um den Berührungspunkt B_1 der Doppeltangente D_1 mit $\overline{B_1\Delta}$ als Radius beschriebene Kreis berührt die Lemniskate im Berührungspunkte B_2 der andern Doppeltangente D_2."

V.

1. „Die Fusspunktencurve der Parabel für einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol ist eine Curve dritter Ordnung, vierter Classe, welche den Pol zum Doppelpunkt hat. Sie schneidet die unendlich ferne Gerade ausser in den imaginären Kreispunkten in dem unendlich fernen Punkt der Parabeldirectrix." [1])

Die Parabel berührt die unendlich ferne Gerade, also die Seite

---

1) Siehe: Prof. Dr. Em. Weyr: „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse einzweideutiger Gebilde. Note C.". Teubner 1870.

$\overline{\Delta_1\Delta_2}$ des Doppelpunktsdreiecks; sieht man von dieser Geraden als Bestandteil der Curve ab, so ist der erste Teil des Satzes gerechtfertigt (I. A. Art. 12.).

Bewegt sich eine Tangente der Parabel vom Scheitel derselben gegen ihren unendlich fernen Punkt, so wird sie erst dann zur Parabelaxe parallel, wenn sie mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt; das auf diese Gerade gefällte Perpendikel, welches demnach senkrecht zur Parabelaxe ist, trifft die unendlich ferne Gerade im unendlich fernen Punkt der Parabeldirectrix. Auch hier berührt, wie im allgemeinen Fall, die Fusspunktencurve die Parabel in den Fusspunkten der aus Δ auf dieselbe gefällten Senkrechten.

Liegt der Pol auf der Parabel, so ist er eine Spitze der Cissoide und diese der dritten Classe, die Spitzentangente ist die Normale der Parabel in Δ.

2. „Der geometrische Ort der Fusspunkte der aus einem Brennpunkte eines Kegelschnittes auf die Tangenten gefällten Normalen, ist der diesem Kegelschnitt umschriebene und concentrische Kreis.“

Zwei Seiten des Doppelpunktsdreiecks, nämlich die aus dem Brennpunkte Δ nach den imaginären Kreispunkten gezogenen Strahlen sind Tangenten des Kegelschnittes T. Das Erzeugniss der Tangenten-Involution J und des Strahlenbüschels Δ zerfällt in diese zwei Geraden und einen T doppelt berührenden Kegelschnitt C^2. Dieser geht durch die imaginären Kreispunkte, ist also ein Kreis, welcher T in den Fusspunkten der aus Δ auf T gefällten Normalen, also in den Scheiteln dieses Kegelschnittes berührt.

Aus dem Satze I. 5. folgt unmittelbar:

3. „Die Enveloppe der über den Leitstrahlen eines Kegelschnittes als Durchmesser beschriebenen Kreise ist der diesen Kegelschnitt in den Hauptscheiteln berührende Kreis.“

Wien, den 13. März 1879.

XIV.

Theorie der negativen Fusspunktencurven.

Von

Adolf Ameseder.

---

1. Ist D eine ebene Curve $n$ter Ordnung und $n(n-1)$ter Classe und P ein fester Punkt ihrer Ebene, so schneidet jede durch P gehende Gerade σ die Curve D in n Punkten; die in diesen Punkten auf σ gefällten Senkrechten t umhüllen bei der Drehung des Strahles σ um P die negative Fusspunktencurve C der gegebenen Curve. Die Curve D wird die Directrix und der Punkt P der Pol der Curve C genannt.

Um die Classe der negativen Fusspunktencurve zu bestimmen sei G ein beliebiger Punkt der Ebene; der über $\overline{GP}$ als Durchmesser beschriebene Kreis k trifft die Curve D in $2n$ Punkten $m_1, m_2, \ldots m_{2n}$. Jeder dieser Punkte etwa m_1 mit G verbunden giebt eine durch diesen Punkt gehende Tangente von C, da Pm_1 senkrecht auf Gm_1 steht. Daraus folgt der Satz:

„Die Classenzahl der negativen Fusspunktencurve für irgend einen Punkt der Ebene als Pol ist doppelt so gross als die Ordnungszahl ihrer Directrix."

Ist der Pol P ein Punkt der Curve D, so schneidet ein jeder Kreis k die Directrix ausser in P in $(2n-1)$ Punkten.

„Die negative Fusspunktencurve einer Curve $n$ter Ordnung für einen Punkt derselben als Pol ist von $(2n-1)$ter Classe."

Ist D eine cyklische Curve, so schneidet jeder über $\overline{GP}$ als

Durchmesser beschriebene Kreis k dieselbe in $2(n-1)$ von den imaginären Kreispunkten verschiedenen Punkten.

„Die negative Fusspunktencurve einer cyklischen Curve $n$ter Ordnung für einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol ist von $2(n-1)$ter Classe."

Bemerkenswert ist noch der folgende Satz:

„Die negative Fusspunktencurve einer cyklischen Curve $n$ter Ordnung, welche die imaginären Kreispunkte und den Pol zu $\frac{n}{2}$fachen Punkten hat, ist von der $\frac{n}{2}$ten Classe."

2. Die unendlich ferne Gerade schneidet die Curve D in n Punkten $a_1 \ldots a_n$, die in diesen Punkten auf die durch sie gehenden Strahlen von P gefällten Senkrechten coincidiren mit der unendlich fernen Geraden, woraus folgt, dass diese eine $n$fache Tangente der negativen Fusspunktencurve von D ist. Doch auch die durch die imaginären Kreispunkte gehenden Strahlen Δ_1, Δ_2 sind $n$fache Tangenten von C, da die in den n Schnittpunkten eines solchen Strahles mit D auf ihn gefällten Normalen mit demselben zusammenfallen.

„Die unendlich ferne Gerade und die Verbindungslinien des Poles mit den imaginären Kreispunkten sind $n$fache Tangenten der negativen Fusspunktencurve einer Curve $n$ter Ordnung."

Ist P ein Punkt der Curve D, so sind Δ_1, Δ_2 $(n-1)$fache Tangenten etc. Ist D eine cyklische Curve, so ist die unendlich ferne Gerade eine $(n-2)$fache Tangente. Hat die Curve D die imaginären Kreispunkte zu $n$fachen Punkten, so ist die unendlich ferne Gerade überhaupt keine Tangente der Curve C, ausgenommen eine der Asymptoten fällt mit ihr zusammen.

3. Es sei G ein beliebiger Punkt der Ebene, k der über $\overline{GP}$ als Durchmesser beschriebene Kreis und b_1, b_2 zwei benachbarte Schnittpunkte dieses Kreises und der Curve D. Die Verbindungslinien t_1, t_2 der Punkte b_1, b_2 mit G sind wie bereits erwähnt Tangenten der negativen Fusspunktencurve C.

Denkt man sich b_1 mithin auch t_1 fest, während G also auch k mit der Lage von b_2 veränderlich sein mögen, und nähert sich dieser Punkt dem Punkte b_1 ins Unendliche, so rückt die Tangente t_2 unendlich nahe an t_1, ihr Schnittpunkt G mit der letztern, welcher immer auf k liegt, nähert sich einer festen Lage B.

Fällt b_2 mit b_1 zusammen, berührt also k die Curve D im Punkte b_1, so coincidirt die Tangente t_2 mit t_1, sie durchschneidet diese Tangente in ihrem Berührungspunkte B mit C.

Aus dieser Betrachtung fliesst folgende einfache Construction des Berührungspunktes irgend einer Erzeugenden der negativen Fusspunktencurve:

„Man construirt jenen durch P gehenden Kreis k, welcher D in b berührt, der zweite Schnittpunkt B der Erzeugenden t (t senkrecht auf $\overline{Pb}$ in b) mit dem Kreise k ist ihr Berührungspunkt."

Der b diametral gegenüberliegende Punkt b' des Kreises k erzeugt bei der Bewegung des Punktes b auf D eine Curve D', deren negative Fusspunktencurve für P als Pol die Enveloppe der Geraden Bb' ist; diese Gerade ist aber die Normale der Curve C im Punkte B, ihre Enveloppe demnach die Evolute von C.

7. „Die Evolute einer negativen Fusspunktencurve ist wieder eine solche für denselben Punkt P als Pol."

Die oben angegebene Construction des Berührungspunktes einer Erzeugenden der negativen Fusspunktencurve giebt zu folgender Definition derselben als Ortscurve Veranlassung:

„Dreht sich ein Kreis k um einen Punkt P seiner Peripherie derart, dass er eine Curve D umhüllt, so erzeugt der P diametral gegenüberliegende Punkt B des Kreises die negative Fusspunktencurve C der Curve D für den Punkt P als Pol. Der Mittelpunkt des Kreises k beschreibt auch eine negative Fusspunktencurve C', welche eine Verjüngung der Curve C ist. Beide Curven sind Parallelcurven."

4. Aus dem Pole P kann man an die Curve D $n(n-1)$ Tangenten legen. Eine dieser Tangenten sei τ und ihr Berührungspunkt β. Die in β auf τ gefällte Normale T ist eine Erzeugende der negativen Fusspunktencurve, der durch P gelegte Constructionskreis k, welcher D in β berührt, fällt mit der Geraden τ zusammen. Die Gerade τ kann als Kreis mit unendlich grossem Radius betrachtet werden, dessen zweiter Schnittpunkt B mit T demnach im Unendlichen liegt; woraus erhellt, dass T eine Asymptote der Curve C ist. Doch folgt dies auch daraus, dass die T benachbarte Erzeugende T' zu T parallel ist.

„Die negative Fusspunktencurve einer allgemeinen Curve $n$ter Ordnung hat $n(n-1)$ Asymptoten. Sie sind die Normalen der Directrix D in den Berührungspunkten der aus dem Pole an diese gelegten Tangenten."

Da die unendlich ferne Gerade eine $n$fache Tangente von C ist, hat sie mit dieser Curve $2n$ Punkte gemein und in Folge des letzten Satzes weitere $n(n-1)$ Punkte, also im Ganzen $n(n+1)$ Punkte.

„Die negative Fusspunktencurve einer allgemeinen Curve $n$ter Ordnung ist von der $n(n+1)$ten Ordnung."

5. Berührt ein durch P gelegter Kreis k die Curve D doppelt, etwa in den Punkten b_1 und b_2, so ist klar, weil der dem Punkte P diametral gegenüberliegende Punkt B des Kreises k sowohl der Berührungspunkt der durch b_1 als auch der durch b_2 gehenden Erzeugenden der negativen Fusspunktencurve ist, dass er ein Doppelpunkt derselben ist.

„Die negative Fusspunktencurve hat so viele Doppelpunkte als es Kreise k giebt, welche durch den Pol gehen und die Directrix doppelt berühren, und so viele $n$fache Punkte als es die Directrix $n$fach berührende Kreise des Netzes P giebt."[1]

Osculirt der Kreis k die Curve D im Punkte b, so durchschneiden sich im Punkte B drei unendlich nahe Tangenten der negativen Fusspunktencurve, welche den drei unendlich nahen Punkten in b entsprechen. Der Punkt B ist ein Rückkehrpunkt der Curve C und bB die Rückkehrtangente. Es gilt der Satz:

„Die negative Fusspunktencurve hat so viele Rückkehrpunkte als die Directrix durch den Pol gehende Krümmungskreise."

Herr Prof. Dr. Em. Weyr hat die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Krümmungskreise rationaler Curven in der Abhandlung: „Ueber die Singularitäten der zweiten Ordnung bei rationalen ebenen Curven"[2]) bestimmt; gestützt auf die Resultate dieser Untersuchung können wir sagen:

„Die negative Fusspunktencurve einer rationalen Curve $n$ter Ordnung für einen Punkt der Ebene als Pol hat $6(n-1)$ Rückkehrpunkte. Für einen Punkt derselben als Pol $3(2n-3)$ Rückkehrpunkte."

„Die negative Fusspunktencurve einer rationalen cyklischen Curve $n$ter Ordnung für einen Punkt der

1) Ist die Directrix eine rationale Curve $n$ter Ordnung, so ist die Anzahl der sich doppelt berührenden Kreise des Netzes P: $4(n-1)(2n-3)$.

2) Sitzb. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaft. vom 8. März 1872.

Ebene als Pol hat $6(n-2)$, für einen Punkt derselben als Pol $3(2n-5)$ Rückkehrpunkte."

6. Ist δ ein $m$facher Punkt der Directrix, so schneidet der durch ihn gehende Strahl σ von P die Directrix in ihm in m unendlich nahen aber nicht benachbarten Punkten; die auf σ in δ gefällte Normale d ist eine $m$fache Tangente der negativen Fusspunktencurve, denn angenommen δ sei ein eigentlicher $m$facher Punkt der Curve D und $x_1 \ldots x_m$ die Tangenten derselben in diesem Punkte, so entspricht nach Punkt 3. jeder Tangente x ein besonderer sie in δ berührender Kreis k des Netzes P, und jeder dieser m Kreise trifft d in einem zweiten Punkt B einem Berührungspunkt dieser $m$fachen Tangente.

„Einem $m$fachen Punkt der Directrix entspricht eine $m$fache Tangente der negativen Fusspunktencurve und zwar ist die letztere eine eigentliche oder ideelle, jenachdem der $m$fache Punkt ein eigentlicher oder isolirter ist."

Fallen μ Tangenten x des $m$fachen Punktes δ zusammen, so coincidiren auch μ Berührungspunkte der $m$fachen Tangente d.

Einem jeden Doppelpunkte der Directrix entspricht demnach eine Doppeltangente der negativen Fusspunktencurve und da die Ordnungszahl der letztern Curve durch eine Doppeltangente um zwei vermindert wird, ist auch der folgende Satz richtig:

„Die Ordnungszahl der negativen Fusspunktencurve wird durch einen Doppelpunkt der Directrix um zwei vermindert."

Eine rationale Curve $n$ter Ordnung hat $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte oder Doppel- und mehrfache Punkte, welche diese Anzahl ersetzen; die Ordnungszahl ihrer negativen Fusspunktencurve für einen Punkt der Ebene als Pol ist demnach und nach Punkt 4. von der $n(n+1)-2\frac{(n-1)(n-2)}{2}=2(2n-1)$ten Ordnung. Zu demselben Resultat können wir auch direct gelangen. Die Classenzahl einer rationalen Curve $n$ter Ordnung ist bekanntlich $2(n-1)$, daher die Anzahl der Asymptoten ihrer negativen Fusspunktencurve auch $2(n-1)$ und da diese die unendlich ferne Gerade zur $n$fachen Tangente hat, ist ihre Ordnungszahl $2n+2(n-1)=2(2n-1)$.

„Die Ordnungszahl der negativen Fusspunktencurve einer rationalen Curve $n$ter Ordnung ist $2(2n-1)$."

Der Satz in Punkt 4. kann nun folgend ausgesprochen werden:

„Die Ordnungszahl einer negativen Fusspunktencurve ist gleich der Summe aus der Classenzahl und der doppelten Ordnungszahl ihrer Directrix."

Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn der Pol P ein $m$facher Punkt der Directrix ist. An diese kann man aus P nur $\mu-2m$ von den Tangenten in P verschiedene Tangenten legen.

„Die negative Fusspunktencurve einer Curve $n$ter Ordnung, für einen $m$fachen Punkt derselben als Pol ist von der $(N-2m)$ten Ordnung, wobei N die Summe aus der Classenzahl und der doppelten Ordnungszahl der Directrix ist."

7. Den zwei unendlich nahen Tangenten, welche sich in einem Punkt b der Directrix durchschneiden, entsprechen die zwei benachbarten den Berührungspunkt B der Erzeugenden t der negativen Fusspunktencurve constituirenden Punkte; in derselben Weise entsprechen den drei unendlich nahen in einem Rückkehrpunkte $\varkappa$ der Directrix sich treffenden Tangenten drei unendlich nahe im Berührungspunkte B der $\varkappa$ zugeordneten Erzeugenden der Curve C coincidirende Punkte, sie bilden einen Inflexionspunkt der negativen Fusspunktencurve.

„Einem Rückkehrpunkt der Directrix entspricht eine Inflexionstangente der negativen Fusspunktencurve."

Eine Inflexionstangente vermindert die Ordnungszahl einer Enveloppe um Drei und wir können daher sagen:

„Ein Rückehrpunkt der Directrix vermindert die Ordnungszahl der negativen Fusspunktencurve um Drei."

Dieser Satz steht in vollkommener Uebereinstimmung mit dem in Punkt 4. bewiesenen Satz, dass die Ordnungszahl einer negativen Fusspunktencurve gleich der Summe aus der doppelten Ordnungszahl und der Classenzahl der Directrix ist, da durch einen Rückkehrpunkt die Classenzahl einer Curve um Drei vermindert wird.

Wien, den 13. März 1879.



Negative Fussp… ler Kegelschnitte.

A… ler.

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, zu zeigen, wie einfach sich die Untersuchung der negativen Fusspunktcurven der Kegelschnitte gestaltet, wenn man die Neuere Geometrie zu Hülfe nimmt.

Die genannten Curven wurden unseres Wissens synthetisch noch gar nicht und analytisch nur in dem Werke: „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" von Salmon d. b. v. Fiedler, als Beispiele der Enveloppen behandelt [1]).

I.

„**Die negative Fusspunktcurve eines Kegelschnittes, für einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol, ist eine Curve vierter Classe, sechster Ordnung. Sie hat die unendlich ferne Gerade und die Verbindungslinien des Poles mit den imaginären Kreispunkten zu Doppeltangenten; ferner vier Doppelpunkte und sechs Rückkehrpunkte.**"

Ein Strahlenbüschel p schneidet einen Kegelschnitt T in Punkten einer Punktinvolution J. Fällt man in diesen Punkten Senkrechte

---

1) Erst nachdem die Abhandlung: „Theorie d. negat. Fusspunktcurven" (siehe d. Vorige) dem Drucke übergeben war, haben wir bemerkt, dass einige der dort citirten Sätze sich bereits in dem genannten Werke von Salmon-Fiedler vorfinden.

auf die ihnen zugehörigen Strahlen $\mathfrak{x}$ von p, so schneiden sich diese paarweise in Punkten, welche auf der unendlich fernen Geraden eine zur Involution J projectivische Punktreihe x constituiren.

Das Erzeugniss beider Punktgebilde ist die negative Fusspunktcurve des Kegelschnittes T, für den Punkt p als Pol. Sie ist nach (I. A. Art. 1.)[1]) eine Curve vierter Classe, sechster Ordnung, da sie das Erzeugniss einer Punktreihe und einer dieser projectivischen Punktinvolution auf einem Kegelschnitte ist.

Der Schein $\varkappa$ der erzeugenden unendlich fernen Punktreihe x in p und das Strahlenbüschel $\mathfrak{x}$ bilden eine rechtwinklige Strahleninvolution. Die Doppelstrahlen derselben gehen durch die imaginären Kreispunkte, sie sind mit der unendlich fernen Geraden nach (I. A. Art. 1.) die drei Doppeltangenten der Curve.

Die unendlich ferne Gerade berührt die Curve in reellen oder imaginären Punkten, jenachdem der Kegelschnitt T eine Hyperbel oder Ellipse ist. Die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der in p auf die Asymptotenrichtungen von T gefällten Senkrechten mit der unendlich fernen Geraden, also die den unendlich fernen Punkten von T bezüglich der imaginären Kreispunkte harmonisch conjugirten Punkte.

Die Parabel berührt die unendlich ferne Gerade, und diese ist daher nach (I. A. Art. 12.)[2]) eine Inflexionstangente ihrer negativen Fusspunktcurve. Der Inflexionspunkt ist der dem unendlich fernen Parabelscheitel bezüglich der imaginären Kreispunkte harmonisch conjugirte Punkt, also der Schnittpunkt der Parabeldirectrix mit der unendlich fernen Geraden. Für die negative Fusspunktcurve der Parabel gilt demnach der folgende Satz:

„Die negative Fusspunktcurve der Parabel, für einen beliebigen Punkt der Ebene als Pol, ist eine Curve vierter Classe, fünfter Ordnung, mit vier Rückkehrpunkten. Sie hat die unendlich ferne Gerade zur Inflexionstangente und berührt dieselbe im unendlich fernen Punkt der Parabeldirectrix."

Diejenigen Sätze, welche sich als specielle Fälle der in der vorigen Abhandlung: „Theorie der negativen Fusspunktcurven" citirten

---

1) Siehe Art. 1. in: „Bemerkungen über das Erzeugniss eines Strahlensystems u. e. Strahlen-Involution 2ten Grades" (in d. Zeitschrift), od. „Ueber Curven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten", Sitzber. d. k. Akademie d. Wissensch. in Wien 1879. Jännerheft.

2) Siehe „Ueber Curven vierter Ordnung etc." Art. 12. S. 24.

Sätze ergeben, erwähnen wir nicht besonders, sondern verweisen auf die genannte Arbeit.

II.

„**Die negative Fusspunktcurve eines Kegelschnittes, für den Mittelpunkt als Pol, ist eine Curve vierter Classe, sechster Ordnung, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppel-Rückkehrtangente hat.**“

Die unendlich ferne Gerade ist die Polare des Mittelpunktes p bezüglich des Kegelschnittes T, also in diesem Falle die Polare der ihr gegenüberliegenden Ecke des Doppeltangenten-Dreiseites. Daher sind die Berührungspunkte derselben Rückkehrpunkte [1]).

Dies steht auch mit der Tatsache in Uebereinstimmung, dass weil im vorliegenden Falle die aus p an T gelegten Tangenten die Asymptoten dieses Kegelschnittes sind, die Asymptoten der Fusspunktcurve (siehe „Theorie d. negat. Fusspunktcurven“) mit der unendlich fernen Geraden coincidiren. Die Rückkehrpunkte sind die den unendlich fernen Punkten des Kegelschnittes bezüglich der imaginären Kreispunkte harmonisch conjugirten Punkte.

„**Die negative Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel, für den Mittelpunkt als Pol, ist eine Curve vierter Classe, sechster Ordnung. Sie hat die nach den imaginären Kreispunkten gerichteten Durchmesser der Hyperbel und die unendlich ferne Gerade zu Doppel-Rückkehrtangenten.**“

Die imaginären Kreispunkte trennen die unendlich fernen Punkte der gleichseitigen Hyperbel harmonisch und es ist daher das Doppeltangenten-Dreiseit bezüglich T sich selbst conjugirt [2]).

Die unendlich fernen Punkte der gleichseitigen Hyperbel sind demnach die Berührungspunkte der unendlich fernen Doppeltangente.

„**Die behandelte Curve hat zwei eigentliche reelle Doppelpunkte. Diese liegen auf der Nebenaxe der gleichseitigen Hyperbel, und zwar in der Entfernung der doppelten linearen Excentricität symmetrisch gegen den**

---

1) Siehe „Ueber rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Theil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen.“ Art. 1. Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. in Wien. Märzheft 1879.

2) Dieselbe Abhandlung. Art. 4.

Mittelpunkt. Die Doppelpunktstangenten bilden beiderseits mit der Nebenaxe Winkel von 30°.“

Aus dem für die Anzahl der Doppelpunkte einer negativen Fusspunktcurve $n$ter Classe aufgestellten Satze in der Abhandlung „Theorie d. neg. Fussp.“ folgt, dass die behandelte Curve zwei reelle Doppelpunkte hat. Ueber die Bestimmung der Lage der die Doppelpunkte fixirenden Kreise siehe „Zur Theorie der Fusspunktcurven der Kegelschnitte“ Art. IV. „Die Lemniskate“ (s. p. 158).

III.

„**Die negative Fusspunktcurve eines Kegelschnittes, für den Brennpunkt als Pol, ist eine Curve vierter Classe, vierter Ordnung, mit einem eigentlichen, auf der grossen Axe gelegenen Doppelpunkt. Sie hat die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente und die Verbindungslinien des Poles mit den imaginären Kreispunkten zu Inflexionstangenten.**“

Zwei Seiten des Doppeltangenten-Dreiseites, nämlich die aus dem Brennpunkte p nach den imaginären Kreispunkten gerichteten Strahlen sind Tangenten des Trägerkegelschnittes und daher Inflexionstangenten der negativen Fusspunktcurve. Die Curve ist daher von der vierten Ordnung (I. A. Art. 12).

Durch den Brennpunkt p geht nur ein T doppelt berührender Kreis, sein zweiter Schnittpunkt mit der Hauptaxe von T ist der reelle Doppelpunkt der behandelten Curve. Es ist auch leicht einzusehen, dass die Doppelpunktstangenten mit der genannten Axe gleiche Winkel bilden.

„**Die negative Fusspunktcurve der Parabel, für den Brennpunkt als Pol, ist eine Curve vierter Classe, dritter Ordnung, mit einem eigentlichen, auf der Axe gelegenen Doppelpunkt. Sie hat die aus den imaginären Kreispunkten an die Parabel gelegten Tangenten und die unendlich ferne Gerade, welche sie im Schnittpunkt mit der Parabeldirectrix berührt, zu Inflexionstangenten.**“

Da die Parabel dem Doppeltangenten-Dreiseit eingeschrieben ist, ist mit Hülfe des diesbezüglichen reciproken Satzes in (I. A. Art. 12.) die Richtigkeit des obigen leicht nachzuweisen.

IV.

„**Die negative Fusspunktcurve eines Kegelschnittes, für einen Punkt desselben als Pol, ist eine Curve dritter**

Classe, vierter Ordnung, mit drei Rückkehrpunkten. Sie hat die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente."

Liegt der Pol p auf dem Trägerkegelschnitt, so zerfällt nach (I. A. Art. 11.) das Erzeugniss der beiden Punktgebilde in den Punkt p und eine Curve dritter Classe. Sieht man von p als Bestandteil der Curve ab, so erscheint der aufgestellte Satz gerechtfertigt.

Aus dem für die Rückkehrpunkte geltenden Satz in „Theorie d. neg. Fussp." folgt, dass die behandelte Curve drei Rückkehrpunkte hat. Diese entsprechen jenen Krümmungskreisen, welche T in einem von p verschiedenen Punkte osculiren. Eine Ausnahme findet dann statt, wenn p ein Scheitel des Kegelschnittes ist. Denn in diesem Falle existiren nur zwei Krümmungskreise der bezeichneten Art. Der dem Punkte p des Krümmungskreises im Scheitel diametral gegenüberliegende Punkt ist auch ein Rückkehrpunkt der Fusspunktcurve, da sich in ihm auch drei unendlich nahe Tangenten derselben durchschneiden.

„Die negative Fusspunktcurve der Parabel, für einen Punkt derselben als Pol, ist eine Curve dritter Classe, dritter Ordnung, mit einem Rückkehrpunkt. Sie hat die unendlich ferne Gerade zur Inflexionstangente und berührt dieselbe im unendlich fernen Punkt der Parabeldirectrix."

Ist der Trägerkegelschnitt eine Parabel, so ist die unendlich ferne Gerade eine Inflexionstangente ihrer negativen Fusspunktcurve. Durch diese wird die Ordnungszahl um Eins, die Anzahl der Rückkehrpunkte um Zwei vermindert.

V.

„Die negative Fusspunktcurve eines Kreises, für einen Punkt p der Ebene als Pol, ist der dem Kreise eingeschriebene Kegelschnitt, welcher p zum Brennpunkt hat."

Die imaginären Kreispunkte sind Ecken des Doppeltangenten-Dreiseites, sie liegen im behandelten Falle auf dem Trägerkegelschnitt und das Erzeugniss der Punktgebilde [1]) besteht daher aus den imaginären Kreispunkten und einem den Kreis T doppelt berührenden

---

1) Der freundliche Leser wird ersucht auf Seite 23 (Zeile 12 von oben) der Abhandlnng „Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten" statt — „welcher dem Dreiecke $\varDelta_1 \varDelta_2 \varDelta_3$ umschrieben ist" — „welcher dem Zweiecke $\varDelta_1 \varDelta_2$ umschrieben ist" — zu lesen.

Kegelschnitt, welcher p zum Brennpunkt hat. Sieht man von den imaginären Kreispunkten ab, so ist obiger Satz nachgewiesen. Die durch die Berührungspunkte der aus p an den Kreis gelegten Tangenten gehenden Erzeugenden sind die Asymptoten des Kegelschnittes. Dieser ist eine Ellipse, wenn p innerhalb, eine Hyperbel, wenn p ausserhalb des Kreises liegt.

Der über der Verbindungslinie $\overline{Gp}$ eines beliebigen Punktes G der Ebene mit p als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet den Trägerkreis T nur in zwei von den imaginären unendlich fernen verschiedenen Punkten. Daraus folgt wieder, dass man aus jedem Punkte G nur zwei Tangenten an die behandelte Curve legen kann.

Ist p ein Punkt des Kreises T, so besteht das Erzeugniss der Punktgebilde aus vier Punkten, welche auf T liegen, den imaginären Kreispunkten, dem Punkte p und dem ihm diametral gegenüber liegenden.

VI.

„Die negative Fusspunktencurve einer Geraden T, für einen beliebigen Punkt p der Ebene als Pol, ist eine Parabel, welche den Pol zum Brennpunkt und die Gerade zur Scheiteltangente hat."

Dieser Satz folgt direct aus den letzten Betrachtungen. Da man die Gerade T im Verein mit der unendlich fernen Geraden als einen Kreis vom unendlich grossen Radius betrachten kann [1]).

Um den Berührungspunkt B der Parabel C mit einer Erzeugenden t zu bestimmen, construire man den Kreis k, welcher T in $b \equiv (tT)$ berührt und durch p geht. Sein zweiter Schnittpunkt mit t ist der gesuchte Berührungspunkt.

Der dem Punkte b diametral gegenüber liegende Punkt l von k, also der Schnittpunkt der in b auf T gefällten Senkrechten mit k, bildet mit p, b und B ein Rechteck.

Es ist klar, dass weil $\overline{lb} = 2\overline{mb}$ ist, (m ist eben der Halbirungspunkt der Strecke lb), der Punkt l bei der Bewegung des Punktes b auf T eine Parabel C' beschreibt, welche p zum Scheitel und einen halb so grossen Parameter als C hat.

Die Normale $n \equiv \overline{Bl}$ im Punkte B der Parabel C umhüllt die

---

1) Der Complex beider Geraden ist ein durch die imaginären Kreispunkte gehender Kegelschnitt.

Evolute derselben; welche, da n senkrecht auf t' ist, ($t' \equiv pl$), die negative Fusspunktcurve der Parabel C' für den Punkt p ist.

Daraus fliesst der Satz:

„Die negative Fusspunktcurve einer Parabel, für den Scheitel als Pol, ist die Neil'sche Parabel jener Parabel, welche den Pol zum Brennpunkt und einen doppelt so grossen Parameter als die gegebene Parabel hat. Die Neil'sche Parabel ist [illegible] dritter Ordnung, dritter Classe, welche den Krümmu[illegible] zweiten Parabel im Scheitel zum Rückkehrpunkt [illegible] unendlich ferne Gerade zur Inflexionstangente [illegible] unendlich fernen Punkt der Geraden T."

Wien, den 26. M[illegible]

XVI.

Astroiden.

Von

Adolf Ameseder.

I.

„Die Astroide eines Kegelschnittes ist eine Curve vierter Classe, sechster Ordnung, welche zwei conjugirte Durchmesser des Kegelschnittes und die unendlich ferne Gerade zu Doppel-Rückkehrtangenten hat.“

Eine Punktreihe und eine ihr projectivische Punkt-Involution auf einem Kegelschnitte erzeugen eine allgemeine Curve vierter Classe, sechster Ordnung [1]). (I. A. Art. I.).

Ist nun der Scheitel p_3, des Scheines der erzeugenden Punkt-Involution J, der Mittelpunkt des Trägerkegelschnittes T, und bildet das Strahlenbüschel p_2, mit dem Scheine δ_3, der unendlich fernen erzeugenden Punktreihe $\varDelta_3$ auf irgend einer Tangente t, des Kegelschnittes T, eine symmetrische Punkt-Involution, welche den Berührungspunkt b der Tangente zu einem Doppelpunkt hat; so erhält man als Erzeugniss der Punktgebilde J und $\varDelta_3$ eine besondere Curve vierter Classe, sechster Ordnung. Wir nennen diese Curve wegen ihrer nahen Beziehung zum Trägerkegelschnitt und ihrer Verwandtschaft zur orthogonalen Astroide (sie ist die centrale Projection derselben), die Astroide des Kegelschnittes T.

---

1) Siehe: „Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ Art. 1. Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. Wien, Januarheft 1879. od. „Bemerkungen über das Erzeugniss eines Strahlensystems und einer Strahlen-Involution 4ten Grades“ in dieser Zeitschrift. 1879.

Vor Allem ist klar, dass diese Curve die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat (I. A. Art. 1. u. 2.); sie hat aber auch die Doppelstrahlen der Strahlen-Involution p_3, δ_3, welche wie aus dem Gesagten erhellt conjugirte Durchmesser des Kegelschnittes sind zu Doppeltangenten. Die eine ist parallel zu t, die andere geht durch b.

Das Doppeltangenten-Dreiseit ist demnach bezüglich T sich selbst conjugirt, und daher sind die Berührungspunkte der Doppeltangenten Rückkehrpunkte [1]).

Sind p_2, p_1 die unendlich fernen Punkte der Doppeltangenten Δ_1, Δ_2; so sind die den Schnittpunkten ε_1', ε_2' des Kegelschnittes T mit der unendlichen fernen Geraden bezüglich p_1, p_2 harmonisch conjugirten Punkte ε_1, ε_2 die Berührungspunkte der unendlich fernen Doppeltangente.

Sie sind reell, und die unendlich ferne Gerade eine eigentliche Doppeltangente, wenn T eine Hyperbel ist, hingegen imaginär, wenn T eine Ellipse ist.

„Die Berührungspunkte der im Endlichen liegenden Doppeltangenten der Astroide liegen zu verschiedenen Seiten ihres Mittelpunktes in gleichen Abständen. Die Länge des Abstandes ist gleich der Länge des mit der beteffenden Doppeltangente zusammen fallenden Durchmessers des Trägerkegelschnittes.“ [2])

Um einen Berührungspunkt γ_1 der Doppeltangente Δ_1 zu construiren, verbinde man den einen Schnittpunkt γ_1' von Δ_1 und T mit p_2 und bestimme den Schnittpunkt L dieser Verbindungslinie mit $\overline{p_3\varepsilon_1}$. Die Gerade $\overline{L\varepsilon_1'}$ trifft Δ_1 in dem gewünschten Punkte γ_1. Die Punktreihen $p_1 p_2 \varepsilon_1' \varepsilon_1$ und $p_1 \gamma_1' \gamma_1 p_3$ liegen gegen L perspectivisch, es ist daher:

---

1) Siehe: „Ueber rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Teil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen.“ Art. 4. Sitzb. der k. Akademie d. Wissensch. Wien. Märzheft 1879. Die Astroiden gehören zu den, den in Art. 4. dieser Abhandlung behandelten reciproken Curven. Aus den dort citirten Sätzen folgt u. A. dass die Astroiden centrische Curven sind, etc.

2) Dieser Satz gilt für jede Curve vierter Classe, sechster Ordnung, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat. Und zwar für jenen Trägerkegelschnitt, welcher die Eigenschaft hat, dass die erzeugende Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden mit jener Punktreihe involutorisch liegt, welche von der, der erzeugenden Punkt-Involution zugehörigen Tangenten-Involution auf der unendlich fernen Geraden gebildet wird.

$$(p_1 p_2 \mathfrak{r}_1' \mathfrak{r}_1) = -1 = (p_1 \gamma_1' \gamma_1 p_3)$$

und da p_1 im Unendlichen liegt, ist $\overline{p_3\gamma_1'} = \overline{\gamma_1\gamma}$; womit der aufgestellte Satz nachgewiesen ist.

„Das zwischen den zwei Doppeltangenten Δ_1, Δ_2 gelegene Stück irgend einer Tangente der Astroide, ist gleich der Länge des ihr parallelen Durchmessers des Trägerkegelschnittes. Es wird durch den, der Tangente zugeordneten Schnittpunkt mit T halbirt."

Diese Eigenschaft der Curve fliesst aus der Construction.

Der Strahl $\mathfrak{x}_1$ des Scheines δ_3 der unendlich fernen erzeugenden Punktreihe giebt die Lage eines Punktes x_1 derselben an.

Er trifft t in einem Punkte m'; der diesem bezüglich b symmetrisch gegenüber liegende Punkt m, mit p_3 verbunden, liefert jenen Strahl x_1 von p_3, welcher auf T die x_1 entsprechenden Punkte x_1', x_1'' bestimmt.

Die, durch diese Punkte zu $\mathfrak{x}_1$ gezogenen Parallelen, sind zwei Erzeugende M_1', M_1'' der behandelten Curve. Fassen wir M_1' näher ins Auge. Sie trifft Δ_1 in dem Punkte β, welcher mit μ, dem m' zunächst liegenden Schnittpunkt von $\mathfrak{x}_1$ und T verbunden, eine zu x_1 parallele Gerade, also eine Erzeugende von C_4^6 liefert. Denn zieht man durch x_1' die Gerade s parallel zu t, so trifft diese T in einem Punkte μ, welcher auch auf $\overline{p_3 m'}$ liegt, also mit dem früher so bezeichneten Punkte identisch ist.

Daraus folgt nun, dass das Viereck $p_3 x_1' \beta\mu$ ein Parallelogramm ist, dass demnach

$$\overline{x_1'} \# \overline{\beta_3\mu}$$

und

$$\overline{\beta\mu} \# \overline{p_3 x_1'}.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt von M_1' und Δ_2 mit α und μ diametral gegenüber liegenden von T mit μ', so ist auch

$$\overline{\alpha x_1'} \# \overline{\mu' p_3}$$

und daher

$$\overline{\alpha\beta} \# \overline{\mu\mu'};$$

was zu beweisen war.

Man kann demnach die Astroide auch definiren, als Enve[loppe] aller Geraden, deren zwischen zwei festen sich sc[hneiden]denden Geraden gelegenes Stück gleich ist dem

selben parallelen Durchmesser irgend eines centrisch
Kegelschnittes der Ebene.

II.

In jedem Punkte einer Doppeltangente durchschneiden sich
Erzeugende, so in dem Punkte β der Doppeltangente Δ_1 die Gera
$\alpha\beta$ und $\mu\beta$. Rückt x_1', mithin auch μ unendlich nahe an b,
durchschneiden sich in dem dieser Lage entsprechenden Punkte
drei unendlich nahe Tangenten; woraus man wieder schliessen k
dass die Curve sechs auf den Doppeltangenten liegende Rückk
punkte hat. Für die Berührungspunkte der Doppeltangenten Δ_1,
ergiebt sich auch die bereits nachgewiesene Eigenschaft, dass we

$$\overline{x_1'\beta} = \overline{p_3\mu}$$

auch

$$\overline{p_3\beta_0} = 2\overline{p_3 b}$$

ist.

Ist T eine Ellipse und b' einer der Schnittpunkte der Dop
tangente Δ_2 mit T, so hat die zu bb' parallele Tangente γ des Ke
schnittes offenbar die Eigenschaft, dass ihr zwischen den Dop
tangenten Δ_1, Δ_2 gelegenes Stück der Länge nach gleich ist dem
parallelen Durchmesser von T. Sie ist eine T und C_4^6 gemeinsch
liche Tangente und nach (I. A. Art. 3.) ist auch ihr Berührungspu
mit T_1 der Berührungspunkt von C_1^6 mit T.

„Die Ellipse berührt demnach die Astroide in v
reellen Punkten, deren Tangenten parallel sind
Seiten des von den vier reellen Spitzen der Astro
gebildeten Parallelogrammes."

Ist T eine Hyperbel und b reell, so ist b' imaginär, wor
folgt, dass die Hyperbel die ihr zugehörige Astroide
vier imaginären Punkten berührt.

Die Asymptoten a, a' eines Kegelschnittes werden durch je
Paar conjugirter Durchmesser harmonisch getrennt; sie sind demn
entsprechende Strahlen der Strahlen-Involution $\mathfrak{x}$, x und ihre une
lich fernen Punkte, also die unendlich fernen Punkte des Keg
schnittes T einander entsprechende Punkte der erzeugenden Re
Δ_3 und des Schnittes $\mathfrak{x}'$ von x mit der unendlich fernen Geraden.

Den Schnittpunkten von T und Δ_3, als Punkten der Reihe
entsprechen in der Reihe Δ_3 nach (I. A. Art. 2.) die Berührun
punkte des Trägers dieser Reihen mit C_4^6; es gilt daher der Satz

„Die Astroide eines Kegelschnittes, berührt die unendlich ferne Gerade in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte. Die Berührungspunkte sind Rückkehrpunkte und reell, wenn T eine Hyperbel, imaginär, wenn T eine Ellipse ist."

Ist T ein Kreis, so stehen $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ auf einander senkrecht, und da alle Durchmesser des Kreises einander gleich sind, ist auch das zwischen $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ gelegene Stück der Erzeugenden constant.

Es ist leicht aus den Eigenschaften der allgemeinen Astroide die der orthogonalen abzuleiten. Bemerkenswert ist jedenfalls die Eigenschaft der orthogonalen Astroide, dass sie die unendlich ferne Gerade in den imaginären Kreispunkten berührt und diese Punkte zu Spitzen hat.

Wien, 29. Mai 1879.

XVII.

Untersuchung einer beliebigen Curve und eines ihr zugehörigen Krümmungskreises in Betreff des gegenseitigen Verhaltens an der Stelle der Osculation.

Von

Mack.

Ist auf irgend einer Curve zweiten Grades ein Punkt A in beliebiger Lage — nur nicht an der Stelle eines Scheitels — gedacht, so findet die Angabe statt, dass der zu A gehörige Krümmungskreis an der Stelle A selbst jene Linie durchschneide. Angesichts dieses allgemein bekannten Satzes drängt sich die Frage auf, was für die Curven überhaupt in entsprechender Beziehung zu sagen sei. Zu strenger Beantwortung derselben einfachste Mittel zu zeigen und eine doch wohl erhebliche Frucht ihrer Anwendung zu bieten ist der Zweck gegenwärtiger Arbeit. Dieselbe war nach kurzer Ueberlegung zurückzubringen auf die Auflösung und Erörterung der so zu fassenden

Aufgabe.

Es sei irgend ein Curvenbogen MN gegeben mit stetigem Verlaufe zwischen M und N. Für einen beliebig bestimmten Punkt A desselben sei angenommen, dass der zugehörige Krümmungskreis ein eigentlicher Kreis sei, weder in einen Punkt noch in eine Gerade ausgeartet. Man soll das gegenseitige Verhalten des Kreises und des Curvenbogens an der Stelle A genauer bestimmen.

Auflösung.

Die Aufgabe wird dadurch zu erledigen sein, dass man sowohl die Tangente als die Normale an A beizieht, dann auf der einen und der andern Seite der Normale je eine mit ihr parallele Gerade einführt, welche den Curvenbogen, den Kreisbogen und die Tangente der Reihe nach in Punkten Q, R, T schneidet. Die Untersuchung der gegenseitigen Lage solcher drei, dem Punkt A gehörig genäherten Punkte wird zum Ziele führen.

Es werden nun durch den Punkt A selbst zwei zu einander senkrechte Coordinatenaxen geführt, die eine, AX, mit der Tangente des Punkts A zusammenfallend, die andere, AY, mit der Normale. Als positiver Zweig der Axe AY werde derjenige bestimmt, welcher auf derselben Seite der Tangente liegt wie der Krümmungskreis. Auf dieser Seite also müssen auch die zwei von A aus zunächst nach rechts und links gehenden Curvenstückchen sich befinden, und es müssen die Ordinaten der dem Punkt A nächst liegenden Curvenpunkte alle positiv sein, sowie die Ordinate des Krümmungsmittelpunkts und die Ordinaten aller Peripheriepunkte des Krümmungskreises.

Während unter x der Abscissenwert eines beliebigen, unzweideutig bestimmten Punkts P des Curvenbogens MN verstanden wird, sei immer φ_x der Ausdruck für den zugehörigen Ordinatenwert, also φ_x eine bestimmte reelle Function von x.

Will man für solchen Punkt P den zugehörigen Krümmungskreis ermitteln, sind mit α, β die Coordinatenwerte seines Mittelpunkts und mit ϱ sein Halbmesser bezeichnet: so dienen bekanntlich zu diesem Zwecke die drei Gleichungen:

$$1)\quad (x-\alpha)^2+(\varphi_x-\beta)^2=\varrho^2$$

$$2)\quad (x-\alpha)+(\varphi_x-\beta)\varphi_x'=0$$

$$3)\quad \{1+(\varphi_x')^2\}+(\varphi_x-\beta)\varphi_x''=0.$$

Aus diesen erhält man

$$4)\quad \beta=\varphi_x+\frac{1+(\varphi_x')^2}{\varphi_x''}$$

$$5)\quad \alpha=x-\frac{\varphi_x'}{\varphi_x''}\{1+(\varphi_x')^2\}$$

$$6)\quad \varrho=(\pm 1)\cdot\frac{\{1+(\varphi_x')^2\}^{\frac{3}{2}}}{\varphi_x''}.$$

Für diese drei Angaben, damit sie brauchbar seien, ist erforderlich, dass für den einzuführenden Wert des x alle die drei zugehörigen

φ_x, φ_x', φ_x'' reell seien. Dabei ist aber durch unsre Annahme der Begrenztheit des Curvenbogens MN ausgeschlossen die Möglichkeit $\varphi_x = \infty$. Sodann ist $\varphi_x' = \infty$ auszuschliessen, sofern die Tangente des Punkts P nicht auf der Tangente AX des Punkts A senkrecht sein soll. Ferner $\varphi_x'' = 0$ ausgeschlossen, sofern ϱ nicht unendlich gross werden darf; endlich $\varphi_x'' = \infty$ unendlich ausgeschlossen, sofern ϱ nicht Null sein soll.

Bei der Gleichung 6), sofern sie den Wert ϱ positiv liefern muss, ist wohl zu beachten, dass rechts der Ausdruck über dem Bruchstrich als absolute Wurzel aus einem positiven Radicandum aufzufassen, dass demnach von den Factoren $+1$, -1 der erste oder der zweite zu nehmen sei, jenachdem φ_x'' positiv oder negativ sich zeige.

Wenn wir aus 6) noch die Ableitung ϱ_x' von ϱ_x entwickeln, so ergibt sich

$$7) \quad \varrho_x' = (\pm 1) . \frac{3\{1+(\varphi_x')^2\}^{\frac{1}{2}} . \varphi_x' . (\varphi_x'')^2 - \varphi_x''' . \{1+(\varphi_x')^2\}^{\frac{3}{2}}}{(\varphi_x'')^2}$$

Für den Brennpunkt $P(x, \varphi_x)$ ist die Möglichkeit, dass der zugehörige Krümmungshalbmesser ein Maximum oder ein Minimum werde, so lange vorhanden, als $\varrho_x' = 0$ sein kann. Soll also diese Möglichkeit vollständig ausgeschlossen sein, während ϱ einen brauchbaren positiven Wert habe, so ist gemäss der 7) und mit Beiziehung der vorigen Bemerkungen die Forderung auszusprechen:

$$8) \quad 3\{1+(\varphi_x')^2\}^{\frac{1}{2}} . \varphi_x' . (\varphi_x'')^2 - \varphi_x''' . \{1+(\varphi_x')^2\}^{\frac{3}{2}} \lessgtr 0.$$

Machen wir nun die Anwendung auf den Fall $x = 0$, d. h. auf Ermittlung des zu Punkt A gehörigen Krümmungskreises unsres Curvenbogens.

Der Nullwert für x in die Ausdrücke φ_x, φ_x' eingeführt muss gemäss obiger Einleitung $\{A$ der Axenursprung, AX Tangente an $A\}$ herbeiführen

$$9) \quad \varphi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_0' = 0.$$

Werden dann diese Werte in die Gleichungen 4) ... 6) eingeführt, so ergeben sich für den Mittelpunkt des zu A gehörigen Krümmungskreises die Coordinatenwerte α_0, β_0 entwickelt

$$10) \quad \alpha_0 = 0$$

$$11) \quad \beta_0 = 1 : \varphi_0''$$

und ergibt sich für den Halbmesser ϱ_0 zunächst

$$\text{☾)} \quad \varrho_0 = \frac{\pm 1}{\varphi_0''}.$$

Der für β_0 gewonnene Wert ist unzweideutig; und da nach unsern Veranstaltungen β_0 notwendig positiv ausfallen muss, so entnehmen wir aus 11), dass φ_0'' positiv sein müsse. Hierdurch ist auch für die Gleichung ☾) die Entscheidung in Betreff der Zeichen $+$ oder $-$ gegeben, und wir erhalten sofort unzweideutig

$$12)\quad \varrho_0 = 1 : \varphi_0''.$$

Wird die Bedingungsformel 8) mit Bezug auf den Punkt A genommen, wobei gemäss der 9) sowohl für φ_0 als φ_0' der Nullwert einzusetzen ist, so erhält man ganz einfach

$$13)\quad \varphi_0''' \gtrless 0.$$

Dies ist also die Bedingung dafür, dass der zu A gehörige Krümmungshalbmesser weder ein Maximum noch ein Minimum sei, während durch $\varphi_0''' = 0$ diese Möglichkeiten offen gelassen würden.

Bilden wir jetzt die Gleichung des zu A gehörigen Krümmungskreises, so ist ja zunächst anzugeben

$$(y-\beta_0)^2 + (x-\alpha_0)^2 = \varrho_0^2;$$

da aber $\beta_0 = \varrho_0$ und $\alpha_0 = 0$ gefunden ist, so erhält man einfach

$$y^2 - 2\varrho_0 y + x^2 = 0$$

oder nach y auflösend

$$y = \varrho_0 \pm \varrho_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{\varrho_0^2}}.$$

Statt dieser auf die ganze Ausdehnung des Kreises sich beziehenden Gleichung genügt für unsern Zweck diejenige, welche nur dem in A halbirten Halbkreisbogen entspricht. Diese lautet unzweideutig

$$y = \varrho_0 - \varrho_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{\varrho_0^2}};$$

und wenn jetzt für ϱ_0 der Wert $1 : \varphi_0''$ eingesetzt wird, so ergibt sich

$$14)\quad y = \frac{1}{\varphi_0''} - \frac{1}{\varphi_0''}\sqrt{1-(\varphi_0''x)^2}.$$

dafür mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$y = \frac{1}{\varphi_0''}\left\{1 - \left[1 - \tfrac{1}{2}(\varphi_0''x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}{1.2}(\varphi_0''x)^4 - \dots\right]\right\}$$

oder endlich

$$15)\quad y = \tfrac{1}{2}\varphi_0''x^2 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}{1.2}(\varphi_0'')^3x^4 + \ldots$$

Hiermit ist also namentlich für jeden in der Nähe von A befindlichen Punkt des Krümmungskreises die Entwicklung seines Ordinatenwertes nach Potenzen seines Abscissenwertes x angegeben.

Bilden wir jetzt ebenso die Entwicklung für den Ordinatenwert φ_x eines mit Abscissenwert x versehenen Punktes von unserem Curvenbogen MAN. Wir haben nach dem Maclaurin'schen Satze zunächst

$$\varphi_x = \varphi_0 + \varphi_0'x + \varphi_0''\frac{x^2}{2!} + \varphi_0'''\frac{x^3}{3!} + \varphi_0^{IV}\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Da aber nach Obigem φ_0 und φ_0' beide Null sind, so behalten wir nur

$$16)\quad \varphi_x = \varphi_0''\frac{x^2}{2!} + \varphi_0'''\frac{x^3}{3!} + \varphi_0^{IV}\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Der erste hier vorkommende Coefficient φ_0'', der reciproke Wert unseres ϱ_0, ist notwendig ein bestimmter positiver Wert. Was die weiteren φ_0''', $\varphi_0^{IV}, \ldots$ betrifft, so ist jeder von ihnen reell und keiner in der Form $\frac{a}{0}$ zu denken, sofern ja die Curve MAN ohne Unterbrechung der Stetigkeit durch A hindurchgeht.

Führen wir jetzt eine mit AY parallele Gerade ein, welche die Axe AX schneide in einem Punkte T mit Abscissenwert x, welche zugleich den Kreisbogen 15) in einem Punkte R und den Curvenbogen 16) in einem Punkte Q schneide.

Die Abstände RT, QT, welche die Punkte R, Q von der Geraden AX haben, sind (nach Einleitung) beide positiv, und sind aus 15) und 16) unmittelbar als die für y_x und φ_x entwickelten Werte zu entnehmen.

Jenachdem $QT - RT \gtrless 0$, ist Q oder R weiter von der Tangente AX entfernt, während übrigens immer beide auf der positiven Seite von ihr liegen.

$QT - RT = 0$ zeigt an, dass Q und R zusammenfallen.

Nach 15) und 16) ist jedenfalls anzugeben

$$17)\quad QT - RT = \frac{1}{3!}\varphi_0'''x^3 + \left\{\frac{\varphi_0^{IV}}{4!} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}{2!}(\varphi_0'')^3\right\}x^4$$

$$+\frac{1}{5!}\varphi_0{}^{V}x^5+\left\{\frac{\varphi_0{}^{VI}}{6!}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}}{3!}(\varphi_0'')^5\right\}x^6$$

$$+\cdots$$

Betrachten wir jetzt diese Gleichung unter der Voraussetzung, dass der Wert des x unendlich klein sei.

I) Setzen wir zunächst, der bei x^3 stehende Factor $\varphi_0''' $ sei $\gtrless 0$, d. h. vergl. Nr. 13) ϱ_0 sei weder ein Maximum noch ein Minimum. Da reducirt sich die Angabe 17) auf

$$QT-RT=\frac{1}{3!}\varphi_0'''x^3.$$

Die Differenz $QT-RT$ nimmt also den einen oder andern algebraischen Charakter an, jenachdem x positiv oder negativ ist. Hiernach mit Bezug auf der Gerade QR, wenn sie der Normale AY parallel und ihr unendlich nahe gerückt ist, hat man zu sagen: jenachdem die QR auf der einen oder andern Seite der Normale AY sich befindet, ist Q oder R näher an der Tangente AX, d. h. offenbar: wenn auf der einen Seite von A das Kreiselement AR und das Curvenelement AQ so liegen, dass AQ näher als AR an jene Tangente sich anschmiegt, so müssen auf der andern Seite von A das Curvenelement AQ_1 und das Kreiselement AR_1 so liegen, dass AQ_1 weniger als AR_1 an die Tangente AX sich anschmiegt. Es ist also ersichtlich, dass dann der Curvenbogen und der Kreisbogen, während sie an der Stelle A eine Osculation zweiter Ordnung haben, zugleich in dem Punkte A sich schneiden.

II) Setzen wir jetzt $\varphi_0''' $ sei $=0$, d. h. (vergl. 13) lassen wir die Möglichkeit zu, dass ϱ_0 ein Maximum oder ein Minimum sei. Dann sind mit Bezug auf die Entwicklungsreihe in Nr. 17) die zwei Fälle zu unterscheiden:

α) das nächste nicht null werdende der nach x^3 kommenden Gliedes sei ein solches mit ungeradem Exponenten von x;

β) das nächste derartige sei ein solches mit geradem Exponenten.

Im Falle α) wird man genau wie unter I) schliessen, dass unser Curvenbogen und unser Kreisbogen in A sich schneiden.

Im Falle β) wird man vermöge ähnlicher Betrachtungen wie die dortigen sich sagen, dass die zwei Bögen in A sich nicht schneiden, dass vielmehr in der grössten Nähe des Punktes A, und zu beiden Seiten desselben, der eine jener Bögen auf einerlei Seite des andern verlaufe.

Die Entscheidung über das Zutreffen des einen oder des andern der zwei Fälle α), β) wird nur dann zu geben sein, wenn von der Natur des Curvenbogens MAN eine ganz vollständige Definition vorhanden, oder die Funktion φ_x mit allen entsprechenden Bestimmungen vollkommen gegeben ist. Allgemein aber wird als Ergebniss vorstehender Untersuchung das folgende auszusprechen sein:

Wenn ein gegebener Curvenbogen zwischen zwei Punkten M und N stetig verläuft, wenn zu dem zwischen M und N beliebig genommenen Punkt A desselben ein eigentlicher Krümmungskreis gehört, und wenn dieser weder ein Maximum noch ein Minimum ist: so werden jene an der Stelle A (mit Osculation zweiter Ordnung) sich berührenden Linien zugleich in dem Punkte A sich schneiden.

Wenn aber der zu A gehörige Krümmungskreis ein Maximum oder ein Minimum ist, während die vorangestellten Bedingungen bestehen bleiben, so ist an jede der zwei Möglichkeiten zu denken, sowohl an die dass die Bogenstücke in A sich schneiden, als an die dass sie sich nicht schneiden, dass vielmehr in grösster Nähe des Punkts A, rechts und links von ihm, das eine Bogenstückchen auf einerlei Seite des andern verlaufe.

Um jetzt mit einer kurzen Bemerkung auf die im Eingang erwähnten Curven zweiter Ordnung zurückzukommen, so sind bekanntlich ihre Scheitel (und nur diese) als Stellen grösster oder kleinster Krümmung hervorzuheben. Für jeden solchen Scheitel findet man, dass der zugehörige Krümmungskreis die Curve nicht schneide. Hierbei darf man aber nicht übersehen, dass solcher Punkt nicht bloss Stelle grösster oder kleinster Krümmung der Curve sondern auch Punkt einer Symmetralaxe derselben ist. Wenn also bei einer andern Curve eine Stelle A zwar das Maximum oder Minimum der Krümmung an sich hat, nicht aber eine Symmetralaxe durch A geht: so wird man durch diesen Umstand schon zur Vorsicht gemahnt sein müssen; man wird nicht sofort auch für solche Curve, für jene Stelle A, die Schneidung derselben durch den zugehörigen Krümmungskreis als unmöglich erklären dürfen.

XVIII.

Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen.

Von

R. Hoppe.

An manchen Formeln der analytischen Geometrie lässt sich leicht die Bemerkung machen, dass statt der 3 Coordinaten nach unmittelbar deutlicher Analogie eine beliebige Anzahl n gleichberechtigter Variabeln gesetzt werden könnte; das analoge Resultat hat dann der Probe partieller geometrischer Deutung zu genügen, indem man das dadurch bestimmte Gebilde, unmittelbar oder nach Coordinatentransformation, auf den Raum projicirt, d. h. je $n-3$ Coordinaten null setzt.

An eine Reihe solcher sofort deutlicher Sätze werde ich einige andre anschliessen, die erst durch Rechnung gewonnen werden, aber ebenso einfach im Resultat erscheinen. Es ist mir dabei nicht um Anbahnung einer umfassenden Theorie zu tun. Der Nutzen einer solchen kann leicht dadurch illusorisch werden, dass sie bei der grossen Mannichfaltigkeit möglicher Methoden ganz bei Seite liegen bliebe, die einzelnen Probleme ohne sie auf kürzerem Wege ihre Lösung fänden. Die Untersuchung der Gebilde von n Dimensionen überhaupt scheint mir namentlich (nicht gerade ausschliesslich) den Nutzen zu versprechen, dass dadurch das Gesetz des Fortschritts von 2 zu 3 Dimensionen deutlich wird, welches sich aus den 2 bekannten Gliedern der Progression selten entnehmen lässt. In diesem Interesse nehme ich zum Schluss noch ein Problem in Angriff, welches keinen einfachen Fortschritt über 3 Dimensionen hinaus ergiebt, nämlich die Berechnung des Winkels von n Dimensionen.

Was Sinn und Bedeutung der n Dimensionen-Geometrie betrifft, so betrachte ich dieselbe als eine Theorie, die auf rein analytischem Grunde steht, und deren Begriffe rein analytisch definirt sein müssen. Damit wird ihr aber durchaus keine wesentlich verschiedene Stellung gegenüber der gewöhnlichen Geometrie erteilt. Unser geläufiges Raumsystem von 3 Dimensionen ist in gleicher Weise ein Werk des Verstandes, das sich nur dadurch unterscheidet, dass es zur objectiven Gestaltung der gegebenen Sinnesempfindungen notwendig und gerade ausreichend war, infolge dessen instinctiv geschaffen ward und durch beständige Uebung in fertige Anschauung übergieng, während zur Einführung von mehr Dimensionen der zwingende Anlass durch die Tatsachen der Sinnlichkeit gefehlt hat, und wir nun wegen Mangel an Uebung Schwierigkeit im Vorstellen derselben empfinden. Von Natur gegeben ist nur eine zweifache Ausdehnung des unmittelbaren Gesichtsbildes, doch auch dieses entspricht nicht genau der planimetrischen Raumanschauung, es ist sphärisch gestaltet und zwingt uns dadurch den ungesehenen Radiusvector als analytische Grösse vergleichbar mit den Dimensionen des Bildes hypothetisch einzuführen. Von wesentlich gleicher Art ist der Act, welcher bei weiterer Vermehrung der Dimensionen vollzogen wird.

Da also ein ursprünglich begrifflicher Unterschied nicht existirt, so ist es wol gerechtfertigt dieselben Namen, deren Bedeutung für den Raum uns bekannt ist, auch in der Mehr-Dimensionen-Theorie zu gebrauchen. Nur wenn solche nicht für Ebene und Raum in gleichem Sinne gelten, habe ich es vorgezogen neue Namen zu bilden.

§. 1.

Uebertragung der Grundbegriffe.

Macht man n Variabeln zu beliebigen Functionen von n Variabeln, so unterliegt es keiner Bedingung, welche n Variabeln man als rechtwinklige geradlinige Coordinaten auffassen will. Nachdem die Wahl getroffen ist, ist die Theorie dadurch bedingt. Die folgenden Sätze sind, wo es nicht anders bemerkt ist, als Definitionen zu verstehen, mit der sichtlich erfüllten Forderung, dass sie jeder partiellen Deutung entsprechen. Unter Coordinaten sollen stets rechtwinklige geradlinige verstanden werden.

Die n Variabeln $x_1, \ldots x_n$ seien Coordinaten. Ein individuelles Wertsystem derselben heisst ein Punkt; der Inbegriff aller Wertsysteme (Ort aller Punkte), welche durchlaufen werden, wenn $x_1, \ldots x_n$ mit m unabhängigen Variabeln, wo $m \overset{=}{<} n$, stetig variiren,

eine $m$dehnung; insbesondere die 1dehnung **Linie**, die 2dehnung **Fläche**. Eine $m$dehnung, in welcher die $x_1, \dots x_n$ nur in linearen Relationen stehen, heisst **linear**; insbesondere die lineare 1, 2 oder 3dehnung **Gerade**, **Ebene**, **Raum**.

Die **Entfernung** zweier Punkte $(x_1, \dots x_n)$ und $(x_1', \dots x_n')$ von einander ist

$$= \sqrt{(x_1'-x)^2 + \dots (x_n'-x_n)^2}$$

Folgerung: Die Gleichungen einer Geraden lassen sich stets in der Form schreiben:

$$x_1 = x_{1,0} + a_1 u; \dots x_n = x_{n,0} + a_n u \quad (1)$$

wo u die Entfernung der Punkte $(x_1, \dots x_n)(x_{1,0}, \dots x_{n,0})$, erstern als variabel, letztern als constant gedacht, als einzige Unabhängige ausdrückt, und

$$a_1^2 + \dots a_n^2 = 1$$

ist.

Winkel zwischen 2 Geraden (unterschieden durch den Accent) heisst die Grösse, deren Cosinus

$$= a_1 a_1' + \dots a_n a_n'$$

ist; die Geraden heissen **normal** zu einander, wenn

$$a_1 a_1' + \dots a_n a_n' = 0$$

Coordinatenaxen heissen die n Geraden, in denen alle Grössen $x_{1,0}, \dots x_{n,0}$ und alle $a_1, \dots a_n$ mit Ausnahme einer der letztern null sind, so dass die Gleichungen der $k$ten Coordinatenaxe lauten:

$$x_\lambda = 0 \quad (\lambda \gtrless k)$$

Folgerung: Die Coefficienten von u in (1) $a_1, \dots a_n$ sind die Cosinus der Winkel zwischen der Geraden und den einzelnen Coordinatenaxen; sie mögen die **Richtungscosinus** der Geraden heissen. Die Coordinatenaxen sind zu einander normal und treffen sich im **Anfangspunkt** $(0, \dots 0)$.

Sei

$$x_k = x_{k,0} + a_{1,k} y_1 + \dots a_{n,k} y_n \quad (k = 1, \dots n)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,k}^2 + \dots a_{n,k}^2 = 1 \\ a_{1,k} a_{1,h} + \dots a_{n,k} a_{n,h} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (k = 1, \dots n) \\ (h = 1, \dots n) \end{array} \Big\} \; (h \gtrless k)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{\lambda,1}^2 + \dots a_{\lambda,n}^2 = 1 \\ a_{\lambda,1} a_{\varkappa,1} + \dots a_{\lambda,n} a_{\varkappa,n} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\lambda = 1, \dots n) \\ (\varkappa = 1, \dots n) \end{array} \Big\} \; (\varkappa \gtrless \lambda)$$

dann sind $y_1, \dots y_n$ Coordinaten desselben Punkts wie $x_1, \dots x_n$;

die ihnen entsprechenden Axen sind gleichfalls normal zu einander, treffen sich im neuen Anfangspunkte $(x_{1,0}, \dots x_{n,0})$, und ihre Richtungscosinus gegen die alten Axen sind die Coefficienten der entsprechenden y. Die Beziehung der beiden Coordinatensysteme ist eine gegenseitige.

Eine Gerade ist normal zu einer linearen $m$dehnung, wenn sie zu allen darin enthaltenen Geraden normal ist.

Folgerung: Die Gerade

$$x_k = x_{k,0} + a_k u \quad (k = 1, \dots n) \tag{1}$$

ist normal zu der linearen $(n-1)$dehnung

$$a_1 x_1 + \dots a_n x_n = b \tag{2}$$

Denn nimmt man in letzterer eine beliebige Gerade

$$x_k = x_{k,1} + c_k v \quad (k = 1, \dots n)$$

an, so muss sie die Gl. (2) für jedes v erfüllen, und eine der Bedingungen ist offenbar:

$$a_1 c_1 + \dots a_n c_n = 0$$

Hieraus folgt weiter: Die Gerade (1) ist normal zu jeder linearen $m$dehnung, unter deren Gleichungen die Gl. (2) vorkommt.

Beliebige $n-m$ Coordinaten $= 0$ gesetzt bestimmen eine lineare $m$dehnung, welche Coordinaten $m$dehnung heisst. Demnach giebt es $(n)_m$ Coordinaten $m$dehnungen (unter $(n)_m$ den Binomialcoefficienten verstanden).

Folgerung: Jede Coordinatenaxe ist normal zu allen Coordinaten $m$dehnungen, in denen sie nicht liegt.

Variiren bei Erzeugung einer $m$dehnung alle Coordinaten zwischen gegebenen Grenzen, so dass sie weder ∞ noch $-\infty$ werden können, so wird ein Gebiet der Variation des Coordinatensystems abgegrenzt, welches begrenzte $m$dehnung heisst. Jeder Punkt, dessen Coordinaten der Grenzbedingung genügen, heisst ein innerer, jeder andre ein äusserer Punkt.

Variiren die Grenzen jeder Coordinate bei stetiger Variation aller übrigen stetig, so erfüllen sie eine Gleichung zwischen allen Coordinaten. Da diese noch zu den $n-m$ Gleichungen der $m$dehnung hinzukommt, so erzeugen die Grenzen eine $(m-1)$dehnung. Demnach lässt sich jede $m$dehnung durch $(m-1)$dehnungen begrenzen. Dass die Grenzen aller Coordinaten nicht n, sondern nur 1 Gleichung

ergeben, erhellt daraus, dass, wenn zwei $(n-1)$dehnungen resultirten, die Punkte zwischen ihnen zugleich innere und äussere sein würden.

Eine durch eine $(m-1)$dehnung begrenzte $m$dehnung lässt sich durch eine neue $(m-1)$dehnung enger begrenzen, d. i. teilen. Folglich kann das Variationsgebiet innerer Punkte grösser und kleiner sein, und unter Umständen zwei derselben addirt oder subtrahirt werden. Auch kann es bei Transposition sich selbst congruent, also gleich bleiben. Aus beiden Eigenschaften geht hervor, dass es eine messbare Grösse ist. Als solche wollen wir es das Volum der begrenzten $m$dehnung nennen.

Lässt man aus einer begrenzten linearen $(m-1)$dehnung g, welche gemäss ihren Gleichungen

$$x_k = \alpha_k \quad \text{(für } n-m+1 \text{ Zahlen } k) \quad (\alpha_k \text{ const.})$$

einer Coordinaten $(m-1)$dehnung parallel ist, eine lineare $m$dehnung dadurch hervorgehen, dass man einer der Constanten α_k eine Variation zwischen 2 Grenzen α_k' und $\alpha_k'+h$ erteilt, so ist das Volum der $m$dehnung offenbar unabhängig von α_k', und eine leichte Betrachtung ergiebt, dass es demzufolge proportional h, andrerseits proportional g, folglich

$$= Agh$$

ist, wo der willkürlich bleibende Factor $A = 1$ gesetzt werden kann.

Ist nun die $(m-1)$dehnung g ebenso aus einer begrenzten linearen $(m-2)$dehnung entstanden, diese wieder auf entsprechende Weise, und so fort bis zur begrenzten Geraden, so ist das $m$dehnige Variationsgebiet bestimmt durch

$$\alpha_k' \leqq x_k \leqq \alpha_k'' \quad \text{(für } m \text{ Werte von } k)$$

$$x_k = \alpha_k \quad \text{(für die übrigen Werte)}$$

und sein Volum, wenn der Einfachheit wegen die Zahlen 1, 2, ... m die erstern Werte vertreten,

$$= (\alpha_1''-\alpha_1')(\alpha_2''-\alpha_2') \ldots (\alpha_m''-\alpha_m')$$

Ein solches Variationsgebiet nennen wir ein rechtwinkliges, insbesondere für $m = 2, 3$ Rechteck, rechtwinkliges Parallelepipedon.

Sind die Variationsintervalle sämmtlich unendlich klein und werden als Incremente der x_k, mit denen sie beginnen, aufgefasst, so wird das Volum

$$= \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m$$

und dieses ist, wie leicht erhellt, das Volumelement einer beliebig begrenzten linearen $m$dehnung.

§. 2.

Lot aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene lineare $m$dehnung.

Der gegebene Punkt sei $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$, die lineare $m$dehnung werde durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$a_{1,\lambda} x_1 + \dots a_{n,\lambda} x_n = \beta_\lambda \quad (\lambda = 1, \dots n - m) \tag{3}$$

und zwar zur Vereinfachung angenommen, dass die Normalen der sich darin schneidenden $(n-m)$ linearen $(n-1)$dehnungen (3) unter sich normal, und die Coefficienten $a_{k,\lambda}$ ihre Richtungscosinus seien, dass also

$$a_{1,\lambda}^2 + \dots a_{n,\lambda}^2 = 1$$

$$a_{1,\varkappa} a_{1,\lambda} + \dots a_{n,\varkappa} a_{n,\lambda} = 0 \quad (\varkappa \gtrless \lambda) \tag{4}$$

Das gesuchte Lot

$$x_k = \gamma_k + c_k u \quad (k = 1, \dots n) \tag{5}$$

treffe die gegebene $m$dehnung im Punkte $(\gamma_1, \dots \gamma_n)$. Durch denselben gehe längs der genannten $m$dehnung die Gerade

$$x_k = \gamma_k + b_k v \quad (k = 1, \dots n) \tag{6}$$

wo die c_k und b_k Richtungscosinus bezeichnen. Beide Gerade müssen, wie es die Aufgabe verlangt, zu einander normal sein, also

$$c_1 b_1 + \dots c_n b_n = 0 \tag{7}$$

Sofern der gegebene Punkt auf der Geraden (5) liegt, hat man:

$$\alpha_k - \gamma_k = c_k l \tag{8}$$

wo l die Länge des Lotes bezeichnet, mithin:

$$l^2 = (\alpha_1 - \gamma_1)^2 + \dots (\alpha_n - \gamma_n)^2 \tag{9}$$

und nach Elimination der c_k zwischen (7) (8):

$$b_1(\alpha_1 - \gamma_1) + \dots b_n(\alpha_n - \gamma_n) = 0 \tag{10}$$

Ferner müssen die Coordinaten (6) die Gl. (3) unabhängig von v befriedigen; dies giebt das doppelte Gleichungssystem:

$$a_{1,\lambda} b_1 + \dots a_{n,\lambda} b_n = 0 \tag{11}$$

$$a_{1,\lambda} \gamma_1 + \dots a_{n,\lambda} \gamma_n = \beta_\lambda \tag{12}$$

Durch die $n-m$ Gleichungen (11) werden $n-m$ Grössen b auf die m übrigen reducirt, welche dann willkürlich bleiben, so dass die Gleichungen unabhängig von ihnen erfüllt sein müssen. Wir setzen daher eine unter ihnen $b_k = 1$, die übrigen $m-1$ Grössen $b = 0$ und substituiren successive für die eine alle andern. Zur Abkürzung sei

$$E_\lambda = a_{1,\lambda}\alpha_1 + \ldots a_{n,\lambda}\alpha_n - \beta_\lambda \tag{13}$$

dann lauten die Gl. (10) (11) (12)

$$\alpha_k - \gamma_k + b_{m+1}(\alpha_{m+1} - \gamma_{m+1}) + \ldots b_n(\alpha_n - \gamma_n) = 0 \tag{14}$$

$$a_{k,\lambda} + a_{m+1,\lambda}b_{m+1} + \ldots a_{n,\lambda}b_n = 0 \tag{15}$$

$$a_{1,\lambda}(\alpha_1 - \gamma_1) + \ldots a_{n,\lambda}(\alpha_n - \gamma_n) = E_\lambda \tag{16}$$

Setzt man nun

$$\alpha_k - \gamma_k = a_{k,1}E_1 + \ldots a_{k,n-m}E_{n-m} + R_k \quad (k = 1, \ldots n)$$

so geht Gl. (14) über in

$$\begin{aligned}(a_{k,1} + b_{m+1}a_{m+1,1} + \ldots b_n a_{n,1})E_1 + \ldots \\ + (a_{k,n-m} + b_{m+1}a_{m+1,n-m} + \ldots b_n a_{n,n-m})E_{n-m} \\ + R_k + b_{m+1}R_{m+1} + \ldots b_n R_n = 0\end{aligned}$$

Die Klammern verschwinden sämmtlich nach den Gl. (15), welche durch die b erfüllt werden können, und es bleibt:

$$R_k + b_{m+1}R_{m+1} + \ldots b_n R_n = 0 \quad (k = 1, \ldots m) \tag{17}$$

Gl. (16) wird:

$$\begin{aligned}(a_{1,\lambda}a_{1,1} + \ldots a_{n,\lambda}a_{n,1})E_1 + \ldots \\ + (a_{1,\lambda}a_{1,n-m} + \ldots a_{n,\lambda}a_{n,n-m})E_{n-m} \\ + a_{1,\lambda}R_1 + \ldots a_{n,\lambda}R_n = E_\lambda\end{aligned}$$

das ist nach den Gl. (4):

$$a_{1,\lambda}R_1 + \ldots a_{n,\lambda}R_n = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots n-m) \tag{18}$$

Die n homogenen linearen Gl. (17) (18), welche die n Grössen R bestimmen, lassen sich nur durch

$$R_1 = \ldots R_n = 0$$

erfüllen, und man hat:

$$\alpha_k - \gamma_k = a_{k,1}E_1 + \ldots a_{k,n-m}E_{n-m} \tag{19}$$

woraus nach (9):

$$l^2 = E_1^2 + \ldots E_{n-m}^2 \tag{20}$$

Danach ist in dem einen Falle $m = n-1$

$$l = E_1 \tag{21}$$

rational, in allen andern irrational.

§. 3.

Transformation des *n*dehnigen Volumelements.

Das rechtwinklige *n*dehnige Volumelement ist

$$\partial^n P = \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n$$

Macht man alle x zu Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$, so ist, während x_1 allein variirt,

$$\partial x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\partial u_1 + \ldots \frac{\partial x_1}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$0 = \frac{\partial x_2}{\partial u_1}\partial u_1 + \ldots \frac{\partial x_2}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial x_n}{\partial u_1}\partial u_1 + \ldots \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\partial u_n$$

woraus:

$$\Delta_1 \partial x_1 = \Delta \partial u_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

also

$$\Delta_1 \partial^n P = \Delta \partial u_1 \partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n$$

Variirt jetzt x_2 bei constanten $u_1, x_3, \ldots x_n$, so ist

$$\partial x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \frac{\partial x_2}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$0 = \frac{\partial x_3}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \frac{\partial x_3}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial x_n}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\partial u_n$$

woraus ebenso:

$$\Delta_2 \partial x_2 = \Delta_1 \partial u_2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \cdots \frac{\partial x_3}{\partial u_n} \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

daher

$$\Delta_2 \partial^n P = \Delta \partial u_1 \partial u_2 \partial x_3 \partial x_4 \ldots \partial x_n$$

und so fort, schliesslich:

$$\Delta_n \partial x_n = \Delta_{n-1} \partial u_{n-1} \text{ und zwar } \Delta_n = 1$$

folglich

$$\partial^n P = \Delta \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n \tag{22}$$

§. 4.

Volum des $n$dehnigen $(n+1)$ecks.

Die Ecken A_λ seien

$$(\alpha_{1,\lambda}, \ldots \alpha_{n,\lambda}) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n)$$

Das $(n+1)$eck wird begrenzt durch $n+1$ Seiten, d. i. lineare $(n-1)$dehnungen, welche durch je n Ecken gehen. Wir ziehen von A_0 eine Gerade nach A_1; dann sind deren Gleichungen:

$$\beta_{k,1} = \alpha_{k,1} + (\alpha_{k,0} - \alpha_{k,1}) u_1$$

wo die Coordinate $\beta_{k,1}$ ihre Werte durchläuft, wenn u_1 von 0 bis 1 variirt. Vom Punkte

$$B_1 \equiv (\beta_{1,1}, \ldots \beta_{n,1})$$

ziehen wir nach A_2 und erhalten als Coordinaten des laufenden Punkts:

$$\beta_{k,2} = \alpha_{k,2} + (\beta_{k,1} - \alpha_{k,2}) u_2$$

ebenso ziehen wir vom Punkte

$$B_2 \equiv (\beta_{1,2}, \ldots \beta_{n,2})$$

nach A_3 und fahren so fort bis A_n. Wenn dann $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämmtlich unabhängig von 0 bis 1 variiren, so durchläuft der Punkt

$$B_n \equiv (\beta_{1,n}, \ldots \beta_{n,n}) \equiv (x_1, \ldots x_n)$$

das ganze $(n+1)$eck.

Die x sind recurrent bestimmt durch

$$l = E_1 \tag{21}$$

rational, in allen andern irrational.

§. 3.

Transformation des $n$dehnigen Volumelements.

Das rechtwinklige $n$dehnige Volumelement ist

$$\partial^n P = \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n$$

Macht man alle x zu Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$, so ist, während x_1 allein variirt,

$$\partial x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\partial u_1 + \ldots \frac{\partial x_1}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$0 = \frac{\partial x_2}{\partial u_1}\partial u_1 + \ldots \frac{\partial x_2}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial x_n}{\partial u_1}\partial u_1 + \ldots \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\partial u_n$$

woraus:

$$\varDelta_1 \partial x_1 = \varDelta \partial u_1$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}; \qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

also

$$\varDelta_1 \partial^n P = \varDelta \partial u_1 \partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n$$

Variirt jetzt x_2 bei constanten $u_1, x_3, \ldots x_n$, so ist

$$\partial x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \frac{\partial x_2}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$0 = \frac{\partial x_3}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \frac{\partial x_3}{\partial u_n}\partial u_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial x_n}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\partial u_n$$

woraus ebenso:

$$\Delta_2 \partial x_2 = \Delta_1 \partial u_2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \cdots & \frac{\partial x_3}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

aber

$$\Delta_2 \partial^n P = \Delta \partial u_1 \partial u_2 \partial x_3 \partial x_4 \ldots \partial x_n$$

und so fort, schliesslich:

$$\Delta_n \partial x_n = \Delta_{n-1} \partial u_{n-1} \text{ und zwar } \Delta_n = 1$$

folglich

$$\partial^n P = \Delta \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n \tag{22}$$

§. 4.

Volum des *n*dehnigen $(n+1)$ecks.

Die Ecken A_λ seien

$$(\alpha_{1,\lambda}, \ldots \alpha_{n,\lambda}) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n)$$

Das $(n+1)$eck wird begrenzt durch $n+1$ Seiten, d. i. lineare $(n-1)$dehnungen, welche durch je n Ecken gehen. Wir ziehen von A_0 eine Gerade nach A_1; dann sind deren Gleichungen:

$$\beta_{k,1} = \alpha_{k,1} + (\alpha_{k,0} - \alpha_{k,1}) u_1$$

wo die Coordinate $\beta_{k,1}$ ihre Werte durchläuft, wenn u_1 von 0 bis 1 variirt. Vom Punkte

$$B_1 \equiv (\beta_{1,1}, \ldots \beta_{n,1})$$

ziehen wir nach A_2 und erhalten als Coordinaten des laufenden Punkts:

$$\beta_{k,2} = \alpha_{k,2} + (\beta_{k,1} - \alpha_{k,2}) u_2$$

ebenso ziehen wir vom Punkte

$$B_2 \equiv (\beta_{1,2}, \ldots \beta_{n,2})$$

nach A_3 und fahren so fort bis A_n. Wenn dann $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämmtlich unabhängig von 0 bis 1 variiren, so durchläuft der Punkt

$$B_n \equiv (\beta_{1,n}, \ldots \beta_{n,n}) \equiv (x_1, \ldots x_n)$$

das ganze $(n+1)$eck.

und recurrent bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} \beta_{k,1} &= \alpha_{k,1}+(\alpha_{k,0}-\alpha_{k,1})u_1 \\ \beta_{k,2} &= \alpha_{k,2}+(\beta_{k,1}-\alpha_{k,2})u_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \\ x_k = \beta_{k,n} &= \alpha_{k,n}+(\beta_{k,n-1}-\alpha_{k,n})u_n \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Die partielle Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_n} = \beta_{k,n-1}-\alpha_{k,n}$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} = (\beta_{k,n-2}-\alpha_{k,n-1})u_n$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_{n-2}} = (\beta_{k,n-3}-\alpha_{k,n-2})u_{n-1}u_n$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_1} = (\alpha_{k,0}-\alpha_{k,1})u_2u_3\dots u_n$$

daher wird die Functionsdeterminante

$$\varDelta = u_2u_3^2\dots u_n^{n-1}\begin{vmatrix} \alpha_{1,0}-\alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{n,0}-\alpha_{n,1} \\ \beta_{1,1}-\alpha_{1,2} & \dots & \beta_{n,1}-\alpha_{n,2} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1,n-1}-\alpha_{1,n} & \dots & \beta_{n,n-1}-\alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Die $k$te Verticalreihe lautet:

$$\alpha_{k,0}-\alpha_{k,1},\ \beta_{k,1}-\alpha_{k,2},\ \dots\ \beta_{k,h-1}-\alpha_{k,h},\ \beta_{k,h}-\alpha_{k,h+1},\ \dots\ \beta_{k,n-1}-\alpha_{k,n}$$

Hier ist nach (23)

$$\beta_{k,h}-\alpha_{k,h+1} = \alpha_{k,h}+(\beta_{k,h-1}-\alpha_{k,h})u_h-\alpha_{k,h+1}$$

Multiplicirt man also die $h$te Horizontalreihe mit u_h und subtrahirt sie von der $(h+1)$ten, so geht diese über in

$$\alpha_{k,h}-\alpha_{k,h+1} \quad (k = 1,\ \dots\ n)$$

Führt man dies von der letzten Horizontalreihe anfangend successive durch, so gehen alle β in die gleichnumerirten α über, und man erhält:

$$\varDelta = u_2u_3^2\dots u_n^{n-1}\begin{vmatrix} \alpha_{1,0}-\alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{n,0}-\alpha_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,n-1}-\alpha_{1,n} & \dots & \alpha_{n,n-1}-\alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Setzt man zu weiterer Vereinfachung statt jeder Horizontalreihe ihre Summe mit allen vorausgehenden und wechselt alle Vorzeichen, so kommt:

$$\Delta = \pm\, u_2 u_3^2 \ldots u_n^{n-1} \Delta_1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} & \ldots & \alpha_{n,1} - \alpha_{n,0} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,n} - \alpha_{1,0} & \ldots & \alpha_{n,n} - \alpha_{n,0} \end{vmatrix}$$

und das $(n+1)$eck hat folgendes Volum:

$$\int_0^1 \partial u_n \ldots \int_0^1 \partial u_2 \int_0^1 \Delta\, \partial u_1 = \pm \frac{\Delta_1}{n!} \qquad (24)$$

Dies Resultat, wie das vorige, liess sich nach Analogie vermuten. Beide gelten auch, wenn man für n eine kleinere Zahl m setzt, indem man $x_{m+1}, \ldots x_n$ als constant betrachtet. Das nächst folgende ist nicht anfänglich durch Analogie zu ersehen.

§. 5.

Volum des regelmässigen $n$dehnigen $(n+1)$ecks.

Von den Ecken $A_0, A_1, \ldots A_n$ legen wir eine A_0 in den Anfangspunkt, eine andre A_1 in die x_1 Axe, eine dritte A_2 in die $x_1 x_2$ Ebene, eine vierte A_3 in den $x_1 x_2 x_3$ Raum, u. s. w. Dann wird (nach der Bezeichnung von §. 4.)

$$\alpha_{k,h} = 0 \text{ für } h < k$$

und Δ_1 geht über in

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \alpha_{3,n} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{n,n}$$

Die Kanten (Entfernungen der Ecken) seien sämmtlich $= 1$; dann hat man die Bedingung:

$$(\alpha_{1,h} - \alpha_{1,g})^2 + \ldots (\alpha_{g,h} - \alpha_{g,g})^2 + (\alpha_{g+1,h})^2 + \ldots (\alpha_{h,h})^2 = 1$$
$$h = 1, 2, \ldots n; \quad g = 0, 1, \ldots h-1$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen kann man leicht recurrente Bestimmungen für die α bilden, aus denen zu ersehen, dass nur eine Lösung möglich ist. Sie werden befriedigt durch die Werte:

$$\alpha_{k,0} = \ldots \alpha_{k,k-1} = 0; \qquad \alpha_{k,k} = \sqrt{\frac{k+1}{2k}}$$



$$\alpha_{k,k+1} = \ldots = \alpha_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}$$

woraus:

$$\Delta_1 = (\sqrt{2})^{-n} \sqrt{\frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$$

Nach (24) ist daher das Volum des regelmässigen $n$dehnigen $(n+1)$-ecks

$$= \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$$

Die Höhe, d. i. das Lot von einer Ecke auf die Gegenseite

$$= n\,\frac{(n+1)\text{eck}}{n\text{eck}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$$

Dies giebt folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7
$(n+1)$eck	1	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{96}$	$\frac{1}{160\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{7}}{5760}$	$\frac{1}{20160}$
Höhe	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{7}}$

§. 6.

Runde $(n-1)$dehnung und dadurch begrenzte $n$dehnung.

Rund heisst eine $m$dehnung, wenn sie in einer linearen $(m+1)$-dehnung liegt und von einem Punkte derselben (ihrem Mittelpunkte) constanten Abstand hat. Ihre Gleichungen sind daher $n-m-1$ lineare Gleichungen und die folgende:

$$(x_1 - x_{1,0})^2 + \ldots (x_n - x_{n,0})^2 = \text{const.} \tag{25}$$

Nimmt man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt, so ist die Gleichung der runden $(n-1)$dehnung:

$$x_1^2 + \ldots x_n^2 = c^2 \tag{25*}$$

Es soll das Volum der dadurch begrenzten $n$dehnung berechnet werden.

Wir zerlegen die Gl. (25*) in die folgenden:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = r_1 \sin u_1 & x_2 = r_1 \cos u_1 \\ r_1 = r_2 \sin u_2 & x_3 = r_2 \cos u_2 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1} \sin u_{n-1} & x_n = r_{n-1} \cos u_{n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{r_{n-1} = c} \end{array}\right\} \quad (26)$$

Hier kann das System der x alle innern Punkte

$$x_1^2 + \ldots x_n^2 < c$$

durchlaufen, wenn die r nur zwischen 0 und c variiren. Damit x_1 und x_2 alle möglichen, positiven und negativen, Werte annehmen, muss bei positivem r_1 der Bogen u_1 von 0 bis 4R variiren. Dagegen ist nur eine Variation der Bogen $u_2, \ldots u_{n-1}$ von 0 bis 2R erforderlich, damit die übrigen x positiv und negativ werden können.

Aus diesen Grenzen ist ersichtlich, dass die runde $(n-1)$dehnung auch ohne Begrenzung durch $(n-2)$dehnungen, sowie die rund begrenzte $n$dehnung endliches Volum haben.

Die partielle Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial r_k}{\partial u_h} = 0 \quad (h \leqq k)$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial u_h} = r_h \sin u_{k+1} \ldots \sin u_{h-1} \cos u_h \quad (h > k)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_h} = 0 \quad (h < k-1)$$

$$\frac{\partial x_{h+1}}{\partial u_h} = - r_h \sin u_h$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_h} = r_h \cos u_{k-1} \sin u_k \ldots \sin u_{h-1} \cos u_h \quad (h \geqq k)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial r_{n-1}} = \cos u_{k-1} \sin u_k \ldots \sin u_{n-1}$$

Demnach wird, wenn $x_1, \ldots x_n$ als Functionen von $u_1, \ldots u_{n-1}, r_{n-1}$ betrachtet werden, die Functionsdeterminante

$$\Delta = \Delta' r_1 r_2 \ldots r_{n-1}$$

$$\varDelta' = \left| \begin{array}{cccc} \cos u_1 & \sin u_1 \cos u_2 & \sin u_1 \sin u_2 \cos u_3 & \dots \\ -\sin u_1 & \cos u_1 \cos u_2 & \cos u_1 \sin u_2 \cos u_3 & \dots \\ 0 & -\sin u_2 & \cos u_2 \cos u_3 & \dots \\ 0 & 0 & -\sin u_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ccc} \dots \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-2} \cos u_{n-1} & & \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-1} \\ \dots \cos u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-2} \cos u_{n-1} & & \cos u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-1} \\ \dots \qquad \cos u_2 \dots \sin u_{n-2} \cos u_{n-1} & & \cos u_2 \dots \sin u_{n-1} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \dots \qquad \cos u_{n-2} \cos u_{n-1} & & \cos u_{n-2} \sin u_{n-1} \\ \dots \qquad -\sin u_{n-1} & & \cos u_{n-1} \end{array} \right|$$

Subtrahirt man die vorletzte Verticalreihe nach Multiplication mit $\operatorname{tg} u_{n-1}$ von der letzten, so lautet diese:

$$0,\ 0,\ \dots\ 0,\ \frac{1}{\cos u_{n-1}}$$

Führt man die Division der Unterdeterminante durch $\cos u_{n-1}$ in deren letzten Verticalreihe aus, so hat der ganze Ausdruck wieder die ursprüngliche Form, und ist nur $n-1$ an die Stelle von n getreten. Folglich ist $\varDelta$ unabhängig von n, und wenn man $n=2$ setzt, so kommt:

$$\varDelta' = \left| \begin{array}{cc} \cos u_1 & \sin u_1 \\ -\sin u_1 & \cos u_1 \end{array} \right| = 1$$

$$\begin{aligned} \varDelta &= r_1 r_2 \dots r_{n-1} \\ &= r_{n-1}^{n-1} \sin u_2 \sin^2 u_3 \dots \sin^{n-2} u_{n-1} \end{aligned}$$

und die rund begrenzte $n$dehnung ist

$$P = \int_0^c r_{n-1}^{n-1} \partial r_{n-1} \int_0^{4R} \partial u_1 \int_0^{2R} \sin u_2 \partial u_2 \dots \int_0^{2R} \sin^{n-2} u_{n-1} \partial u_{n-1} \tag{27}$$

$$= \frac{2c^n}{n} \prod_{k=1}^{k=n-1} \int_0^{2R} \sin^{k-1} u \, \partial u$$

$$= \frac{2c^n}{n} \prod_{k=1}^{k=n-1} \frac{\Gamma\frac{k}{2}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{k+1}{2}} = \frac{2c^n}{n} \frac{\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\frac{n}{2}} = \frac{(2R)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} c^n \tag{28}$$

Hieraus findet man leicht die begrenzende runde $(n-1)$dehnung

$$\Omega = \frac{\partial P}{\partial c} = 2\frac{(2\mathrm{R})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\frac{n}{2}}c^{n-1} \qquad (29)$$

Die Tabelle der Werte ($c = 1$ gesetzt) ist:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
P	2	2R	$\frac{4}{3}$R	2R²	$\frac{32}{5}$R²	$\frac{4}{3}$R³	$\frac{168}{165}$R³	$\frac{2}{3}$R⁴
Ω	2	4R	8R	8R²	32R²	8R³	$\frac{128}{15}$R³	$\frac{16}{3}$R⁴

Auch hier kann man m für n setzen, indem man die überschüssigen Coordinaten als constant betrachtet.

Das Resultat ist nicht neu, doch habe ich es besonders hergeleitet, weil der Entwickelungsgang dem Folgenden zugrunde liegt.

§. 7.

Ein Satz über $n$dehnige Winkel.

Eine lineare $(n-1)$dehnung

$$a_1x_1 + \dots a_nx_n = 0 \qquad (30)$$

welche der Einfachheit wegen durch den Anfangspunkt gehen soll, trennt 2 Variationsgebiete

$$a_1x_1 + \dots a_nx_n > 0$$
$$a_1x_1 + \dots a_nx_n < 0$$

von einander. Ein Punkt, welcher der einen oder andern Ungleichung entspricht, liegt, wie wir definiren, auf der positiven oder negativen Seite von (30).

Gehen nun m lineare $(n-1)$dehnungen durch den Anfangspunkt, so werdem im allgemeinen 2^m Variationsgebiete von einander [illegible], die sich durch die verschiedenen Combinationen der Vorzeichen [illegible] scheiden, indem die darin enthaltenen Punkte auf der posi[illegible] einiger $(n-1)$dehnungen, auf der negativen der andern [illegible]

Eins der [illegible] iete, welche durch n lineare [illegible] dehnungen [illegible] t ein $n$dehniger Winkel [illegible] $(n-1)$dehnu[illegible]

Eine um [illegible] Mittelpunkt mit dem [illegible]

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \cos u_1 & \sin u_1 \cos u_2 & \sin u_1 \sin u_2 \cos u_3 \dots & \dots \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-2} \cos u_{n-1} & \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-1} \\ -\sin u_1 & \cos u_1 \cos u_2 & \cos u_1 \sin u_2 \cos u_3 \dots & \dots \cos u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-2} \cos u_{n-1} & \cos u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{n-1} \\ 0 & -\sin u_2 & \cos u_2 \cos u_3 \dots & \dots \cos u_2 \dots \sin u_{n-2} \cos u_{n-1} & \cos u_2 \dots \sin u_{n-1} \\ 0 & 0 & -\sin u_3 \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots \cos u_{n-2} \cos u_{n-1} & \cos u_{n-2} \sin u_{n-1} \\ & & & \dots -\sin u_{n-1} & \cos u_{n-1} \end{vmatrix}$$

Subtrahirt man die vorletzte Verticalreihe nach Multiplication mit $\operatorname{tg} u_{n-1}$ von der letzten, so lautet diese:

$$0,\ 0,\ \dots\ 0,\ \frac{1}{\cos u_{n-1}}$$

Führt man die Division der Unterdeterminante durch $\cos u_{n-1}$ in deren letzten Verticalreihe aus, so hat der ganze Ausdruck wieder die ursprüngliche Form, und ist nur $n-1$ an die Stelle von n getreten. Folglich ist Δ unabhängig von n, und wenn man $n = 2$ setzt, so kommt:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \cos u_1 & \sin u_1 \\ -\sin u_1 & \cos u_1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta = r_1 r_2 \dots r_{n-1}$$

$$= r_{n-1}{}^{n-1} \sin u_2 \sin^2 u_3 \dots \sin^{n-2} u_{n-1}$$

und die rund begrenzte $n$dehnung ist

$$P = \int_0^c r_{n-1}{}^{n-1} \partial r_{n-1} \int_0^{4R} \partial u_1 \int_0^{2R} \sin u_2 \partial u_2 \dots \int_0^{2R} \sin^{n-2} u_{n-1} \partial u_{n-1} \quad (27)$$

$$= \frac{2c^n}{n} \prod_{k=1}^{k=n-1} \int_0^{2R} \sin^{k-1} u \partial u$$

$$= \frac{2c^n}{n} \prod_{k=1}^{k=n-1} \frac{\Gamma\frac{k}{2}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{k+1}{2}} = \frac{2c^n}{n} \frac{\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\frac{n}{2}} = \frac{(2R)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} c^n \quad (28)$$

Hieraus findet man leicht die begrenzende runde $(n-1)$dehnung

$$\Omega = \frac{\partial P}{\partial c} = 2\frac{(2R)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\frac{n}{2}}c^{n-1} \tag{29}$$

Die Tabelle der Werte ($c = 1$ gesetzt) ist:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
P	2	2R	$\frac{8}{3}R$	$2R^2$	$\frac{32}{15}R^2$	$\frac{4}{3}R^3$	$\frac{128}{105}R^3$	$\frac{2}{3}R^4$
Ω	2	4R	8R	$8R^2$	$32R^2$	$8R^3$	$\frac{128}{15}R^3$	$\frac{16}{3}R^4$

Auch hier kann man m für n setzen, indem man die überschüssigen Coordinaten als constant betrachtet.

Das Resultat ist nicht neu, doch habe ich es besonders hergeleitet, weil der Entwickelungsgang dem Folgenden zugrunde liegt.

§. 7.

Ein Satz über ndehnige Winkel.

Eine lineare $(n-1)$dehnung

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0 \tag{30}$$

welche der Einfachheit wegen durch den Anfangspunkt gehen soll, trennt 2 Variationsgebiete

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n > 0$$
$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n < 0$$

von einander. Ein Punkt, welcher der einen oder andern Ungleichung entspricht, liegt, wie wir definiren, auf der **positiven** oder **negativen Seite** von (30).

Gehen nun m lineare $(n-1)$dehnungen durch den Anfangspunkt, so werdem im allgemeinen 2^m Variationsgebiete von einander getrennt, die sich durch die verschiedenen Combinationen der Vorzeichen unterscheiden, indem die darin enthaltenen Punkte auf der positiven Seite einiger $(n-1)$dehnungen, auf der negativen der andern liegen.

Eins der 2^n Variationsgebiete, welche durch n lineare $(n-1)$-dehnungen getrennt werden, heisst ein $n$dehniger **Winkel**, jene $(n-1)$dehnungen seine **Seiten**.

Eine um den Anfangspunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1

von (32). Dann variiren $u_m, \ldots u_{n-1}$, weil sie durch keine Seite begrenzt werden, von 0 bis 2R, und man hat:

$$\Omega_{n,m} = T_{n,m} \int_0^{(u_1)} \partial u_1 \int_0^{(u_2)} \sin u_2 \partial u_2 \ldots \int_0^{(u_{m-1})} \sin^{m-2} u_{m-1} \partial u_{m-1}$$

$$= T_{n,m} \Omega_m \tag{36}$$

wo

$$T_{n,m} = \int_0^{2R} \sin^{m-1} u_m \partial u_m \ldots \int_0^{2R} \sin^{n-2} u_{n-1} \partial u_{n-1}$$

$$= (2R)^{\frac{n-m}{2}} \frac{\Gamma \frac{m}{2}}{\Gamma \frac{n}{2}} \tag{37}$$

Demnach ist

$$\Omega_m = \frac{\Omega_{n,m}}{T_{n,m}}$$

eine von n unabhängige Grösse, und nach einmaliger Berechnung von Ω_m sind alle Winkel $\Omega_{n,m}$ ohne weiteres bekannt.

§. 8.

Anwendung auf zwei- und dreiseitige Winkel.

Nach den obigen Formeln ist für $m = 2$ und 3

$$T_{n,2} = \frac{(2R)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma \frac{n}{2}}; \quad T_{n,3} = \frac{(2R)^{\frac{n}{2}-1}}{2 \Gamma \frac{n}{2}} \tag{38}$$

$$\Omega_2 = \int_0^{(u_1)} \partial u_1 = v_{1,2} \tag{39}$$

$$\Omega_3 = \int_0^{(u_1)} \partial u_1 \int_0^{(u_2)} \sin u_2 \partial u_2 = \int_0^{v_{1,2}} [1 - \cos(u_2)] \partial u \tag{40}$$

woraus zunächst:

$$\Omega_{n,2} = \frac{(2R)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma \frac{n}{2}} v_{1,2} \tag{41}$$

Zur Berechnung von Ω_3 setzen wir

$$c_{1,3} = \sin\varepsilon \sin\zeta; \quad c_{2,3} = \sin\varepsilon \cos\zeta; \quad c_{3,3} = -\cos\varepsilon$$

dann wird

$$\cos v_{1,2} = c_{1,2}; \quad \sin v_{1,2} = -c_{2,2}$$

$$\cos v_{1,3} = -\sin\varepsilon \sin\zeta; \quad \cos v_{2,3} = -\sin\varepsilon \sin(v_{1,2} - \zeta) \tag{42}$$

Setzt man also

$$\cos\varphi = \sin\varepsilon \sin(u_1 - \zeta)$$

so geht φ für $u_1 = 0$ und $v_{1,2}$ über in $v_{1,3}$ und $2R - v_{2,3}$. Nun ist

$$\cot(u_2) = \operatorname{tg}\varepsilon \cos(u_1 - \zeta)$$

woraus:

$$\cos(u_2) = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$$

Dies eingeführt in (40) giebt:

$$\Omega_3 = v_{1,2} + v_{1,3} + v_{2,3} - 2R$$

Diese Herleitung kann erst als Beweis des Resultats gelten, wenn die Vorzeichen der 2 Grössen (42) motivirt sind. Die Unterscheidung der innern und äussern Winkel gehört jedoch nicht zu den einfachern Fragen. Eine andere sehr bekannte Herleitungsmethode lässt sich direct auf $\Omega_{n,3}$ anwenden.

Seien

$$\omega \equiv (+++), \quad \omega' \equiv (++-1), \quad \omega'' = (+-+), \quad \omega''' \equiv (+--)$$

unter den von 3 linearen $(n-1)$dehnungen gebildeten 8 Winkeln diejenigen, welche auf der positiven Seite der ersten liegen. Die 4 übrigen Winkel (Gegenwinkel)

$$(---), \quad (--+), \quad (-+-), \quad (-++)$$

sind offenbar jenen in gleicher Reihenfolge gleich, weil jedem Punkte $(x_1, \ldots x_n)$ in ersterm Gebiete ein Punkt $(-x_1, \ldots -x_n)$ im andern entspricht, und die Entfernung zweier Punkte gleich der entsprechenden ist. Unter den ω bilden je zwei zusammen einen zweiseitigen Winkel, unmittelbar nämlich wenn sie 2 Vorzeichen gemein haben, andernfalls der eine Winkel mit dem Gegenwinkel des andern, weil die dritte, dem $+$ und $-$ entsprechende, Seite keine Grenze mehr ist. Mit ihr fallen die 2 Neigungswinkel weg, welche die Seiten von ungleichen Zeichen mit den beiden andern bildet; der übrig bleibende Neigungswinkel zwischen den Seiten von gleichen Zeichen ist dann der des zweiseitigen Winkels, also, wenn zur Abkürzung die Formel (41)



$$\Omega_{n,3} = [illegible]$$

[illegible]:

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] - [illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] + [illegible] = [illegible]$$

[illegible]:

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{2}([illegible] + [illegible] + [illegible] - [illegible])$$

[illegible]

$$\Omega_{n,3} = \frac{[illegible]^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma\frac{n}{2}}([illegible] + [illegible] + [illegible] - [illegible]) = T_{n,3}\,\Omega_3$$

übereinstimmend mit (43).

§ 9.

Vierseitiger Winkel.

Vier lineare [illegible] Ungleichungen begrenzen 16 Winkel, von denen folgende 8 auf der positiven Seite der ersten liegen:

$$
\begin{array}{ll}
A \equiv (-+-+) & B \equiv (-++-) \\
A' \equiv (----) & B' \equiv (++-+) \\
A'' \equiv (---+) & B'' \equiv (---+) \\
A''' \equiv (+-+-) & B''' \equiv (----)
\end{array}
$$

während die übrigen als Gegenwinkel nur dieselben Werte haben. Jedes A setzt sich mit jedem B zu einem dreiseitigen Winkel zusammen. Letztere als bekannt betrachtet hat man 16 Gleichungen zur Bestimmung der 8 Grössen A, B. Eliminirt man irgend ein B zwischen 2 Gleichungen, so erhält man die Differenz der A, analog die Differenzen der B, so dass

$$A' = A + d_1; \quad A'' = A + d_2; \quad A''' = A + d_3$$
$$B' = B + e_1; \quad B'' = B + e_2; \quad B''' = B + e_3$$

wo die d und e bekannt sind. Dies in die 16 Gleichungen eingeführt giebt übereinstimmend nur den schon bekannten Wert von $A + B$. Folglich reicht die Methode, welche bei 3 Seiten zum Ziele führte, bei 4 Seiten nicht mehr aus.

Um durch Integration den Wert des vierseitigen Winkels zu finden, hat man

$$\Omega_{n,4} \equiv T_{n,4}\,\Omega_4$$

$$T_{n,4} = \frac{(2R)^{\frac{n}{2}-2}}{\Gamma\frac{n}{2}} \tag{44}$$

$$\Omega_4 = \int_0^{v_{1,2}} \partial u_1 \int_0^{(u_2)} \sin u_2 \, \partial u_2 \int_0^{(u_3)} \sin^2 u_3 \, \partial u_3$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{v_{1,2}} \partial u_1 \int_0^{(u_2)} \sin u_2 [(u_3) - \sin(u_3)\cos(u_3)] \, \partial u_2 \tag{45}$$

Die Gleichungen der Seiten sind:

$$\sin u_1 = 0 \tag{46}$$

$$\cos v_{1,2} \sin u_1 - \sin v_{1,2} \cos u_1 = 0$$

$$\sin\alpha \sin\beta \sin u_1 \sin u_2 + \cos\alpha \sin\beta \cos u_1 \sin u_2 + \cos\beta \cos u_2 = 0$$

$$\sin\gamma \sin\delta \sin\varepsilon \sin u_1 \sin u_2 \sin u_3 + \cos\gamma \sin\delta \sin\varepsilon \cos u_1 \sin u_2 \sin u_3$$
$$+ \cos\delta \sin\varepsilon \cos u_2 \sin u_3 + \cos\varepsilon \cos u_3 = 0$$

die Cosinus ihrer Neigungswinkel:

$$\left.\begin{aligned} &\pm \cos v_{1,3} = \sin\alpha \sin\beta; \qquad \pm \cos v_{1,4} = \sin\gamma \sin\delta \sin\varepsilon \\ &\pm \cos v_{2,3} = \sin(v_{1,2} - \alpha) \sin\beta \\ &\pm \cos v_{2,4} = \sin(v_{1,2} - \gamma) \sin\delta \sin\varepsilon \\ &\pm \cos v_{3,4} = \{\cos(\alpha - \gamma) \sin\beta \sin\delta + \cos\beta \cos\delta\} \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

so dass sich α, β, γ, δ, ε in ihnen darstellen lassen. Aus den Gl. (46) ergiebt sich für die Integralgrenzen:

$$\cot(u_2) = -\cos(u_1 - \alpha) \operatorname{tg}\beta \tag{48}$$

$$\cot(u_3) = -\{\cos(u_1 - \gamma) \sin\delta \sin u_2 + \cos\delta \cos u_2\} \operatorname{tg}\varepsilon \tag{49}$$

Nach teilweiser Integration erhält man:

$$\int \sin u_2 [(u_3) - \sin(u_3)\cos(u_3)] \partial u_2 = -(u_3) \cos u_2$$
$$+ \cos u_2 \sin(u_3) \cos(u_3) + 2 \int \cos u_2 \sin^2(u_3) \, \partial(u_3)$$

Für $u_2 = (u_2)$ gehe (u_3) über in φ. Für $u_2 = 0$ hat man:

$$-(u_3) = \operatorname{arctg} \frac{\cot\varepsilon}{\cos\delta}$$

$$-\sin(u_3)\cos(u_3) = \frac{\cos\delta \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{1 - \sin^2\delta \sin^2\varepsilon}$$

[...]ch stellt sich das Integral (45) in folgende Teile zerlegt dar:

$$\Omega_4 = \tfrac{1}{2}\int_0^{u_{1,2}} (H - J - K + L + M)\partial u_1 \qquad (5$$

wo

$$H = \frac{\cos\delta \sin\varepsilon \cos\varepsilon}{1 - \sin^2\delta \sin^2\varepsilon}; \quad J = \operatorname{arctg} \frac{\cot\varepsilon}{\cos\delta}$$

$$K = \varphi \cos(u_2); \quad L = \cos(u_2) \sin\varphi \cos\varphi$$

$$M = 2\int_0^{(u_3)} \cos u_2 \sin^2(u_3)\partial(u_3)$$

Nun ist nach (49)

$$[\sin(u_3)]^{-2} = p\cos^2 u_2 \qquad ($$

$$p = A\operatorname{tg}^2 u_2 + 2B\operatorname{tg} u_2 + C$$

$$A = 1 + \sin^2\delta \operatorname{tg}^2\varepsilon \cos^2(u_1 - \gamma)$$

$$B = \sin\delta \cos\delta \operatorname{tg}^2\varepsilon \cos(u_1 - \gamma)$$

$$C = 1 - \cos^2\delta \operatorname{tg}^2\varepsilon$$

$$\sin^2(u_3)\partial(u_3) = -\frac{\partial \cot(u_3)}{p^2 \cos^4 u_2}$$

$$= \operatorname{tg}\varepsilon \frac{\sin\delta \cos(u_1 - \gamma) - \cos\delta \operatorname{tg} u_2}{p^2 \cos u_2} \partial \operatorname{tg} u_2 \qquad ($$

also

$$M = 2\operatorname{tg}\varepsilon \int_0^{\operatorname{tg}(u_2)} \{\sin\delta \cos(u_1 - \gamma) - \cos\delta \operatorname{tg} u_2\} \frac{\partial \operatorname{tg} u_2}{p^2}$$

$$= \int_0^{\operatorname{tg}(u_2)} \left(\frac{D}{p} + \frac{\partial}{\partial \operatorname{tg} u_2} \frac{E\operatorname{tg} u_2 + F}{p}\right) \partial \operatorname{tg} u_2$$

Führt man die Differentiation aus und identificirt beide Ausdrück so ergeben sich folgende Werte der Coefficienten:

$$D = E = \sin\delta \operatorname{tg}\varepsilon \cos(u_1 - \gamma); \quad F = \cos\delta \operatorname{tg}\varepsilon$$

und man hat:

$$M = \frac{D\operatorname{tg}(u_2) + F}{A\operatorname{tg}^2(u_2) + 2B\operatorname{tg}(u_2) + C} - \frac{F}{C} + D\int_0^{\operatorname{tg}(u_2)} \frac{\partial \operatorname{tg} u_2}{p}$$

Hier ist

$$\frac{F}{C} = \frac{\cos\delta \operatorname{tg}\varepsilon}{1 + \cos^2\delta \operatorname{tg}^2\varepsilon} = H$$

ferner nach (51)

$$L = \cos(u_2)\sin^2\varphi \cot\varphi = -\frac{D\operatorname{tg}(u_2) + F}{A\operatorname{tg}^2(u_2) + 2B\operatorname{tg}(u_2) + C}$$

Beide Grössen heben sich in (50), und es bleibt:

$$\Omega_4 = \tfrac{1}{2}\int_0^{v_{1,2}} (N - J - K)\partial u_1$$

$$N = D\int_0^{\operatorname{tg}(u_2)} \frac{\partial \operatorname{tg} u_2}{p}$$

$$= \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{A\operatorname{tg}(u_2) + B}{\sqrt{AC - B^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{\sqrt{AC - B^2}}\right\}$$

$$= \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{AC - B^2}}{B + C\cot(u_2)}$$

Nun ist

$$\frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{\sin\delta\operatorname{tg}\varepsilon\cos(u_1 - \gamma)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varepsilon[1 - \sin^2\delta\sin^2(u_1 - \gamma)]}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_1}\arcsin[\sin\delta\sin\varepsilon\sin(u_1 - \gamma)]$$

Setzt man also

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{B + C\cot(u_2)}$$

$$\sin\chi = \sin\delta\sin\varepsilon\sin(u_1 - \gamma)$$

so wird

$$N\partial u_1 = \psi\partial\chi$$

Zur Bestimmung von K hat man:

$$\cos(u_2) = -\frac{\sin\beta\cos(u_1 - \alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2(u_1 - \alpha)}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial u_1}\arcsin[\sin\beta\sin(u_1 - \alpha)]$$

Sei also

$$\sin\omega = \sin\beta\sin(u_1 - \alpha)$$

dann wird

$$K\partial u_1 = -\varphi\partial\omega$$

und schliesslich

$$\Omega_4 = \tfrac{1}{2}\int_{u_1=0}^{u_1=v_{1,2}} (\varphi\partial\omega + \psi\partial\chi) - \tfrac{1}{2}Jv_{1,2}$$

wo

$$\cot J = \cos\delta\operatorname{tg}\varepsilon$$

$$\cot\varphi = \operatorname{tg}\varepsilon\frac{\cos\delta\sin\beta\cos(u_1 - \alpha) - \sin\delta\cos\beta\cos(u_1 - \gamma)}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2(u_1 - \alpha)}}$$

$$\cot\psi = \frac{\sin\delta\cos\delta\sin^2\varepsilon\cos(u_1-\gamma)-(1-\sin^2\delta\sin^2\varepsilon)\operatorname{tg}\beta\cos(u_1 -}{\cos\varepsilon\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varepsilon\sin^2(u_1-\gamma)}}$$

$$\sin\chi = \sin\delta\sin\varepsilon\sin(u_1-\gamma)$$

$$\sin\omega = \sin\beta\sin(u_1-\alpha)$$

Hiernach stellt sich Ω_4 in 6 Kreisbogen dar, aber n Function derselben, vielmehr in folgender Weise. Man drüc ω, ψ in χ aus; dann erhält man:

$$\cot\varphi = \operatorname{tg}\varepsilon\{[\cos\delta\sin\beta-\sin\delta\cos\beta\cos(\alpha-\gamma)]\sqrt{1-\cot^2\beta\operatorname{tg}^2\omega}$$
$$+\sin\delta\cot\beta\sin(\alpha-\gamma)\operatorname{tg}\omega\}$$

$$\cot\psi = \frac{1}{\cos\varepsilon\cos\chi}\Big\{[\sin\delta\cos\delta\sin^2\varepsilon-(1-\sin^2\delta\sin^2\varepsilon)\operatorname{tg}\beta\cos(\alpha -$$
$$\times\sqrt{1-\frac{\sin^2\chi}{\sin^2\delta\sin^2\varepsilon}}-(1-\sin^2\delta\sin^2\varepsilon)\frac{\operatorname{tg}\beta\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\delta\sin\varepsilon}\sin\chi$$

Betrachtet man dies als Gleichungen zweier ebenen Curven, ω als Abscissen, φ und ψ als Ordinaten, so begrenzen diese C Areale, und Ω_4 besteht dann aus 2 solchen Arealen und eine duct zweier Kreisbogen.

Die Reduction der Grössen α, β, γ, δ, ε mittelst der G welche wir mit obern Zeichen nehmen, ergiebt:

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos v_{1,3}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\cos v_{2,3}+\cos v_{1,2}+\cos v_{1,3}}{\sin v_{1,2}}$$

woraus:

$$\cot\alpha = \cot v_{1,2}+\frac{\cos v_{2,3}}{\sin v_{1,2}\cos v_{1,3}}$$

$$\sin^2\beta = \frac{\cos^2 v_{1,3}+\cos^2 v_{2,3}+2\cos v_{1,2}\cos v_{1,3}\cos v_{2,3}}{\sin^2 v_{1,2}}$$

$$\cos^2\beta = \frac{1-\cos^2 v_{1,2}-\cos^2 v_{1,3}-\cos^2 v_{2,3}-2\cos v_{1,2}\cos v_{1,3}\cos}{\sin^2 v_{1,2}}$$

und dem analog:

$$\sin\gamma\sin\delta\sin\varepsilon = \cos v_{1,4}$$

$$\cos\gamma\sin\delta\sin\varepsilon = \frac{\cos v_{2,4}+\cos v_{1,2}\cos v_{1,4}}{\sin v_{1,2}}$$

woraus:

$$\cot\gamma = \cot v_{1,2}+\frac{\cos v_{2,4}}{\sin v_{1,2}\cos v_{1,4}}$$

$$\sin^2\delta \sin^2\varepsilon = \frac{\cos^2 v_{1,4} + \cos^2 v_{2,4} + 2\cos v_{1,2} \cos v_{1,4} \cos v_{2,4}}{\sin^2 v_{1,2}}$$

Endlich erhält man aus der letzten Gl. (47) verbunden mit den vorstehenden:

$$\cos\beta \cos\delta \sin\varepsilon = \cos v_{3,4} - (\sin v_{1,2})^{-2} \{ \cos v_{1,3} \cos v_{1,4} + \cos v_{1,2} (\cos v_{2,3} \cos v_{1,4} + \cos v_{1,3} \cos v_{2,4}) + \cos v_{2,3} \cos v_{2,4} \}$$

nach Division durch den ermittelten Wert von $\cos\beta$ den von $\cos\delta \sin\varepsilon$ und hieraus in Verbindung mit $\sin\delta \sin\varepsilon$ die Werte von $\cot\delta$ und $\sin^2\varepsilon$.

Nach Einsetzung dieser Werte würde Ω_4 in dem Sinne symmetrisch sein müssen, dass die Indices 1, 2, 3, 4 sich unter einander beliebig vertauschen lassen.

XIX.

Miscellen.

1.

Bemerkungen über die Transformation der Leibnitz'schen Reihe im vorigen Teile XXIV. 8.

Die von Polster hergeleitete Reihe für den Kreisquadranten ist, wie dem Verfasser und mir damals unbekannt war, wie sich aber nach erhaltener Einsprache bald ergab, schon mehrfach in früheren Schriften enthalten. Zuerst hat sie Euler in seinem Werke „Institutiones calculi differentialis". Petersburg 1755. Pars posterior p. 295. als Beispiel der Anwendung eines Princips der Transformation aus derselben Leibnitz'schen Reihe übereinstimmend gewonnen. Seine Transformationsformel ist:

$$ax+bx^2+cx^3+\ldots=\frac{x}{1+x}a+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\varDelta a+\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\varDelta^2 a+\ldots$$

wo $\varDelta a=b-a$; $\varDelta^2 a=(c-b)-(b-a)$; etc.

Ferner ist jene Reihe als specieller Fall in der allgemeinern, gleichfalls von Euler gefundenen Reihe

$$\frac{1+x^2}{x}\operatorname{arctg} x=1+\frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\ldots$$

nämlich für $x=1$, enthalten.

Eine andere allgemeinere Reihenentwickelung, welche jene in sich begreift, ist 1865 von E. Catalan entdeckt und in dessen „Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies" (Académie de Belgique tome XXXIII.) enthalten. Sie lautet:

$$\frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{(1+z)(3+z)\ldots(2p+1+z)}$$

$$+ \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{(1-z)(3-z)\ldots(2p+1-z)}$$

fällt also für $z=0$ mit der in Rede stehenden Reihe zusammen.

Die Arbeit von Polster hat demnach ihre Bedeutung als vierter Weg zu gleichem Ziele.

R. Hoppe.

2.

Satz über Parabel-Secanten und Sehnen nebst einigen Folgerungen.

Die Eigenschaft aller Parabelpunkte, dass die Quadrate ihrer Ordinaten sich verhalten wie die zugehörigen Abscissen, gilt bekanntlich für jeden beliebigen Durchmesser als Axe, wenn dessen Scheitel als Anfangspunkt und die durch ihn halbirten (der Tangente in seinem Scheitel parallelen) Sehnen als Ordinaten genommen werden. — Es lässt sich nun folgender Lehrsatz beweisen:

Legt man durch einen Punkt T innerhalb oder ausserhalb einer Parabel ein Sehnen- resp. Secantenbüschel, so ist das Rechteck aus den Abscissen der Schnittpunkte (Q, R) — bezogen auf den durch T gehenden Durchmesser als Axe und seinen Scheitel A als Anfangspunkt — constant, u. z. gleich dem Quadrat der Entfernung (AT) des festen Punktes von dem Scheitel des Durchmessers.

D. h. für irgend eine Secante TQR (Fig. 1.) oder Sehne QTR (Fig. 2.) ist $AB.AC = AT^2$.

Beweis. Die Ordinaten von Q und R mögen y und Y heissen, die zugehörigen Abscissen x und X, endlich $AT = z$ sein, so hat man, da Q und R Parabelpunkte sind:

$$Y^2 : y^2 = X : x.$$

Ferner aus den ähnlichen Dreiecken RCT und QBT:

I) für T ausserhalb:	II) für T innerhalb:
$Y^2 : y^2 = (X+z)^2 : (x+z)^2$ und auch	$Y^2 : y^2 = (X-z)^2 : (z-x)^2$ und auch
$= X : x$. Daher	$= X : x$. Daher
$x(X^2+2Xz+z^2) = X(x^2+2xz+z^2)$.	$x(X^2-2Xz+z^2) = X(z^2-2xz+x^2)$.

Bei der Auflösung der Klammern hebt sich in beiden Fällen $2xXz$ fort, und man behält $xX^2+xz^2-Xx^2-Xz^2=0$, oder

$$z^2(X-x)-Xx(X-x)=0.$$

Hier kann nun

1) $z^2-xX=0$ sein. Dann ist $z^2=Xx$, oder $AT^2=AB.AC$, wie oben behauptet, so dass z die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abscissen ist. — Ist aber

2) $X-x=0$, so ist $X=x$, also auch $Y=y$, und man erhält

a) für T' innerhalb die Sehne, die in T' halbirt wird, also selbst Ordinate des Durchmessers ist. x, X und z fallen in AT' zusammen.

b) für T ausserhalb wird die Secante zur Tangente, da sich bei der Drehung um T*) die Abscissen und Ordinaten bis zum Zusammenfall genähert haben. Aus xX wird jetzt x^2, und man erhält $z=x$, die bekannte Eigenschaft der Subtangente, deren Herleitung auf diesem Wege mir instructiver scheint, als die übliche.

Wählt man (Fig. 3.) T und T' so, dass beide auf demselben Durchmesser liegen und $AT=AT'$ ist, so gehört je eine Secante TR und Sehne $Q'R$ zusammen, die gemeinschaftliche Abscissen haben. (Denn, da $AT=AT'$ und $AC=AC$, so muss, wenn $AT^2=AC.AB$ und $AT'^2=AC.AB'$ sein soll, auch B und B' zusammenfallen, also die Ordinaten QB und $Q'B'$ in gerader Linie liegen.)

Wird nun für $X-x=0$ TR zur Tangente und $T'R$ zur Ordinate v des Berührungspunktes U, während die Abscissen in $AT''=x$ zusammenfallen, so findet man v aus der Bedingung

$$v^2:y^2=z:x \text{ und } v^2:Y^2=z:X,$$

woraus

$$v^4:y^2Y^2=z^2:Xx=1$$

und

$$v^2=yY$$

---

*) Gewöhnlich behandelt man die Aufgabe: „In einem gegebenen Punkte der Parabel eine Tangente anzulegen" — leitet also die Tangente aus der Secante durch Drehung um einen der Schnittpunkte ab. Bei dieser Drehung ändert sich der äussere Abschnitt TA fortwährend, bis er für die Tangente gleich der Abscisse des Berührungspunktes geworden ist. Hier dagegen sieht man, dass AT für alle Secanten constant und gleich der mittleren Proportionale der Abscissen der Schnittpunkte ist. Fallen diese zusammen, so muss $z=\sqrt{x^2}=x$ werden.

v ist also die mittlere Proportionale zwischen den Ordinaten, wie z zwischen den Abscissen der Schnittpunkte.

Da es nun von T aus nur zwei Tangenten an die Parabel giebt, in die alle Secanten oberhalb und unterhalb des Durchmessers übergehen müssen, so rücken die zwei zusammengehörigen Y und y aller Secanten sämmtlich zu derselben Ordinate v zusammen, d. h. auch v ist für alle durch T gelegten Strahlen constant. Sucht man nun für v ein Analogon zu AT, so findet man, dass das Stück der Scheiteltangente, welches zwischen den beiden von T ausgehenden Tangenten liegt (Fig. 3.), gleich v ist.

Man kann demgemäss den obigen Satz auch für das Rechteck aus den Ordinaten erweitern; es ist dieses constant gleich DE^2.

Da in Fig. 3. T' auf $Q'R$ und TC liegt, QQ' als Ordinate des Durchmessers von ihm in B halbirt wird, so erhält man T' aus T, B und C, wenn man $QBQ' \parallel RC$ zieht, $BQ' = BQ$ macht und $Q'R$ zieht, d. h. wenn man den harmonischen Gegenpunkt zu T' construirt. T, B, T' und C sind also harmonische Punkte. Dies folgt auch aus

$$z:x = X:z, \text{ oder } (z+x):(z-x) = (X+z):(X-z), \text{ d. h.}$$
$$BT:BT' = CT:CT'.$$

Man kann diese Construction benutzen, *um zu einem beliebigen Durchmesser leicht die Ordinaten zu zeichnen*, was sonst etwas umständlich ist. Man zieht irgend eine Secante TQR, macht $AT' = AT$, zieht $RT'Q$ und erhält in QQ' die gesuchte Ordinate. (In der Richtung QT' würde man den Endpunkt der zweiten Ordinate RR' finden.)

Man könnte auch von R ausgehend eine Sehne $RT'Q'$ ziehen, $AT = AT'$ machen und durch RT den Punkt Q ermitteln, der dann, mit Q' verbunden, die Ordinate QQ' liefert.

Selbstverständlich gilt alles Gesagte auch für die Hauptaxe als besonderen Durchmesser, dessen Ordinaten senkrecht sind.

Heinrich Simon, stud. math.

3.

Erweiterung der bekannten Speciallösung des Dreikörperproblems.

Es ist bekannt, dass 3 Punkte mit gleichen Massen unter gegenseitiger Anziehung sich geradlinig nach einem Centrum hin so bewegen können, dass sie beständig die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Dieser Fall einer analytisch darstellbaren Bewegung eines Punktsystems lässt sich offenbar in mehrfacher Hinsicht erweitern.

1) Statt dreier Punkte kann man beliebig viele nehmen, welche die Ecken eines regelmässigen Vielecks sind.

2) Zwischen je 2 auf einander folgenden Hauptpunkten kann man eine umkehrbar periodische Reihe anderer Punkte von verschiedenen Radienvectoren einschalten.

3) Auch die Massen der eingeschalteten Punkte können verschieden sein.

4) Dem ganzen System kann man eine Rotation um das Centrum ertheilen.

5) Statt des ebenen Vielecks kann man auch ein regelmässiges Polyeder nehmen. Die Rotation ist dann nicht zulässig. Die Einschaltung erfordert gewisse regelmässige Anordnung.

Das Anziehungsgesetz ist beliebig. Dass das Centrum mit dem System sich in constanter Richtung mit constanter Geschwindigkeit bewegen kann, versteht sich von selbst.

Wir wollen die Verallgemeinerung nur soweit verfolgen, als sie keine zu grossen Complicationen mit sich bringt, und betrachten zuerst die

Bewegung in der Ebene.

Es seien n Punkte $(x_k y_k)$ mit den Massen m_k $(k = 0, 1, \dots n-1)$ vorhanden, der Abstand von m_k und m_h sei $= \Delta_{k,h}$, das Potential ihrer Anziehung

$$= m_k m_h f(\Delta_{k,h})$$

dann ist nach dem Alembert'schen Princip

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k (x_k'' \delta x_k + y_k'' \delta y_k) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{h=0}^{h=k-1} m_k m_h \delta f(\Delta_{k,h}) \tag{1}$$

wo die Striche die Differentiation nach der Zeit t bezeichnen. Zur

Vereinfachung kann man $f(0) = 0$ setzen, die h und k von 0 bis $n-1$ gehen lassen und die dadurch verdoppelte Summe durch 2 dividiren. Setzt man

$$x_k = r_k \cos\varphi_k; \quad y_k = r_k \sin\varphi_k$$

so wird

$$x_k''\delta x_k + y_k''\delta y_k = (r_k'' - r_k\varphi_k')\delta r_k + (2r_k'\varphi_k' + r_k\varphi_k'')r_k\delta\varphi_k$$

$$(\Delta_{k,h})^2 = r_k^2 + r_h^2 - 2r_k r_h \cos(\varphi_h - \varphi_k)$$

$$\Delta_{k,h}\delta\Delta_{k,h} = [r_k - r_h\cos(\varphi_h - \varphi_k)]\delta r_k + [r_h - r_k\cos(\varphi_h - \varphi_k)]\delta r_h$$
$$+ r_k r_h \sin(\varphi_h - \varphi_k)(\delta\varphi_h - \delta\varphi_k)$$

Nach Einführung des letzten Ausdrucks zerfällt die rechte Seite der Gl. (1) in 2 Teile, die nach Vertauschung von k und h in einander übergehen, mithin einander gleich sind. Die Coefficienten aller δr_k und $\delta\varphi_k$ müssen dann die Gleichung erfüllen, und man hat für jedes k:

$$r_k'' - r_k\varphi_k'^2 = \sum_{h=0}^{h=n-1} m_h f'(\Delta_{k,h}) \frac{r_k - r_h\cos(\varphi_h - \varphi_k)}{\Delta_{k,h}}$$

$$2r_k'\varphi_k' + r_k\varphi_k'' = -\sum_{h=0}^{h=n-1} m_h f'(\Delta_{k,h}) \frac{r_h \sin(\varphi_h - \varphi_k)}{\Delta_{k,h}}$$

Ausserdem ergiebt sich die Gleichung der lebendigen Kraft, indem man ∂ statt δ schreibt und integrirt, nämlich:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k(r_k'^2 + r_k^2\varphi_k'^2) = \sum_{h=0}^{h=n-1} m_k m_h f(\Delta_{k,h}) + \text{const.}$$

Damit die Tangentialbewegung die gegenseitige Neigung der Radienvectoren nicht ändert, muss

$$\varphi_k = \varphi + \alpha_k$$

und φ allein variabel sein; die Gleichungen werden:

$$r_k'' - r_k\varphi'^2 = \sum_{h=0}^{h=n-1} m_h f'(\Delta_{k,h}) \frac{r_k - r_h\cos(\alpha_h - \alpha_k)}{\Delta_{k,h}}$$

$$2r_k'\varphi' + r_k\varphi'' = -\sum_{h=0}^{h=n-1} m_h f'(\Delta_{k,h}) \frac{r_h \sin(\alpha_h - \alpha_k)}{\Delta_{k,h}}$$

$$(\Delta_{k,h})^2 = r_k^2 + r_h^2 - 2r_k r_h \cos(\alpha_h - \alpha_k)$$

Es sei zwischen je 2 Hauptpunkten nur ein Punkt eingesch[...] die Anzahl aller wird dann $2n$, alle benachbarten Radienvec[...] haben gleiche Neigung $\frac{2R}{n}$, und man hat:

$$r_{2k} = r; \quad r_{2k+1} = q; \quad \alpha_h - \alpha_k = 2\frac{h-k}{n}R$$

$$m_{2k} = m; \quad m_{2k+1} = l$$

Die Gleichungen werden:

$$r'' - r\varphi'^2 = m \sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\Delta_{2k,2h}) r \frac{1-\cos 4\frac{h-k}{n}R}{\Delta_{2k,2h}}$$

$$+ l \sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\Delta_{2k,2h+1}) \frac{r - q\cos 2\frac{2h-2k+1}{n}R}{\Delta_{2k,2h+1}}$$

$$q'' - q\varphi'^2 = m \sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\Delta_{2k-1,2h}) \frac{q - r\cos 2\frac{2h-2k+1}{n}R}{\Delta_{2k-1,2h}}$$

$$+ l \sum_{h=1}^{h=n} f'(\Delta_{2k-1,2h-1}) q \frac{1-\cos 4\frac{h-k}{n}R}{\Delta_{2k-1,2h-1}}$$

$$2r'\varphi' + r\varphi'' = -m \sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\Delta_{2k,2h}) \frac{r\sin 4\frac{h-k}{n}R}{\Delta_{2k,2h}}$$

$$- l \sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\Delta_{2k,2h+1}) \frac{q\sin 2\frac{2h-2k+1}{n}R}{\Delta_{2k,2h+1}}$$

$$2q'\varphi' + q\varphi'' = -m \sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\Delta_{2k-1,2h}) \frac{r\sin 2\frac{2h-2k+1}{n}R}{\Delta_{2k-1,2h}}$$

$$- l \sum_{h=1}^{h=n} f'(\Delta_{2k-1,2h-1}) \frac{q\sin 4\frac{h-k}{n}R}{\Delta_{2k-1,2h-1}}$$

$$\Delta_{2k,2h} = 2r\,.\,abs.\sin 2\frac{h-k}{n}R$$

$$\Delta_{2k-1,2h} = \Delta_{2k,2h+1} = \sqrt{q^2 + r^2 - 2qr\cos 2\frac{2h-2k+1}{n}R}$$

$$\Delta_{2k-1,2h-1} = 2q\,.\,abs.\sin 2\frac{h-k}{n}R$$

Da die allgemeinen Glieder aller Reihen cyklisch periodisch sind, so können die h beliebige successive n Werte aus der Zahlenreihe durch-

laufen, mithin die Zahlen k, $k+1$, ... $k+n-1$. Setzt man dann $h+k$ für h, so werden alle Ausdrücke unabhängig von k, und 0, $n-1$ die Grenzen der h. Lässt man jetzt die Terme, welche den Factor $f'(0)=0$ haben, weg, und substituirt $n-h$ oder $n-h-1$ für h, jenachdem die untere Grenze 1 oder 0 ist, so bleiben in den 2 ersten Gleichungen die rechten Seiten ungeändert, wechseln dagegen ihre Vorzeichen in der 3. und 4. Gleichung, sind folglich in den letztern $=0$. Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\varDelta_h = \sqrt{q^2+r^2-2qr\cos 2\frac{2h+1}{n}R}$$

so kommt:

$$r''-r\varphi'^2 = m\sum_{h=1}^{h=n-1} f'\left(2r\sin\frac{2hR}{n}\right)\sin\frac{2hR}{n}$$

$$+l\sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\varDelta_h)\frac{r-q\cos 2\frac{2h+1}{n}R}{\varDelta_h}$$

$$q''-q\varphi'^2 = m\sum_{h=0}^{h=n-1} f'(\varDelta_h)\frac{q-r\cos 2\frac{2h+1}{n}R}{\varDelta_h}$$

$$+l\sum_{h=1}^{h=n-1} f'\left(2q\sin\frac{2hR}{n}\right)\sin\frac{2hR}{n}$$

$$2r'\varphi'+r\varphi''=0;\quad 2q'\varphi'+q\varphi''=0$$

Letztere Gleichungen integrirt geben:

$$r^2\varphi'=c^2;\quad q^2\varphi'=b^2$$

woraus entweder

$$r=cp;\quad q=bp;\quad \varphi'=\frac{1}{p^2}\ \text{oder}\ \varphi'=0$$

Soll φ' nicht null sein, so gehen die 2 ersten Gleichungen über in

$$p''-\frac{1}{p^3}=\frac{m}{c}\sum_{h=1}^{h=n-1} f'\left(2cp\sin\frac{2hR}{n}\right)\sin\frac{2hR}{n}$$

$$+\frac{l}{c}\sum_{h=0}^{h=n-1} f'(p\delta_h)\frac{c-b\cos 2\frac{2h+1}{n}R}{\delta_h}$$

$$=\frac{m}{b}\sum_{h=0}^{h=n-1} f'(p\delta_h)\frac{b-c\cos 2\frac{2h+1}{n}R}{\delta_h}$$

$$+\frac{l}{b}\sum_{h=1}^{h=n-1} f'\left(2bp\sin\frac{2hR}{n}\right)\sin\frac{2hR}{n}$$

$$\delta_h = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\frac{2h+1}{n}R}$$

Beide Ausdrücke müssen unabhängig von p einander gleich se
Diese Bedingung lässt sich durch l, m allein erfüllen, wenn

$$f'(\xi) = a\xi^{\varkappa}$$

ist. Sei

$$2A = \sum_{h=1}^{h=n-1}\left(2\sin\frac{2hR}{n}\right)^{\varkappa+1}$$

$$B = \sum_{h=0}^{h=n-1}\delta_h^{\varkappa-1}; \quad C = \sum_{h=0}^{h=n-1}\delta_h^{\varkappa-1}\cos 2\frac{2h+1}{n}R$$

dann lautet sie:

$$Ac^{\varkappa-1}m + \left(B - \frac{b}{c}C\right)l = \left(B - \frac{c}{b}C\right)m + Ab^{\varkappa-1}l$$

woraus:

$$m = \left(Ab^{\varkappa-1} - B + \frac{b}{c}C\right)M$$

$$l = \left(Ac^{\varkappa-1} - B + \frac{c}{b}C\right)M$$

$$p'' = p^{-3} + ep^{\varkappa}$$

und nach Integration:

$$p'^2 = K - p^{-2} + \frac{2e}{\varkappa+1}p^{\varkappa+1}$$

$$t = \int\frac{\partial p}{\sqrt{K - p^{-2} + \frac{2e}{\varkappa+1}p^{\varkappa+1}}}$$

wo

$$e = \left\{A^2(bc)^{\varkappa-1} + BC\frac{b^2+c^2}{bc} - B^2 - C^2\right\}aM$$

Da noch über das Verhältniss $b:c$ verfügt werden kann, so würden sich die 2 Bedingungen erfüllen lassen, welche aus der Annahme

$$f'(\xi) = a\xi^{\varkappa} + a_1\xi^{\lambda}$$

hervorgehen.

Der Fall $\varphi' = 0$ ist in der vorstehenden Lösung nicht ausgeschlossen, nur sind hier die Gleichungen $r = cp$; $q = bp$ eine willkürliche Specialisirung. Die allgemeine Integration ist mit gewöhnlichen Mitteln nicht ausführbar.

Bewegung im Raume.

Wenn n Punkte $(x_k y_k z_k)$ von gleicher Masse m, die sich unter gegenseitiger Anziehung bewegen, zu irgend einer Zeit die Ecken eines regelmässigen Polyeders einnehmen und gleiche nach dem Radiusvector gerichtete Geschwindigkeiten haben, so bedarf es keines Beweises, dass sie in diesem Zustande verharren, und nur der Radiusvector variirt; daher reicht auch die Gleichung der lebendigen Kraft allein zur Bestimmung der Bewegung hin. Man hat also:

$$r'^2 = 2m \sum_{h=1}^{h=n-1} f(\varDelta_h) + \text{const.}$$

wo die $\varDelta_h$ die Entfernungen aller Ecken von einer bezeichnen. Setzt man

$$\varDelta_h = r\delta_h$$

so ist δ_h die Kante oder Diagonale für den Eckradius $= 1$.

Hiernach hat man für das Tetraeder:

$$r'^2 = 6mf(2\sqrt{\tfrac{2}{3}}.u) + \text{const.}$$

für den Würfel:

$$r'^2 = 2m\left\{3f\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) + 3f\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r\right) + f(2r)\right\} + \text{const.}$$

für das Oktaeder:

$$r'^2 = 2m\{4f(\sqrt{2}.r) + f(2r)\} + \text{const.}$$

für das Dodekaeder:

$$r'^2 = 2m\left\{3f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}r\right) + 6f\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) + 6f\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r\right)\right.$$
$$\left. + 3f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}r\right) + f(2r)\right\} + \text{const.}$$

für das Ikosaeder:

$$r'^2 = 2m\left\{5f\left(2r\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\right) + 5f\left(2r\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\right) + f(2r)\right\} + \text{const.}$$

R. Hoppe.

4.

Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension.

Jede Curve kann ein undurchdringliches Band repräsentiren, wenn sie keinen Doppelpunkt hat. Ein unauflösbarer Knoten setzt voraus, dass die Curve geschlossen ist. Er ist dadurch bedingt, dass die Curve durch keine stetige Variation in die Curve eines Bandes ohne Knoten, z. B. in einen Kreis, übergehen kann, ohne dass zu irgend einer Zeit ein Doppelpunkt entsteht.

Ein Beispiel einer solchen Curve ist folgendes:

$$x = \cos u(3\cos u + 2)$$
$$y = 5\sin u\cos u$$
$$z = \sin u(25\cos^2 u - 1)$$

An der Abbildung, welche die Projection der Curve auf die xy Ebene darstellt, und wo die Intervalle der positiven und der negativen z durch ausgezogene und punktirte Linien unterschieden sind, erkennt man, dass sie einem geschlossenen Bande mit dem bekannten einfachen, offenbar unauflösbaren Knoten entspricht. Der analytische Nachweis würde für den geringen Zweck zu umständlich sein.

Die mit der Zeit t variirende Curve sei ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos u\{3\cos u(1+\cos t)+3+\cos t\}f(t)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sin u\{5\cos u(1+\cos t)+1-\cos t\}f(t)$$
$$z = \tfrac{1}{2}\sin u(25\cos^2 u-1)(1+\cos t)f(t)$$
$$w = u\sin t.f(t)$$

Hier bedeutet w die vierte Coordinate, indem eine Ausweichung nach vierter Dimension zugelassen wird, und $f(t)$ eine Function, die so bestimmt werden kann, dass die Curve eine constante Länge behält. Ueberdies sei $f(0) = 1$; $f(2\mathrm{R}) = c$.

Für $t = 0$ und $t = 2\mathrm{R}$ verschwindet w, die Gleichungen drücken 2 Curven im Raume aus und zwar beziehungsweise die obige Knotencurve und den Kreis

$$x = c\cos u; \quad y = c\sin u; \quad z = 0$$

Zwischen beiden findet ein stetiger Uebergang statt, und da für jedes t bei Variation von u von 0 bis 4R die eine Coordinate w nie 2 gleiche Werte hat, so ist schon darum ein Doppelpunkt zu keiner Zeit möglich, folglich ist durch den Uebergang der Knoten aufgelöst.

R. Hoppe.

XX.

Ueber gewisse Quadrate, die an zwei gegebene Kreise geknüpft sind.

Zwei Aufgaben der analytischen Geometrie.

Von

Mack.

Wenn zwei Kreise nach Lage und Grösse gegeben sind, kann unter Umständen verlangt werden, dass man ein Quadrat zeichne, welches zwei Ecken auf dem einen Kreis habe, die zwei übrigen auf dem andern. Hiebei sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu berücksichtigen: die zwei auf dem einen jener Kreise liegenden Ecken des Quadrats sollen entweder Endpunkte einer Diagonale oder Endpunkte einer Seite sein. Dem entsprechend ergeben sich zwei Aufgaben, welche offenbar zusammen gehören. Bei beiden ist es ganz entschieden die Lehre von der Chordale zweier Kreise, welche die wichtigsten Anknüpfungspunkte für die Auflösungen darbietet; aber diese selbst zeigen sich, sowohl was den Gang des Verfahrens als was den Charakter des Ergebnisses betrifft, sehr verschieden geartet. Ich will sofort die eine und die andere Aufgabe mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie in Angriff nehmen und sie zu erledigen suchen.

§ 1.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Kreisen, deren Mittelpunkte getrennt liegen, soll ein Quadrat gesucht werden, von welchem die eine Diagonale als Sehne in den ersten Kreis falle, die andere als Sehne in den zweiten.

Auflösung. Es sei $2a$ der Abstand der Mittelpunkte M_I, M_{II} der zwei gegebenen Kreise K_I, K_{II}; es seien r_I, r_{II} die zugehörigen Radien, und zwar r_I der etwa grössere. Der Halbirungspunkt O der Strecke $M_I M_{II}$ werde als Ursprung rechtwinklig verbundener Coordinaten OX, OY genommen, so zwar dass der positive Zweig OX der Abscissenaxe der durch den Punkt M_{II} gehende sei.

Den Punkten M_I, M_{II} kommen hienach beziehungsweise Abscissenwerte $-a$, $+a$ zu, während der Ordinatenwert eines jeden Null ist; und als Gleichungen der zwei Kreise sind angegeben

$$1)\quad (x+a)^2+y^2=r_I^2, \qquad 2)\quad (x-a)^2+y^2=r_{II}^2.$$

Es genügt offenbar, die Länge der Diagonale des verlangten Quadrats und die Lage seines Mittelpunkts C zu ermitteln; wir führen demgemäss jene Länge 2ϱ in die Rechnung ein und die Coordinatenwerte p, q des Punkts C. Der dem Quadrat selbst umzuzeichnende Kreis ist dann darzustellen durch die Gleichung

$$3)\quad (x-p)^2+(y-q)^2=\varrho^2,$$

und sofort sind auch die Gleichungen der zugehörigen Diagonallinien zu bilden. Da nämlich die in den Kreis K_I fallende Diagonale eine gemeinschaftliche Sehne der Kreise 1) und 3) sein muss, so wird die Gleichung der entsprechenden Geraden durch Subtraction der 3) von der 1) gewonnen, wodurch man mit leichter Umformung erhält

$$4)\quad 2(p+a)x+2qy=p^2+q^2-a^2+r_I^2-\varrho^2.$$

Auf demselben Wege, durch Verbindung von 2) und 3) findet sich die Darstellung der andern Diagonallinie

$$5)\quad 2(p-a)x+2qy=p^2+q^2-a^2+r_{II}^2-\varrho^2,$$

diese natürlich auch aus 4) ganz einfach durch gewisse Substitutionen zu erhalten.

Da die Geraden 4) und 5) beide durch den Punkt (p, q) gehen, und da sie aufeinander senkrecht stehen müssen, so ergeben sich hieraus die drei folgenden, zur Bestimmung der unbekannten p, q, ϱ dienenden Gleichungen.

$$2(p+a)p+2q^2=p^2+q^2-a^2+r_I^2-\varrho^2$$
$$2(p-a)p+2q^2=p^2+q^2-a^2+r_{II}^2-\varrho^2$$
$$(p-a)(p+a)+q^2=0.$$

Sie werden durch nächst liegende Umformungen und Reductionen einzeln übergeführt in

$$6)\quad 2ap+p^2+q^2 = r_1{}^2-a^2-\varrho^2$$
$$7)\quad -2ap+p^2+q^2 = r_{11}{}^2-a^2-\varrho^2$$
$$8)\quad p^2+q^2 = a^2.$$

Statt der 6) und 7) sind aber noch bedeutend einfachere Gleichungen zu erhalten, wenn man jene sowohl durch Subtraction als durch Addition mit einander verbindet und zugleich die Angabe 8) beizieht. Wird nämlich die 7) von der 6) subtrahirt, so erhält man sofort

$$4ap = r_1{}^2-r_{11}{}^2$$

und demgemäss, weil a nicht Null sein darf,

$$9)\quad p = \frac{r_1{}^2-r_{11}{}^2}{4a}$$

Die Addition der 6) und 7) gibt zunächst

$$2(p^2+q^2) = r_1{}^2+r_{11}{}^2-2a^2-2\varrho^2;$$

wird aber hier der durch 8) darbebotene Wert für p^2+q^2 eingesetzt, so bekommt man mit leichter Umformung

$$\varrho^2 = \frac{r_1{}^2+r_{11}{}^2-4a^2}{2},$$

also auch rechts und links die absolute Wurzel nehmend

$$10)\quad \varrho = \sqrt{\frac{r_1{}^2+r_{11}{}^2-4a^2}{2}}$$

Nachdem p und ϱ bereits ermittelt sind, bleibt nur übrig, in 8) die entsprechende Substitution für p zu machen um zu erhalten

$$q^2 = a^2-\frac{(r_1{}^2-r_{11}{}^2)^2}{16a^2}$$

also

$$11)\quad q = \pm\frac{\sqrt{16a^4-(r_1{}^2-r_{11}{}^2)^2}}{4a}$$

Um das absolute Glied dieses Wertes ebenso für eine geometrische Construction geeignet zu machen, wie sie bei 9) und 10) von selbst sich darbietet, hat man den in 11) vorkommenden Wurzelausdruck nur umzuformen in

$$\sqrt{4a^2+(r_1{}^2-r_{11}{}^2)}\quad\sqrt{4a^2-(r_1{}^2-r_{11}{}^2)},$$

wonach man bemerkt, dass die rechte Seite der 11) als vierte Proportionale zu drei bekannten Längen sich ermitteln lässt. Wir wollen jedoch bei derartigen Constructionen nicht verweilen, sondern viel-

mehr — bessere in Aussicht nehmend — vorerst die Gleichungen 9) ... 11) genau darauf untersuchen, was über die Frage nach der Möglichkeit unsrer Aufgabe und nach der Anzahl der Auflösungen aus ihnen zu entnehmen sei.

Was zunächst die 9) betrifft, so gibt sie für p immer einen einzigen reellen Wert, wie auch die positiven r_1, r_{11}, a gegeben sein mögen.

Auch die 10) bietet für ϱ immer nur einen einzigen Wert, welcher ja, um brauchbar zu sein, reell und positiv sein muss.

Zu dem eindeutigen, immer reellen Abscissenwert des Punktes C, welchen die 9) gegeben hat, liefert die 11) den zugehörigen Ordinatenwert: entweder imaginär, oder reell und eindeutig (nämlich nullgleich), oder reell und zweideutig (nämlich in Gestalt zweier entgegengesetzt-gleichen Grössen).

Im ersten dieser drei Fälle ist gar keine der Aufgabe genügende Lage für Punkt C zu finden, im zweiten Fall eine einzige, auf der Geraden $M_1 M_{11}$ befindliche C_0, im dritten endlich erhält man zwei Lagen C_1, C_{11}, die mit Bezug auf $M_1 M_{11}$ symmetrisch sind.

Die im zweiten Fall auftretende Lage C_0 kann eine einzige Auflösung der Aufgabe gewähren, aber solche ist doch nur dann wirklich vorhanden, wenn zu dem gefundenen C_0 auch ein reeller Wert für ϱ hinzutritt.

Ebenso die im vorigen dritten Falle auftretenden C_1, C_{11} können zwei Auflösungen unsrer Aufgabe gewähren; aber solche sind nur dann wirklich vorhanden, wenn der mit ihnen zugleich sich ergebende (einzige) Wert von ϱ reell ist.

Nach Obigem haben wir folgende Zusammenstellungen zu machen.

A) Bedingung der Existenz einer einzigen Auflösung unsrer Aufgabe:

α) die aus Betrachtung des Radicanden in 10) zu entnehmende

$$2a < \sqrt{r_1^2 + r_{11}^2};$$

β) die aus Betrachtung des Rad. in 11) sich ergebende

$$2a = \sqrt{r_1^2 - r_{11}^2} = \sqrt{(r_1 + r_{11})(r_1 - r_{11})}.$$

Hierbei zu bemerken, dass mit obiger α) von selbst mitgesetzt ist

$$2a < r_1 + r_{11},$$

und durch die β) von selbst mitgesetzt

$$2a > r_1 - r_{11}.$$

B) Bedingungen der Existenz von zwei Auflösungen unsrer Aufgabe:

α) $2a < \sqrt{r_1^2 + r_{11}^2}$ mit Einschluss von $2a < r_1 + r_{11}$.

β) $2a > \sqrt{r_1^2 - r_{11}^2}$ mit Einschluss von $2a > r_1 - r_{11}$.

Wenn wir diese Angaben unter A und B geometrisch auslegen wollen, so ist vor allem zu bemerken, dass in beiden Gruppen gleich gut, gewissermassen als Vorbedingungen enthalten sind

$$2a < r_1 + r_{11} \quad \text{und} \quad 2a > r_1 - r_{11}.$$

Damit ist offenbar gesagt:

I) Für jede Möglichkeit der Auflösung unsrer Aufgabe ist als Vorbedingung die zu stellen, dass die zwei gegebenen Kreise einander schneiden.

Sofern dies geschieht, seien die zwei sich ergebenden Durchschnitte symmetrisch zur $M_1 M_{11}$ liegend, mit D_1, D_{11} bezeichnet, und E (auf $M_1 M_{11}$ selbst) heisse der Halbirungspunkt der gemeinschaftlichen Sehne $D_1 D_{11}$; diese, in die Chordale der Kreise K_1, K_{11} fallende, ist nebst den zwei congruenten und symmetrisch liegenden Dreiecken $M_1 M_{11} D_1$ und $M_1 M_{11} D_{11}$ wol zu beachten.

Wenn die Grundforderung I) erfüllt ist, und man sieht auf die Gruppe A von Bedingungen zurück, so ist bei der A), β) nämlich

$$2a = \sqrt{r_1^2 - r_{11}^2}$$

zu bemerken, dass (wegen der Grundvoraussetzung $a > 0$) dies nur zutreffen könne, wenn r_1 und r_{11} ungleich seien, also (nach Einleitung) wenn $r_1 > r_{11}$ sei. Letzteres also festsetzend wollen wir auch nicht übersehen, dass hier mit der A, β) von selbst erfüllt sei die A, α). Nun setzen wir gemäss der A, β) in jeder der drei Gleichungen 9) ... 11) den Wert $\sqrt{r_1^2 - r_{11}^2}$ für $2a$ ein; sie liefern dann der Reihe nach ganz einfach

$$p = a = \frac{\sqrt{r_1^2 - r_{11}^2}}{2}, \quad \varrho = r_{11}, \quad q = 0.$$

Die gemachten Bemerkungen reichen hin, um folgende Behauptungen zu begründen.

II) Unsre Aufgabe lässt eine einzige Auflösung zu

dann und nur dann, wenn die Kreise K_1, K_{11} ungleich gross ($K_1 > K_{11}$) gegeben sind, und wenn sie zwei solche Durchschnitte D_1, D_{11} haben, dass jeder der Punkte D mit den gegebenen Mittelpunkten M_1, M_{11} als Ecken ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt, welches den rechten Winkel bei dem Mittelpunkt M_{11} des kleineren Kreises hat.

Dieser Punkt M_{11} $(a, 0)$ ist es dann selbst, mit welchem sowol der Halbirungspunkt E der Sehne $D_1 D_{11}$ als der Mittelpunkt C_0 $\{p = a,\ q = 0\}$ des gesuchten Quadrats zusammenfällt, dessen Halbdiagonale ($\varrho = r_{11}$) gleich dem Halbmesser des kleineren gegebenen Kreises ist. Der Durchmesser $D_1 D_{11}$ des letzteren, als Sehne des grösseren Kreises, ist sogar selbst die eine Diagonale des gesuchten Quadrats, während die andere, als Durchmesser von K_{11}, senkrecht zur $D_1 D_{11}$ in die Gerade $M_1 M_{11}$ fällt.

Sehen wir jetzt auf die Zusammenstellung B) von Bedingungen zurück; wir haben dabei, wie vorhin, die Punkte D und E zu beachten.

Unter den Forderungen

$$\text{B, } \alpha) \quad 2a < \sqrt{r_1^2 + r_{11}^2}$$
$$\text{B, } \beta) \quad 2a < \sqrt{r_1^2 - r_{11}^2}$$

ist keine, wodurch die Gleichheit von r_1 und r_{11} ausgeschlossen würde; wir haben also hier dahin gestellt zu lassen ob $r_1 \geqq r_{11}$.

Die B, α) auf die Form gebracht

$$(2a)^2 < r_1^2 + r_{11}^2$$

sagt offenbar über das Dreieck $M_1 M_{11} D$: der Gegenwinkel (D) seiner Seite $M_1 M_{11}$ ist spitzig.

Ebenso die Forderung B, β) auf die Form gebracht

$$(2a)^2 > r_1^2 - r_{11}^2$$

oder

$$r_1^2 < (2a)^2 + r_{11}^2$$

sagt uns von demselben Dreieck: der Gegenwinkel (M_{11}) seiner Seite $M_1 D$ ist spitzig.

Da nun $r_1 \geqq r_{11}$, also $M_1 D \geqq M_{11} D$, so folgt aus der Spitzig-

keit des Gegenwinkels der $M_1 D$ auch die des Gegenwinkels der $M_{11} D$; es ist also gemäss Vorstehendem zu behaupten:

III) Unsre Aufgabe hat zwei Auflösungen dann und nur dann, wenn die zwei gegebenen Kreise — seien sie gleich oder ungleich — dermassen sich schneiden, dass ihre Mittelpunkte $M_1 M_{11}$ mit jedem der Durchschnittspunkte D ein durchaus spitzwinkliges Dreieck $M_1 M_{11} D$ bestimmen.

Während vorige Nr. II) die ihr entsprechende Construction als eine ganz vollständige von selbst mit sich gebracht hat, ist dies für den Fall der Nr. III) nicht ebenso. Statt nun aber zu seinen Gunsten auf diejenige Art von Constructionen zurückzugreifen, welche bei Nr. II) als möglich erwähnt wurden, wollen wir vielmehr zurückgreifen auf die so sehr einfachen Gleichungen

$$8)\quad p^2 + q^2 = a^2, \qquad 9)\quad 4ap = r_1^2 - r_{11}^2,$$

welche — frei von ϱ — nur die Coordinatenwerte p, q des Quadratmittelpunktes C mit den gegebenen a, r_1, r_{11} enthalten. Die 9) gibt

$$p = \frac{r_1^2 - r_{11}^2}{4a},$$

d. h. offenbar: der Punkt C ist angewiesen auf eine bestimmte mit der Ordinatenaxe parallele Gerade. Als diese erkennt man leicht die Chordale der zwei gegebenen Kreise; denn die Gleichung dieser, durch Subtraction der Kreisgleichung 2) von der 1) zu bilden, lautet ja

$$4ax = r_1^2 - r_{11}^2,$$

und diese entspricht genau der obigen 9).

Was die 8) betrifft, so sagt sie von dem Punkte C (p, q) offenbar, sein Abstand vom Punkte O sei $= a = -OM_1 = +OM_{11}$; s[ie] verweist also den Punkt C auf den Kreis, der über $M_1 M_{11}$ als Durc[h]messer zu beschreiben ist.

Hiernach ist offenbar zu sagen:

IV) Wenn zu zwei gegebenen — sich schneidenden Kreisen K_1, K_{11}, deren Mittelpunkte M_1, M_{11} heis[sen] mögen, irgend ein Quadrat gehört, dessen eine Dia[go]nale als Sehne in K_1 liegt, die andere als Sehne in [K_{11}], so ist jede für den Mittelpunkt C solches Quad[rats] brauchbare Lage zu finden als gemeinschaftli[cher] Punkt zweier bekannten geometrischen Oerter.

eine ist die Chordale der zwei gegebenen Kreise, (welche ihre gemeinschaftliche Sehne $D_I D_{II}$ enthält); der andere Ort ist die Peripherie des über $M_I M_{II}$ als Durchmesser zu beschreibenden Kreises.

Dazu sind folgende Bemerkungen zu machen.

Die Chordale $D_I D_{II}$ der zwei (sich schneidenden) Kreise K_I, K_{II} ist dem Mittelpunkte M_{II} des etwa kleineren näher als dem des grösseren; während sie, wenn K_I und K_{II} gleich sind, die Strecke $M_I M_{II}$ halbirt.

Soll also die Gerade $D_I D_{II}$ den über $M_I M_{II}$ beschriebenen Ortskreis berühren, so kann dies nur geschehen, wenn K_I und K_{II} ungleich sind; und als Berührungsstelle ist dann nur möglich der Punkt M_{II}. Dieser ist nun als die einzige brauchbare Lage für C in Betracht zu ziehen; er ist, wie obiger Satz II) lehrt, auch wirklich in diesem Sinne brauchbar.

Wenn ferner die Gerade $D_I D_{II}$ mit dem Ortskreise zwei Durchschnitte C_I, C_{II} giebt, während die Kreise K_I, K_{II} gleich oder ungleich sein mögen: so geht jene frei zwischen den Endpunkten der auf ihr senkrechten Strecke $M_I M_{II}$ hindurch. Daraus folgt dann, dass jedes der zwei Dreiecke $M_I M_{II} D_I$ und $M_I M_{II} D_{II}$ sowol bei M_I als bei M_{II} einen spitzigen Winkel hat. Nach Satz III) sind nun aber die erhaltenen Punkte C_I, C_{II} nur dann brauchbar, wenn die eben genannten Dreiecke auch noch an den Punkten D spitzige Winkel haben. Beachtet man jetzt, dass jeder der Winkel $M_I C_I M_{II}$ und $M_I C_{II} M_{II}$, als Winkel im Halbkreis, ein rechter ist: so erkennt man, dass die Spitzigkeit jener bei D_I und D_{II} befindlichen Dreieckswinkel nur statthaben könne, wenn die Punkte D_I, D_{II} weiter als die Punkte C_I, C_{II} von der Axe $M_I M_{II}$ entfernt seien.

Dieses zusammenfassend mit allen vorhergehenden Sätzen haben wir nun zu sagen:

V) Wenn zwei Kreise K_I, K_{II} (jener der etwa grössere) mit Mittelpunkten M_I M_{II} gegeben sind, und es soll der Mittelpunkt C eines Quadrats gefunden werden, dessen Diagonalen jede als Sehne in einen der gegebenen Kreise fallen: so ist vor allem zu sehen, ob die nach I)) unumgängliche Grundforderung erfüllt sei, dass K_I und K_{II} in zwei Punkten D_I und D_{II} sich schneiden. Ist dieselbe erfüllt, und wird nebst der Chordale $D_I D_{II}$ der Hilfskreis über dem Durchmesser $M_I M_{II}$ eingeführt, so ist die Aufgabe doch nur dann zu

mehr müssen ihre Mittelpunkte C_1, C_{11} (immerhin auf Sehne D_1D_{11} liegend) von der Centrale M_1M_{11} sich entfernen.

Wird endlich die Strecke $M_1M_{11} = h$, so arten die zwei vorhin gedachten Quadrate in zwei Punkte aus, nämlich in die Punkte D_1, D_{11} selbst, in welchen die zwei gegebenen Kreise selbst sich schneiden. Der Winkel, unter welchem dieses geschieht, findet sich als ein rechter; der Abstand eines mit einem Punkte D vereinigten Punktes C von der Geraden M_1M_{11} zeigt sich als die zur Hypotenuse gehörige Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten r_1, r_{11}.

Letztere Höhe ist es eben, welche durch den oben vorgekommenen Ausdruck $r_1r_{11}:\sqrt{r_1^2+r_{11}^2}$ dargestellt ist.

Anmerkung. Bei der Stellung der jetzt erledigten Aufgabe unsres §. ist ausdrücklich vorausgesetzt worden, dass die Mittelpunkte der zwei gegebenen Kreise getrennt liegen. Ohne diese Voraussetzung kann man bei Gleichheit der gegebenen Radien nur in dem Sinne von einer Auflösung sprechen, wie es am Schlusse des obigen Satzes VII) angedeutet ist. Wenn dagegen bei ungleichen Radien Vereinigung der Mittelpunkte gesetzt wird, so erkennt man sofort die Unmöglichkeit der Aufgabe für solchen Fall. Uebrigens gewährt es doch etwa einiges Interesse, nachzusehen wie die Rechnungen unsres § sich gestalten, wenn man mit der Annahme $a = 0$ nach einander die beiden Annahmen $r_1 = r_{11}$ und $r_1 > r_{11}$ in jene einführt.

§ 2.

Zu zwei gegebenen Kreisen, deren Mittelpunkte getrennt liegen, soll ein Quadrat gesucht werden, von welchem eine Seite als Sehne in den ersten Kreis falle, ihre Gegenseite als Sehne in den zweiten.

Auflösung. Die Mittelpunkte M_1, M_{11} der gegebenen Kreise K_1, K_{11} haben den Abstand M_1M_{11} gleich $2a$; es seien r_1, r_{11} ihre Halbmesser, r_1 der etwa grössere.

Die Kreise sind dann (wie in § 1.) darzustellen durch die Gleichungen

$$1)\quad (x+a)^2+y^2=r_1^2, \qquad 2)\quad (x-a)^2+y^2=r_{11}^2;$$

diese Gleichungen auf rechtwinklig verbundene Coordinaten OX, OY

zu beziehen, O der Halbirungspunkt der Strecke M_1M_{11}, der Weg $OM_1 = -a$, der Weg $OM_{11} = +a$, die Ordinatenwerte von M_1 und M_{11} jeder $= 0$.

Ist C der Mittelpunkt eines der Aufgabe entsprechenden Quadrats, so ist die Gerade CM_1 senkrecht auf der in den Kreis K_1 fallenden Seite, und CM_{11} senkrecht auf ihrer Gegenseite. Hieraus ist sofort zu merken, dass der Punkt C in die Gerade M_1M_{11} (in unsrer Abscissenaxe) fallen müsse, dass also sein Ordinatenwert $= 0$ sei. Zu diesem haben wir nun aber zu suchen den zugehörigen Abscissenwert p, und haben zu suchen die Länge 2ϱ der Diagonale des zu solchem C als Mittelpunkt gehörigen Quadrats.

Nachdem nun p und ϱ in diesem Sinne eingeführt sind, p als reeller, ϱ als absoluter Wert, so ist für ein der Aufgabe genügendes Quadrat die Gleichung des ihm umzuzeichnenden Kreises anzugeb[en] in der Form

$$3)\quad (x-p)^2+y^2=\varrho^2.$$

Die in den Kreis K_1 fallende Seite dieses Quadrats ist gemeinsch[aft]liche Sehne der Kreise 1) und 3), sie kommt also in die Chord[ale] dieser Kreise zu liegen, und die Gleichung der entsprechenden Seit[en]linie ist hiernach

$$4)\quad x=\frac{r_1^2-a^2+p^2-\varrho^2}{2(p+a)};$$

ebenso die in den Kreis M_{11} fallende Gegenseite der vorigen kom[mt] in die Chordale der Kreise 2) und 3) zu liegen, und es ist die G[lei]chung der zugehörigen Seitenlinie

$$5)\quad x=\frac{r_{11}^2-a^2+p^2-\varrho^2}{2(p-a)}.$$

Bezeichnet man beziehungsweise mit x_1 und x_{11} die in 4) und 5) rechts stehenden Werte, so ist offenbar für p die unzweideutige [An]nahme zu machen

$$6)\quad 2p=x_1+x_{11};$$

denn der Punkt C $\{p, 0\}$ liegt in der Mitte der durch 4) un[d 5)] dargestellten Geraden. Ferner wird der absolute Abstand dieser [letz]teren gleich der Seite des gesuchten Quadrats selbst erkannt; [und] da diese auch durch $\varrho\sqrt{2}$ dargestellt sein muss, so kommt man d[urch] Verbindung dieser Bemerkungen auf die zweiförmige Angabe

$$7)\quad \varrho\sqrt{2}=\pm(x_1-x_{11}),$$

in welcher rechts nur dasjenige Vorzeichen gelten kann, welches [die] rechte Seite nicht negativ werden lässt.

Nun ist der absolute Wert ϱ gleich dem absoluten Ordinatenwert jedes derjenigen zwei Punkte Q_1, Q_{11}, welche auf dem Kreise 3) liegend, und auf verschiedenen Seiten der Abscissenaxe befindlich, das Maximum der Entfernung von dieser haben. Bezeichnen wir also mit u den algebraischen Ordinatenwert eines solchen Punktes Q, und lassen wir dahingestellt, welcher von beiden es sei, so können wir statt der Angabe 7) vielmehr machen die einförmige

$$8)\quad u\sqrt{2} = x_1 - x_{11}.$$

Bei dieser Gleichung ist dann immer zu bedenken, dass die algebraischen Werte u und $x_1 - x_{11}$ einerlei algebraischen Charakter haben; und wenn auf Grund von jener ein Wert des unbekannten u entwickelt worden ist, so wird das etwaige Positivsein desselben von dem Umstand begleitet sein, dass der auf der Abscissenaxe zunehmende Weg $(x_1 - x_{11})$ von der Chordale 5) zu der Chordale 4) die positive Richtung habe, und der etwa negative Charakter des ausgerechneten u wird dem Eintreffen des Umstandes entsprechen, dass der genannte Weg negativ gerichtet sei. Die Auffindung eines Nullwertes für u müsste selbstverständlich sowol das Zusammenfallen jener zwei Chordalen als auch die Reduction des gesuchten Quadrats auf einen einzigen Punkt (seinen Mittelpunkt C) bedeuten. Auf alle Fälle endlich ist durch Auffindung eines reellen Werts von u auch der Wert von ϱ gegeben, welcher ja dem absoluten Werte von u gleich ist.

Um nun auf Grund der Gleichungen 6) und 8) unsre Aufgabe zu lösen, können wir jene zunächst durch Addition und Subtraction verbinden, so dass sich ergibt

$$2p + u\sqrt{2} = 2x_1 \quad \text{und} \quad 2p - u\sqrt{2} = 2x_{11}.$$

Hier für x_1 und x_{11} die durch 4) und 5) dargebotenen Werte einführend, und in letzteren selbst für ϱ^2 substituirend u^2, erhalten wir zur Bestimmung der unbekannten p, u die so lautenden Gleichungen

$$2p + u\sqrt{2} = \frac{r_1^2 - a^2 + p^2 - u^2}{p + a}, \quad 2p - u\sqrt{2} = \frac{r_{11}^2 - a^2 + p^2 - u^2}{p - a}.$$

Werden diese beziehungsweise mit $p+a$ und $p-a$ durchmultiplicirt, so kommt

$$2p^2 + pu\sqrt{2} + 2ap + au\sqrt{2} = r_1^2 - a^2 + p^2 - u^2$$

und

$$2p^2 - pu\sqrt{2} - 2ap + au\sqrt{2} = r_{11}^2 - a^2 + p^2 - u^2.$$

Werden solche, wie es nahe gelegt ist, wieder durch Addition und Subtraction verbunden, und werden nur die nächst liegenden Reductionen vorgenommen, so erhält man

$$2p^2+2au\sqrt{2}=r_1^2+r_{11}^2-2a^2-2u^2$$

und

$$2pu\sqrt{2}+4ap=r_1^2-r_{11}^2.$$

Daraus entnimmt man weiter

$$p^2+au\sqrt{2}+u^2=\frac{r_1^2+r_{11}^2-2a^2}{2}$$

und

$$p(u\sqrt{2}+2a)=\frac{r_1^2-r_{11}^2}{2}.$$

Dann endlich gewinnt man die noch übersichtlicheren Formen

$$9)\quad p^2+\left(u+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2=\frac{r_1^2+r_{11}^2-a^2}{2},$$

$$10)\quad p\left\{\left(u+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)+\frac{a}{2}\sqrt{2}\right\}=\frac{r_1^2-r_{11}^2}{2\sqrt{2}},$$

an welche wir für das Weitere uns halten wollen.

Aus der 10) ist leicht zu entnehmen

$$11)\quad u+\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{r_1^2-r_{11}^2-2ap}{2p\sqrt{2}}.$$

Dieser Wert in 9) eingeführt, so kommt zunächst

$$p^2+\frac{(r_1^2-r_{11}^2)^2-4ap(r_1^2-r_{11}^2)+4a^2p^2}{8p^2}=\frac{r_1^2+r_{11}^2-a^2}{2},$$

also nach Potenzen von p geordnet

$$12)\quad p^4-\tfrac{1}{2}(r_1^2+r_{11}^2-2a^2)p^2-\frac{a}{2}(r_1^2-r_{11}^2)p+\tfrac{1}{8}(r_1^2-r_{11}^2)^2=($$

Sehen wir ab von dem besondern Falle $r_1=r_{11}$, w chem (wie auch der von vornherein ausgeschlossen Annahme $a=0$) eine eigene Anmerkung gewidm werden soll, so sind über die Gleichungen 12) und 1 folgende Angaben zu machen:

α) Der Wert Null für p ist mit der Gleichung 12) absolut verträglich.

β) Zu jedem (von Null verschiedenen) reellen Wert, welchen 12) für p liefern kann, gibt die 11) einen zugehörigen reellen W des u und zwar einen einzigen, von endlicher Grösse.

γ) Die Gleichung 12) wird entweder durch gar keinen reel Wert von p befriedigt, oder durch zwei reelle die auch zusamm fallen können, oder durch zwei Paare von reellen Werten, deren

des der Möglichkeit unterworfen ist, dass seine beiden Glieder einander gleich werden.

δ) Sind alle vier Wurzeln der Gleichung 12) reell (von Null verschieden): so sind notwendig zwei derselben positiv, die zwei anderen negativ.

Dies ist zu ersehen durch Betrachtung der Coefficienten von p^0 und p^3. — Da der Coefficient von p^0 hier positiv ist, und da er jedenfalls gleich dem Product der vier reellen Wurzeln sein muss, so lässt er nur zu, dass entweder alle vier positiv seien, oder alle vier negativ, oder zwei positiv und zwei negativ. Aber jede der zwei ersten Möglichkeiten schliesst aus der Coefficient von p^3; denn nach der allgemeinen Theorie muss sein absolutes Glied gleich der Summe der vier Wurzeln sein, und seine wirklich hier auftretende Grösse ist ja Null.

Sofern nun jede jener Wurzeln der Abscissenwert ist für einen auf der Abscissenaxe selbst liegenden Quadratsmittelpunkt C, so können wir nach Vorstehendem zunächst den Satz aussprechen:

I) Wenn die zwei gegebenen Kreise ungleich sind, so hat unsre Aufgabe entweder gar keine Auflösung, oder eine einzige, oder zwei, oder drei, oder vier. — Wenn sie vier Auflösungen hat, so sind die Mittelpunkte C der vier sich ergebenden Quadrate auf der Centrale $M_1 M_{11}$ der gegebenen Kreise so verteilt, dass zwei der Punkte C auf der einen Seite von dem Halbirungspunkt O der Strecke $M_1 M_{11}$ liegen, die zwei übrigen auf der andern Seite. — Bei einer ungeraden Zahl der Auflösungen ist notwendig zu denken, dass eine derselben als solche anzusehen sei, in welcher zwei sich vereinigt haben.

Die Gleichung 12) kann zwar algebraisch streng aufgelöst werden, wie sie auch (frei von p^3) die Anwendung der Pombelli'schen Regel ohne weitere Vorbereitung zulässt. Indes ist ihre linke Seite (bei der hier durchzuführenden Annahme $r_1 > r_{11}$) nicht in zwei solche Factoren des zweiten Grades nach p zu zerlegen, deren Coefficienten sich streng geometrisch construiren liessen; sie ist also für eine weitere geometrische Untersuchung unsrer Aufgabe nicht zu verwenden und kann eine mit Cirkel und Lineal allein auszuführende Construction nicht gewähren. Letzteres gilt demgemäss auch von den vorangehenden Hauptgleichungen 9) und 10); gleichwol lässt sich an diese (immer $r_1 > r_{11}$ vorausgesetzt) eine Betrachtung knüpfen, durch welche der geometrische Charakter der Aufgabe selbst und ihrer Lösungen in hohem Grade wird aufgeklärt werden.

Was zunächst die 9) betrifft, so ist sie
$\mathfrak{K}$. Der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ desselben hat de

Ordinatenwert $= -\frac{a}{2}\sqrt{2}$, bei welchem w
von a, nicht von r_1 und r_{11} abhängig ist.
zeigt sich $= \sqrt{\frac{r_1^2+r_{11}^2-a^2}{2}}$. Hiernach
Punktes Q dann und nur dann imaginär,
den Fall $r_1^2+r_{11}^2 = a^2$ zieht sich der
$\left(0, -\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)$ zusammen, während die Anga
eigentlichen, reellen Kreis charakterisirt.

Die Gleichung 10) wird leicht erkanut als
seitigen Hyperbel. Ihr Mittelpunkt $\mathfrak{H}$ hat
den Ordinatenwert $= -\sqrt{2}$, bei welchem
dass er nur von a, nicht von r_1 und r_{11} abhä
dieser Curve ist unsre Ordinatenaxe, das Mitte
die andere Asymptote ist die durch $\mathfrak{H}$ geh
$M_1 M_{11}$ parallele Gerade. Die Potenz der Hyper
also nur von r_1 und r_{11}, nicht von a abhängig
dessen Scheitel S_1 heissen mag, fällt in denjen
welchen der negative Zweig unsrer Ordinate
$\mathfrak{H}$ gehenden und mit OM_1 gleichgerichteten G
mit Scheitel S_{11} fällt also in den Scheitelwink
Jeder Punkt jenes ersten Astes hat zwei neg
jeder des zweiten hat notwendig einen positi
welchem ein positiver oder ein ...

die Hyperbel in vier solchen Punkten schneide, welche die Ecken eines Paralleltrapezes seien. Alle genannten Möglichkeiten fallen einfach deswegen dahin, weil der Punkt $\mathfrak{M}$ auf einer Asymptote der Curve und nicht auf einer ihrer Axen liegt.

Die soeben über unsre geometrischen Oerter gemachten Angaben, mit welcher die unter I) stehenden zu vergleichen sind, führen auf folgende Behauptung:

II) Wenn die in unsrer Aufgabe gegebenen Kreise ihre Radien r_1, r_{11} ungleich haben, so ist jene näherungsweise zu lösen und ist zu beurteilen mittels Einführung eines gewissen Kreises $\mathfrak{K}$ und einer gleichseitigen Hyperbel, deren umständliche Beschreibung aus Obigem zu entnehmen ist. Jede einzelne Auflösung ist an einen gemeinschaftlichen Punkt beider Curven gebunden, von welchem aus das Lot QC auf die Centrale beider gegebenen Kreise gefällt den Mittelpunkt C eines der gesuchten Quadrate liefert, dessen Halbdiagonale selbst die Länge QC hat. Solcher Punkte Q giebt es vier, wenn der Kreis $\mathfrak{K}$ jeden der beiden Hyperbeläste schneidet. Es gibt ihrer drei, wenn der Kreis $\mathfrak{K}$ den einen Hyperbelast schneidet, den andern berührt. Es gibt zwei, wenn $\mathfrak{K}$ den einen Ast schneidet, ohne den andern zu erreichen. Es gibt nur einen Punkt Q, wenn $\mathfrak{K}$ den einen Ast berührt, ohne den andern zu erreichen. Es gibt endlich gar keinen Punkt Q, sowol dann wenn $\mathfrak{K}$ ein eigentlicher Kreis ist, der aber keinen der beiden Hyperbeläste erreicht, als auch dann wenn $\mathfrak{K}$ sich in seinen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ zusammenzieht, als auch endlich wenn $\mathfrak{K}$ imaginär wird.

Für den vorletzten Unterfall ist die Bedingung seines Eintretens genau anzugeben

$$r_1^2 + r_{11}^2 = a^2;$$

desgleichen für den letzten Unterfall

$$r_1^2 + r_{11}^2 < a^2.$$

Für die übrigen Fälle ist auf derartige bestimmte Angaben zu verzichten, und es mag nur etwa Folgendes noch berührt werden.

Sofern der Kreis 9) und die Hyperbel 10) einen Punkt Q im Sinne des Satzes II) liefern, gibt es zu diesem Q einen mit Bezug auf die Axe $M_1 M_{11}$ symmetrischen Q_0. So gut als Q wäre nun offenbar zur Lösung der Aufgabe, nämlich zunächst zur Construction

eines Punktes C auch der Punkt Q_0 zu verwenden; eben diesen aber kann unsre Hyperbel 10) mit unsrem Kreise 9) nicht darbieten. — Alle hieran sich knüpfenden Fragen wird man leicht beantworten vermöge der einfachen Erwägung, dass sowol die Rechnung als die geometrische Betrachtung uns gestattet, statt des Kreises 9) denjenigen einzuführen, welcher mit Bezug auf die Axe $M_1 M_{11}$ der zu ihm symmetrische ist, und zugleich statt der Hyperbel 10) diejenige, welche mit Bezug auf dieselbe Axe zu ihr symmetrisch ist. Das eine System der zwei Ortscurven wird alle Punkte Q liefern, das andere alle Punkte Q_0; jedes von beiden aber muss auf dieselben Punkte C führen.

Anmerkung 1. Wir wollen nun, wie schon in Aussicht gestellt worden ist, den besonderen Fall behandeln, wo die zwei in der Aufgabe gegebenen Kreise einander gleich sind, während immerhin ihre Mittelpunkte M_1, M_{11} getrennt liegen.

Wenn wir demgemäss in die Rechnung unsres § 2. die Annahme $u_1 = r_{11} = r$ einführen und $M_1 M_{11} = 2a > 0$ beibehalten, so zeigt sich, dass alles bis zur Gleichung 10) Entwickelte unbedingt festzuhalten sei. Ueber die 10) aber hinaus zu gehen empfiehlt sich nicht. Wollte man die jedenfalls zusammengehörigen 11) und 12) noch benutzen, so würde man zwar für 12) die sehr einfache erhalten

$$p^4 - (r^2 - a^2)p^2 = 0,$$

welche sowol $p^2 = 0$ als $p^2 = r^2 - a^2$ liefert. Da aber der Nullwert für p in der Gleichung 11) substituirt ihre rechte Seite auf die Form $0:0$ bringt, so ist hierdurch angezeigt, auch jetzt vielmehr an dieselben Gleichungen 9) und 10) sich zu halten, welche zuletzt in der Hauptuntersuchung des § selbst als besonders nützlich sich erwiesen haben.

In die Gleichungen 9) und 10) also für r_1 wie für r_{11} den Wert r einführend, erhalten wir

$$9a) \quad p^2 + \left(u + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$10a) \quad p(u + a\sqrt{2}) = 0.$$

Will man diese, wie die 9) und 10) selbst, auf geometrische Oerter deuten, so wird man die 9a) wieder als Darstellung eines Kreises erkennen, die 10a) aber als Darstellung zweier Geraden, welche identisch sind mit den Asymptoten der in § 2. selbst vorgekommenen Hyperbel. Es macht sich leicht und schön, die Untersuchung des vorliegenden Falles durch Betrachtung der genannten geometrischen

erter zu erledigen; indes für Eröffnung weiterer Gesichtspunkte ist
s günstig, jetzt einfach die Gleichungen 9a) und 10a) nach den un-
ekannten p, u aufzulösen, deren Bedeutung übrigens genau so zu
erstehen ist, wie in unsrem § vor Aufstellung der 9) und 10) selbst
rklärt wurde.

Da die Gleichung 10a) zerfällt in die zwei einzelnen

$$p = 0 \quad \text{und} \quad u + a\sqrt{2} = 0$$

so ist klar, dass wir jetzt jedes solche Paar von Werten für p und
u zu suchen haben, welches einem der zwei folgenden Systeme A)
und B) genügt:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} p^2 + \left(u + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2, \\ p = 0. \end{cases}$$

$$\text{B)} \quad \begin{cases} p^2 + \left(u + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ u = -a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Das System A) wird befriedigt durch

$$p = 0 \quad \text{und} \quad u = \frac{-a}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Die für u hier aufgeführten Werte sind entweder beide imaginär, oder
beide reell und gleich, oder beide reell und ungleich je nachdem

$$r \lesseqgtr \frac{a}{\sqrt{2}};$$

und die Auslegung dieser Bedingungen gestaltet sich sehr hübsch
wenn man folgende Construction des Ausdrucks $a : \sqrt{2}$ veranstaltet.

Durch O, den Halbirungspunkt der Strecke $M_1 M_{11}$ ziehe ma
die zwei Geraden, welche mit der $M_1 M_{11}$ selbst je den Winkel v
45° bilden. Dann von M_1 aus auf diese Hilfslinien selbst die Lo
$M_1 F_1$, $M_1 G_1$ gefällt, ebenso von M_{11} aus die Lote $M_{11} F_{11}$, $M_{11} G$
so ist ersichtlich, dass jedes dieser Lote $= a : \sqrt{2}$.

Hieraus ist nun zu erkennen, dass die drei Bedingungen

$$r \lesseqgtr \frac{a}{\sqrt{2}}$$

beziehungsweise besagen: jeder der zwei gegebenen Kreise (u
M_{11}) liegt frei innerhalb der beiden Hilfslinien; jeder von ihn

rührt beide; jeder von ihnen schneidet beide. Es ist ferner für den zweiten dieser Fälle zu erkennen, dass die vier vorkommenden Berührungspunkte selbst die Ecken eines Quadrats seien, dessen Halbdiagonale $= a : \sqrt{2}$, $(= \pm u = \varrho)$. Und endlich für den dritten der obigen Fälle ist zu bemerken, dass vier der sich ergebenden Durchschnittspunkte, und ebenso die vier andern, je die Ecken eines hier gesuchten Quadrats seien, dessen zwei Quadrate mit Halbdiagonalen, deren Längen durch die absoluten Werte der zwei Ausdrücke

$$-\frac{a}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

dargeboten und hiernach auch abgesondert zu construiren sind.

Das obige System B) wird befriedigt durch

$$u = -a\sqrt{2}, \quad p = \pm\sqrt{r^2 - a^2}$$

Die für p hier aufgeführten Werte sind entweder beide imaginär, oder beide null, oder beide reell und entgegengesetzt gleich, je nachdem

$$r \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} a.$$

Diese drei Bedingungen besagen der Reihe nach: die zwei gegebenen gleichen Kreise liegen ganz frei auseinander, sie berühren sich (von aussen) in einem Punkte $\{O\}$; sie schneiden sich.

Für den zweiten dieser Fälle hat man $p = 0$ und $u = -a\sqrt{2}$; d. h. um O als Mittelpunkt liegt ein der Aufgabe genügendes Quadrat, dessen Halbdiagonale $= a\sqrt{2}$ ist. Letztere Länge ist offenbar auch die Länge des Wegs von O nach jedem derjenigen vier Punkte, in welchen die auf $M_1 M_{11}$ senkrechten Durchmesser der zwei gegebenen Kreise aufhören. In diesem Falle also tritt ein Quadrat auf, dessen Ecken die eben genannten vier Punkte sind. Sie werden natürlich auch mittels der zwei schon vorhin eingeführten Hilfslinien gewonnen.

Wenn man will, so kann in dem besprochenen Falle auch der Punkt O selbst als ein uneigentliches Quadrat angesehen werden, welches der Aufgabe genüge.

Sieht man noch auf den dritten für das Sysem B) sich darbietenden Fall, wo die zwei gegebenen Kreise sich schneiden; so hat man für p die zwei entgegengesetzt gleichen reellen Werte mit dem absoluten Gliede $\sqrt{r^2 - a^2}$, dessen geometrische Construction auf

der Hand liegt. In diesem Falle also erscheinen zwei Punkte C_1, C_{11} auf der Geraden $M_1 M_{11}$, beide von O gleich weit entfernt, jeder um die Länge $= \sqrt{r^2 - a^2}$. Jeder dieser Punkte ist Mittelpunkt eines der Aufgabe genügenden Quadrats. Beide Quadrate sind congruent; jedes hat die Halbdiagonale $= a\sqrt{2}$. Nach Auffindung der Punkte C_1, C_{11} sind die Ecken der bezüglichen Quadrate zu erhalten, indem man sowol durch C_1 als durch C_{11} je die zwei Geraden zieht, welche gegen die $M_1 M_{11}$ unter 45^0 geneigt sind.

Fasst man nun alles zusammen was die Betrachtung der zwei Systeme A), B) geboten hat, so kommt man zu folgendem Ergebniss.

Wenn zwei gleiche Kreise mit getrennten Mittelpunkten $M_1 M_{11}$ gegeben sind, und wenn jedes Quadrat construirt werden soll, von welchem eine Seite als Sehne in den einen Kreis falle und ihre Gegenseite als eben solche in den andern: so hat man drei allein mögliche Fälle zu berücksichtigen, es sind aber in jedem mit Vorteil die zwei Hilfslinien zu benutzen, welche durch den Halbirungspunkt O der Strecke $M_1 M_{11}$ je unter dem Winkel von 45^0 gegen die $M_1 M_{11}$ zu ziehen sind.

α) Die zwei gegebenen Kreise haben keinen Punkt gemein.

Die Aufgabe ist unmöglich, wenn eine der Hilfslinien (und ebenso die andere) die zwei gegebenen Kreise weder schneidet noch berührt.

Sie hat eine Auflösung, wenn jede der Hilfslinien die zwei gegebenen Kreise berührt; und die vier Berührungspunkte sind die Ecken des gesuchten Quadrats.

Sie hat zwei Auflösungen, wenn jede der Hilfslinien die zwei Kreise schneidet; je vier zusammengehörige Quadratsecken finden sich in den Hilfslinien selbst.

β) Die zwei gegebenen Kreise berühren sich in O.

Die Aufgabe hat nur eine einzige eigentliche Auflösung; die Hilfslinien geben die Ecken des gesuchten Quadrats als die Endpunkte der auf $M_1 M_{11}$ senkrechten Durchmesser der gegebenen Kreise.

Uneigentliche Auflösung in dem Punkte O selbst sich darstellend.

γ) Die zwei gegebenen Kreise schneiden sich.

Die Aufgabe hat notwendig vier eigentliche Auflösungen.

Es ergeben sich einesteils zwei ungleiche Quadrate, jedes mit O als Mittelpunkt, jedes mit seinen vier Ecken auf die zwei Hilfslinien selbst angewiesen.

Es ergeben sich andernteils zwei gleiche Quadrate; ihre Mittelpunkte C_1, C_{11} auf der M_1M_{11} gleich weit von O entfernt liegend; jeder der Abstände OC_1, OC_{11} zu construiren als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zwei andern Seiten bekannt sind, die eine $=\frac{1}{2}M_1M_{11}$, die andere gleich dem Halbmesser eines der gegebenen Kreise. Die Ecken jedes jener Quadrate zu construiren, indem man durch seinen schon gewonnenen Mittelpunkt C die zwei mit den Hilfslinien parallelen Geraden zieht.

Anmerkung 2. Für unsre Aufgabe (§ 2.) ist als Grenzfall — der freilich durch ihre Fassung vorerst ausgeschlossen wurde — noch der zu berücksichtigen, dass die Mittelpunkte M_1, M_{11} der gegebenen Kreise in einem Punkte O sich vereinigen. Wird dies zugelassen, so ist die Gleichheit der Kreise selbst natürlich nicht mehr zuzulassen, sofern man eine eigentliche Aufgabe behalten will.

Wenn wir demgemäss in die Rechnung unsres § die zwei verbundenen Annahmen $a=0$ und $r_1 > r_{11}$ einführen, so ist vor Allem zu beachten, dass nun als Axe OX jede beliebige durch O zu ziehende Gerade gedacht werden kann, während die OY auf dieser senkrecht zu verbleiben hat. Uebrigens ist dann die Rechnung selbst bis zur Aufstellung der Gleichung 12) vollständig beizubehalten; und zwar empfiehlt es sich, gerade an die Gleichung 12) und die immerhin mit ihr zu verbindende 11) vorzugsweise sich zu halten.

Die durch 9) und 10) dargestellten geometrischen Oerter dagegen — Kreis und eigentliche Hyperbel — obwol sie auf sehr eigentümliche geometrische Anschauungen führen, sind weniger zu beachten.

Die 12) unsres § für $a=0$ genommen reducirt sich auf

$$\text{12a)}\quad p^4-\tfrac{1}{2}(r_1^2+r_{11}^2)p^2+\tfrac{1}{8}(r_1^2-r_{11}^2)=0.$$

Dabei ist (wegen $r_1 > r_{11}$) sogleich zu sehen, dass p nicht Null werden kann; somit die zugehörige Gleichung 11) ist anstandslos beizugeben in der Form

$$11a) \quad a = \frac{r_1^2 - r_{11}^2}{2p\sqrt{2}},$$

und es ist klar, dass man zu jedem aus 12a) zu erhaltenden brauchbaren Werte von p einen brauchbaren (einzigen) für a erhalte.

Die 12a) zunächst nach p^2 aufgelöst gibt, mit gehöriger Umformung des eingehenden Radicanden

$$12b) \quad p^2 = \frac{r_1^2 + r_{11}^2 \pm \sqrt{4r_1^2 r_{11}^2 - (r_1^2 - r_{11}^2)^2}}{4}.$$

Dieser Ausdruck für p^2 wird entweder imaginär, oder reell und eindeutig, oder reell und zweideutig, je nachdem

$$2r_1 r_{11} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} r_1^2 - r_{11}^2;$$

und wir haben nun die drei hier zusammengestellten Bedingungsformeln einzeln zu besprechen.

α) Die Angabe $2r_1 r_{11} < r_1^2 - r_{11}^2$ bringt einfach mit sich, dass die Aufgabe unmöglich sei.

β) Ist vielmehr $2r_1 r_{11} = r_1^2 - r_{11}^2$, so liefert die 12b)

$$p = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2},$$

d. h. zwei entgegengesetzt gleiche Werte von p, deren absolutes Glied höchst einfach zu construiren ist. Dem entsprechend auf OX zwei Lagen C_1, C_{11} eines der Aufgabe genügenden Quadratmittelpunktes C; Strecke $C_1 C_{11}$ in O halbirt, etc.

γ) Ist endlich $2r_1 r_{11} > r_1^2 - r_{11}^2$, so hat man zu beachten, dass die absolute $\sqrt{4r_1^2 r_{11}^2 - (r_1^2 - r_{11}^2)^2}$ kleiner ausfällt als $2r_1 r_{11}$. Der in 12b) rechts vorkommende Dividendus ist also zwar kleiner als $(r_1 + r_{11})^2$, aber grösser als $(r_1 - r_{11})^2$, d. h. er ist jedenfalls positiv. Die 12b) liefert hiernach für p^2 zwei positive übrigens ungleiche Werte. Diese sind mit Hilfe des Pythagorischen Satzes unschwer zu construiren; man braucht nur die Vorbereitung zu machen: $4r_1^2 r_{11}^2 - (r_1^2 - r_{11}^2)^2$ zu ersetzen durch $\{2r_1 r_{11} + (r_1^2 - r_{11}^2)\}.\{2r_1 r_{11} - (r_1^2 - r_{11}^2)\}$, d. h. durch $m^2.n^2$, so dass die $\sqrt{4r_1^2 r_{11}^2 - (r_1^2 - r_{11}^2)^2}$ gleich $m.n$ sich findet, wo m und n bekannte Längen sind. Zu jedem der zwei gesicherten reellen und positiven Werte von p^2 ergeben sich also in unsrem Falle zwei reelle entgegengesetzt gleiche Werte von p, diese vier zusammengestellt in der Formel

$$p = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2 \pm mn}$$

ihre Construction noch übersichtlicher, wenn man die Seite s des dem Rechteck $m.n$ gleichen Quadrats einführt, demnach angibt

$$p^2 = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2 - s^2}.$$

Durch die vier so eben dargebotenen Werte von p sind auf unserer OX vier Punkte C angezeigt, jeder als Mittelpunkt eines der Aufgabe genügenden Quadrats dienend; unter den vier Wegen OC zwei positiv gerichtete und zwei negativ gerichtete, die des ersten Paars der Reihe nach absolut gleich denen des zweiten Paars.

Was die Dimensionen der in den Fällen β) und γ) sich ergebenden Quadrate betrifft, so sind ihre Halbdiagonalen dargestellt jede durch das absolute Glied eines solchen Wertes von u, welchen die Gleichung 11a) nach Einsetzung des entsprechenden Wertes von p liefert. Hierbei ist leicht zu sehen, dass jede solche Halbdiagonale als vierte geometrische Proportionale zu drei bekannten Linien sich ergebe, z. B. im Falle β) als vierte zu $\sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2}$, $r_1 + r_{11}$ und $r_1 - r_{11}$. Uebrigens kann man ja in jedem Falle nach Gewinnung eines der Aufgabe genügenden Punktes C das zugehörige Quadrat, mit Ecken und Diagonalen zumal, dadurch erhalten, dass man durch den Punkt C der angenommenen OX die zwei unter 45^0 gegen letztere geneigten Geraden zieht, und auf jeder solchen Geraden die zu solchen C passenden Durchschnitte mit den zwei gegebenen Kreisen nimmt.

Zu der obigen Bedingungsformel

$$2r_1 r_{11} \lesseqgtr r_1^2 - r_{11}^2,$$

deren geometrische Auslegung in die Augen springt, mag immerhin noch eine Umgestaltung angegeben werden, welche dem Bedürfniss der geometrischen Anschauung noch mehr entgegen kommt, es ist statt jener zu sagen:

$$\sqrt{r_1 r_{11}} \lesseqgtr \sqrt{\left(\frac{r_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{r_{11}}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

wo links das geometrische Mittel $r_1 r_{11}$ steht, rechts eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen zwei andere Seiten gleich $r_1 : \sqrt{2}$ und $r_{11} : \sqrt{2}$ bekannt sind. Für jene Kathete die Bezeichnung k einführend, können wir um so leichter aussprechen die folgende Zusammenfassung.

Wenn zwei ungleiche Kreise mit Radien r_1, r_{11} (erster der grössere) und mit gemeinschftlichem Mittelpunkte O

gegeben sind, und wenn jedes Quadrat verlangt wird, von welchem eine Seite als Sehne in dem einen Kreis liege, ihre Gegenseite als Sehne im zweiten: so ist jede durch O zu ziehende Gerade OX als eine solche zu beachten-auf welcher Punkte C liegen können, die als Mittel, punkte von Quadraten der verlangten Art dienen.

Für jede beliebig bestimmte Lage einer solchen Geraden OX erhält man folgende Behauptungen.

α') Die Aufgabe hat gar keine Auflösung dann und nur dann, wenn $\sqrt{r_1 r_{11}} < k$.

β') Die Aufgabe wird durch zwei gleiche Quadrate gelöst dann und nur dann, wenn $\sqrt{r_1 r_{11}} = k$. Die Mittelpunkte jener haben von O jeder den leicht zu construirenden Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2}$, jedes die Diagonale $= \frac{(r_1^2 - r_{11}^2)\sqrt{2}}{\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2}}$.

γ') Die Aufgabe wird durch zwei Paare gleicher Quadrate dann gelöst und nur dann, wenn $\sqrt{r_1 r_{11}} > k$. Je die zwei einem solchen Paar zugehörigen haben ihre Mittelpunkté gleich weit von O entfernt. Die zwei Absolutgrössen der bezüglichen Mittelpunktsabstände werden dargeboten durch den leicht zu construirenden Ausdruck $\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2 \pm s^2}$, wo s^2 ein bekanntes, von den Grössen r_1, r_{11} abhängiges Quadrat ist. (Vgl. oben unter γ). Die zu jenen Abständen gehörigen Quadratsdiagonalen sind beziehungsweise $= \frac{(r_1^2 - r_{11}^2)\sqrt{2}}{\sqrt{r_1^2 + r_{11}^2 \pm s^2}}$, sie sind also den Abständen umgekehrt proportional.

In jedem der Fälle β'), γ') liegt jedes der sich ergebenden Quadrate so, dass die zugehörige Gerade OX den Winkel zwischen beiden Diagonalen halbirt.

Wird noch die zu der OX senkrechte Gerade OY beigezogen, so macht man sich leicht klar, welche der gefundenen Quadrate von dieser geschnitten werden, und welche vielmehr frei seitwärts von ihr liegen.

§ 3.

Wenn man die hier behandelten Aufgaben durch rein geometrische Betrachtung lösen wollte, so würde man mit Bezug auf die des § 1. alles Wünschenswerte vollständig in den hier gemachten Mit-



teilungen dargeboten finden. Was die Aufgabe des § 2. betrifft, so würde das eben Gesagte für sie in allen denjenigen Fällen gelten, wo sie streng mit Cirkel und Lineal allein zu lösen ist. Für den Fall aber, wo die gegebenen Kreise K_1, K_{11} ungleich sind, und ihre Mittelpunkte M_1, M_{11} getrennt liegen, will ich eine Andeutung geben, welche im Sinn der Durchführung einer rein geometrischen Betrachtung auch neben dem in § 2. selbst Gebotenen wirklich beachtenswert sein dürfte.

Sei ein Quadrat gedacht, welches der Aufgabe genüge; sei A_1B_1 die in den Kreis K_1 als Sehne desselben entfallende Seite, $A_{11}B_{11}$ ihre in den Kreis K_{11} fallende Gegenseite. Die Punkte A_1, A_{11} seien auf einerlei Seite von der Geraden M_1M_{11} befindliche Quadratsecken, etwa oberhalb von M_1M_{11} liegende. Werden nun die zwei Geraden M_1A_1 und $M_{11}A_{11}$ gezogen, so geben sie einen Durchschnitt V $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right\}$ von M_1M_{11}, und es ist leicht zu sehen, dass die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist, sobald man solchen Punkt V gefunden hat. Seine Lage nun bestimmt sich als gemeinschaftlicher Punkt zweier geometrischer Oerter. Erste Ortslinie: der Halbkreis, auf welchem $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right\}$ der M_1M_{11} jeder Punkt angewiesen ist, dessen Entfernungen von M_1 und M_{11} sich verhalten beziehungsweise wie die Radien von K_1 und K_{11}. Zweite Ortslinie: ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt M_1 ist, und dessen zugehörige Directrix $\left\{\begin{matrix}\text{unterhalb}\\ \text{oberhalb}\end{matrix}\right\}$ von der Geraden M_1M_{11}, mit ihr parallel liegt, unter einem Abstand von ihr gleich der Hälfte der Strecke M_1M_{11}.

Behufs vollständiger Bestimmung des Ortskegelschnittes sei noch die Angabe gemacht: für jeden seiner Peripheriepunkte hat man die Entfernungen desselben vom Brennpunkt M_1 und der zugehörigen Directrix proportional dem Durchmesser des Kreises K_1 und der Strecke M_1M_{11}.

XXI.

Ueber eine Reihe von neuen Dreiecksproblemen.

Von

Norbert v. Lorenz.

In Teil LXIII. Nr. XIII. dieses Archivs lieferten wir den Nachweis, dass die 3 Seiten x, y, z eines ebenen Dreiecks als Functionen der Radien (r, s) des dem Dreiecke um- und eingeschriebenen Kreises, sowie eines daselbst näher definirten Productes (t) zweier Höhenabschnitte darstellbar sind; wir fanden damals:

$$x+y+z = 2\sqrt{(2r+s)^2+t^2} = f_1,$$
$$xy+xz+yz = 4r^2+2s^2+8rs+t^2 = f_2,$$
$$xyz = 4rs\sqrt{(2r+s)^2+t^2} = f_3.$$

Von dieser Grundlage aus ist es nun zunächst leicht zu zeigen, dass auch viele andere gleichartige Bestimmungsstücke des Dreiecks sich in analoger Weise durch dieselben Grössen ausdrücken lassen. Hier sollen nur die betreffenden Relationen für die 3 Höhenperpendikel (m_1, m_2, m_3) des Dreiecks und deren Abschnitte (n_1, n_2, n_3) vom Höhenschnittpunkte bis zu den Ecken, respective die Abschnitte (p_1, p_2, p_3) vom Höhenschnittpunkte bis zu den Seiten des Dreiecks, sowie die von den Ecken des Dreiecks bis zum Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises gezählten Strecken (q_1, q_2, q_3) der winkelhalbirenden Linien in das Gebiet der folgenden Untersuchungen gezogen werden. Wir bemerken, dass es keine Schwierigkeiten hat, beispielsweise die Schwerpunktslinien oder die Verlängerungen der Linien q_1, q_2, q_3 bis zu den Seiten des Dreiecks, etc. durch das Wertesystem r, s, t auszudrücken — allein die betreffenden Relationen gestalten sich weit complicirter als die von uns in Betracht zu ziehenden, ohne für die folgenden Untersuchungen von weiterer Bedeutung zu sein.

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2(r +$$

$$xy = 2rm_3, \quad xz = 2rm_2, \quad y$$

$$n_1 n_2 = 2rp_3, \quad n_1 n_3 = 2rp_2, \quad n$$

$$q_1 q_2 q_3 = 4rs^2, \quad 2s^2 \frac{q_1^2 q_2^2 + q_1^2 q_3^2 + q_2}{q_1^2 q_2^2 q_3^2}$$

mit den vorhin angeführten Beziehungen f_1, f
für unsere ferneren analytischen Entwickelun
tionen hervor:

$$f_4 = \frac{1}{2r}(4r^2 + 2s^2 + 8rs + t^2), \quad f_5 = \frac{2s}{r}((2r+s)^2 + t^2)$$

$$f_7 = 2(r+s), \qquad f_8 = 2s^2 + 4rs + t^2,$$

$$f_{10} = \frac{1}{2r}(2s^2 + 4rs + t^2), \qquad f_{11} = \frac{t^2}{r}(r+s),$$

$$f_{13} = 4r^2 + 2s^2 - 4rs + t^2, \qquad f_{14} = 8rs^2(2r - s),$$

Gemäss einem bekannten Satze aus der The
Gleichungen führen die fünf Gruppen der F
$f_4, f_5, f_6; \ldots f_{13}, f_{14}, f_{15}$; wenn die drei gleich
Elemente jeder dieser Gruppen als Unbekann
unmittelbar zu den fünf kubischen Gleichungen

$$u^3 - u^2 . 2\sqrt{(2r+s)^2 + t^2} + u(4r^2 + 2s^2 + 8rs + t^2) - 4r$$

$$m^3 - m^2 \frac{4r^2 + 2s^2 + 8rs + t^2}{2r} + m\frac{2s}{r}((2r+s)^2 + t^2) - \frac{2s}{r}$$

$$n^3 - n^2 . 2(r+s) + n(2s^2 + 4rs + t^2) - 2rt^2 = 0$$

$$p^3 - p^2 \frac{2s^2 + 4rs + t^2}{} + \frac{t^2}{} \quad t^4$$

Wir besitzen somit 5 Gleichungen zur Bestimmung von 5 verschiedenen Hauptgruppen je dreier gleichartiger Dreiecksgrössen, in welchen alle Coefficienten der Unbekannten lediglich Functionen unserer Hilfsgrössen r, s, t sind; bemerken wir nun gleichzeitig, dass diese Coefficienten mit den symmetrischen Functionen der ersten Classe der Unbekannten in den Gleichungen (A), (B), (C), (D), (E) identisch sind, so leuchtet unmittelbar ein, dass, wenn 3 ganz beliebige von jenen 15 durch die Relationen $f_1 \dots f_{15}$ repräsentirten symmetrischen Complexen der Unbekannten gegeben sind, hiermit auch zugleich 3 Gleichungen zur Bestimmung der Grössen r, s, t vorliegen; ist die Auflösung derselben möglich, so führt die Restitution von r, s, t in die Gleichungen (A) ... (E) sofort zur Auflösung von fünf verschiedenen Dreiecksproblemen, respective es ist uns gelungen ganz allgemein der Forderung zu genügen:

Wenn 3 beliebige symmetrische Functionen erster Classe aus 5 verschiedenen Gruppen von je 3 gleichartigen Bestimmungsstücken eines Dreiecks bekannt sind, jedes Bestimmungselement dieser 5 Gruppen durch die 3 gegebenen Grössen auszudrücken.

Bevor wir den Uebergang zu einer weiteren Verallgemeinerung dieser Classe von Aufgaben machen, sei es uns gestattet das umfangreiche Gebiet von Problemen, welches durch die bisherigen Betrachtungen der analytischen Behandlung zugänglich gemacht wurde, kritisch zu untersuchen. Es liegen 15 symmetrische Functionen vor; die Anzahl aller denkbaren Probleme dieser Gattung ist offenbar gegeben durch die fünffache Anzahl aller Combinationen zu dreien ohne Wiederholungen der 15 vorliegenden Elemente, welche repräsentirt sind durch den Quotienten $\frac{15.14.13}{1.2.3} = 455$; würde es möglich sein aus diesen 455 Systemen von je 3 Gleichungen die Grössen r, s, jederzeit auszurechnen, so könnte man dieselben in jede der 5 Gle chungen von (A) bis (E) restituiren und es wären damit $5.455 = 22$ verschiedene Dreiecksaufgaben erledigt. Die etwas langwierige, w System für System vorzunehmende Untersuchung dieser 455 Syste von Gleichungen liefert folgendes Resultat. Die Anzahl der Syste in welchen sich die Berechnung der Hilfsgrössen r, s, t knüpft Gleichungen:

vom 1. Grade	beträgt	47
„ 2. „	„	58
„ 3. „	„	80
„ 4. „	„	78
höheren Grades	„	190
		453

Die fehlenden 2 Systeme repräsentiren von einander abhängige Gleichungen und führen daher nicht zu bestimmten Aufgaben.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, dass die grössere Mehrzahl (263) dieser Systeme zu geschlossenen Lösungen führt und dass somit 5.263 = 1315 Dreiecksprobleme dieser Art als in geschlossener Form gelöst zu betrachten sind. In der folgenden Tabelle sind die einzelnen zu einem dreigliedrigen Systeme combinirten symmetrischen Functionen, welche für je eine Gruppe von 5 Aufgaben als bekannt vorauszusetzen sind, nach dem oben festgehaltenen Gesichtspunkte zusammengestellt. Der Uebersichtlichkeit halber wurde der gemeinsame Functionalbuchstabe f unterdrückt und ist der betreffende Index an seine Stelle getreten.

Es lösen sich also durch Gleichungen vom 1. Grade die Wertecombinationen:

1, 2, 3; 1, 2, 5; 1, 2, 13; 1, 3, 5; 1, 3, 6; 1, 3, 13; 1, 3, 15;
1, 5, 6; 1, 5, 7; 1, 5, 8; 1, 5, 11; 1, 5, 13; 1, 5, 15; 1, 6, 15;
1, 8, 10; 1, 9, 12; 2, 3, 13; 2, 4, 7; 2, 4, 8; 2, 4, 10; 2, 4, 13;
2, 4, 15; 2, 5, 6; 2, 7, 8; 2, 7, 10; 2, 8, 10; 2, 8, 13; 2, 13, 14;
2, 13, 15; 3, 5, 6; 3, 5, 15; 3, 6, 7; 3, 6, 15; 4, 5, 6; 4, 7, 8;
4, 8, 10; 5, 6, 7; 5, 6, 13; 5, 6, 15; 7, 8, 10; 7, 9, 11; 7, 9, 12;
7, 11, 12; 8, 10, 13; 8, 10, 15; 9, 11, 12; 9, 12, 15;

Durch Gleichungen vom 2. Grade:

1, 2, 4; 1, 2, 7; 1, 2, 8; 1, 2, 14; 1, 3, 7; 1, 3, 8; 1, 3, 14;
1, 4, 5; 1, 4, 7; 1, 4, 10; 1, 5, 10; 1, 6, 7; 1, 6, 8; 1, 6, 10;
1, 7, 8; 1, 7, 10; 1, 7, 11; 1, 7, 13; 1, 8, 13; 1, 13, 14; 2, 4, 9;
2, 4, 12; 2, 5, 13; 2, 7, 11; 2, 7, 13; 2, 8, 11; 2, 9, 10; 2, 9, 12;
2, 10, 13; 3, 5, 14; 3, 6, 8; 3, 6, 10; 3, 8, 10; 3, 9, 15; 3, 12, 15;
4, 7, 11; 4, 7, 13; 4, 8, 13; 4, 9, 12; 4, 10, 11; 4, 10, 13; 4, 13, 15;
5, 6, 8; 5, 6, 10; 5, 6, 14; 5, 8, 11; 6, 9, 15; 6, 12, 15; 7, 8, 11;
7, 8, 13; 7, 10, 11; 7, 10, 13; 7, 11, 13; 8, 9, 10; 8, 9, 12; 8, 10, 12;
9, 10, 12; 9, 12, 13;

Durch Gleichungen vom 3. Grade:

1, 2, 6; 1, 2, 9; 1, 2, 11; 1, 2, 15; 1, 3, 4; 1, 3, 11; 1, 4, 6;
1, 4, 13; 1, 5, 9; 1, 6, 13; 1, 7, 9; 1, 7, 15; 1, 8, 11; 1, 8, 14;
1, 8, 15; 1, 10, 15; 1, 11, 13; 1, 13, 15; 1, 14, 15; 2, 3, 15; 2, 4, 5;
2, 4, 11; 2, 4, 14; 2, 5, 7; 2, 5, 8; 2, 7, 9; 2, 8, 14; 2, 11, 13;
2, 14, 15; 3, 6, 14; 3, 7, 15; 3, 8, 15; 3, 10, 15; 3, 13, 15; 3, 14, 15;
4, 5, 7; 4, 5, 10; 4, 7, 9; 4, 7, 15; 4, 9, 10; 4, 10, 15; 4, 14, 15;
5, 6, 9; 5, 6, 11; 5, 7, 8; 5, 7, 9; 5, 7, 10; 5, 7, 11; 5, 7, 13;
5, 7, 15; 5, 8, 10; 5, 8, 13; 5, 9, 12; 5, 14, 15; 6, 7, 15; 6, 10, 15;

6, 14, 15; 7, 8, 9; 7, 8, 15; 7, 9, 10; 7, 9, 13; 7, 9, 15; 7, 10, 15; 7, 11, 15; 7, 12, 15; 7, 13, 15; 8, 9, 15; 8, 10, 11; 8, 10, 14; 8, 11, 13; 8, 13, 14; 8, 14, 15; 9, 12, 14; 9, 14, 15; 10, 11, 12; 10, 11, 15; 11, 12, 15; 11, 14, 15; 12, 14, 15; 13, 14, 15;

Durch Gleichungen vom 4. Grade:

1, 2, 10; 1, 2, 12; 1, 3, 9; 1, 3, 10; 1, 4, 8; 1, 4, 9; 1, 4, 15; 1, 5, 12; 1, 5, 14; 1, 7, 12; 1, 7, 14; 1, 8, 9; 1, 10, 13; 1, 11, 12; 2, 3, 4; 2, 3, 6; 2, 3, 8; 2, 4, 6; 2, 5, 14; 2, 6, 7; 2, 7, 12; 2, 7, 14; 2, 7, 15; 2, 8, 9; 2, 8, 15; 2, 9, 13; 2, 10, 15; 2, 11, 12; 3, 4, 6; 3, 4, 15; 3, 5, 7; 3, 6, 9; 3, 6, 12; 3, 6, 13; 3, 7, 14; 3, 8, 13; 3, 9, 12; 4, 5, 13; 4, 6, 7; 4, 6, 10; 4, 7, 12; 4, 7, 14; 4, 8, 9; 4, 8, 11; 4, 8, 15; 4, 9, 13; 4, 10, 12; 4, 10, 14; 4, 11, 12; 4, 13, 14; 5, 6, 12; 5, 7, 14; 6, 7, 8; 6, 7, 9; 6, 7, 10; 6, 7, 11; 6, 7, 13; 6, 7, 14; 6, 8, 10; 6, 9, 12; 7, 8, 12; 7, 8, 14; 7, 9, 14; 7, 10, 12; 7, 10, 14; 7, 11, 14; 7, 12, 13; 7, 12, 14; 7, 13, 14; 8, 9, 13; 8, 11, 12; 8, 13, 15; 9, 10, 13; 9, 10, 15; 10, 12, 15; 10, 13, 14; 10, 13, 15; 11, 12, 13;

Durch Gleichungen von höherem als dem 4. Grade:

1, 3, 12; 1, 4, 11; 1, 4, 12; 1, 4, 14; 1, 6, 9; 1, 6, 11; 1, 6, 12; 1, 6, 14; 1, 8, 12; 1, 9, 10; 1, 9, 11; 1, 9, 13; 1, 9, 14; 1, 9, 15; 1, 10, 11; 1, 10, 12; 1, 10, 14; 1, 11, 14; 1, 11, 15; 1, 12, 13; 1, 12, 14; 1, 12, 15; 2, 3, 5; 2, 3, 7; 2, 3, 9; 2, 3, 10; 2, 3, 11; 2, 3, 12; 2, 3, 14; 2, 5, 9; 2, 5, 10; 2, 5, 11; 2, 5, 12; 2, 5, 15; 2, 6, 8; 2, 6, 9; 2, 6, 10; 2, 6, 11; 2, 6, 12; 2, 6, 13; 2, 6, 14; 2, 6, 15; 2, 8, 12; 2, 9, 11; 2, 9, 14; 2, 9, 15; 2, 10, 11; 2, 10, 12; 2, 10, 14; 2, 11, 14; 2, 11, 15; 2, 12, 13; 2, 12, 14; 2, 12, 15; 3, 4, 5; 3, 4, 7; 3, 4, 8; 3, 4, 9; 3, 4, 10; 3, 4, 11; 3, 4, 12; 3, 4, 13; 3, 4, 14; 3, 5, 8; 3, 5, 9; 3, 5, 10; 3, 5, 11; 3, 5, 12; 3, 5, 13; 3, 6, 11; 3, 7, 8; 3, 7, 9; 3, 7, 10; 3, 7, 11; 3, 7, 12; 3, 7, 13; 3, 8, 9; 3, 8, 11; 3, 8, 12; 3, 8, 14; 3, 9, 10; 3, 9, 11; 3, 9, 13; 3, 9, 14; 3, 10, 11; 3, 10, 12; 3, 10, 13; 3, 10, 14; 3, 11, 12; 3, 11, 13; 3, 11, 14; 3, 11, 15; 3, 12, 13; 3, 12, 14; 3, 13, 14; 4, 5, 8; 4, 5, 9; 4, 5, 11; 4, 5, 12; 4, 5, 14; 4, 5, 15; 4, 6, 8; 4, 6, 9; 4, 6, 11; 4, 6, 12; 4, 6, 13; 4, 6, 14; 4, 6, 15; 4, 8, 11; 4, 8, 12; 4, 9, 11; 4, 9, 14; 4, 9, 15; 4, 11, 13; 4, 11, 14; 4, 11, 15; 4, 12, 13; 4, 12, 14; 4, 12, 15; 5, 7, 12; 5, 8, 9; 5, 8, 12; 5, 8, 11; 5, 8, 15; 5, 9, 10; 5, 9, 11; 5, 9, 13; 5, 9, 14; 5, 9, 15; 5, 10, 11; 5, 10, 12; 5, 10, 13; 5, 10, 14; 5, 10, 15; 5, 11, 12; 5, 11, 13; 5, 11, 14; 5, 11, 15; 5, 12, 13; 5, 12, 14; 5, 12, 15; 5, 13, 14; 5, 13, 15; 6, 7, 12; 6, 8, 9; 6, 8, 11; 6, 8, 12; 6, 8, 13; 6, 8, 14; 6, 8, 15; 6, 9, 10; 6, 9, 11; 6, 9, 13; 6, 9, 14; 6, 10, 11; 6, 10, 12; 6, 10, 13; 6, 10, 14; 6, 11, 12; 6, 11, 13; 6, 11, 14; 6, 11, 15; 6, 12, 13; 6, 12, 14, 6, 13, 14; 6, 13, 15; 8, 9, 11; 8, 9, 14;

8, 11, 14; 8, 11, 15; 8, 12, 13; 8, 12, 14; 8, 12, 15; 9, 10, 11; 9, 10, 14; 9, 11, 13; 9, 11, 14; 9, 11, 15; 9, 13, 14; 9, 13, 15; 10, 11, 13; 10, 11, 14; 10, 11, 15; 10, 12, 13; 10, 12, 14; 11, 12, 14; 11, 13, 14; 11, 13, 15; 12, 13, 14; 12, 13, 15;

Als unbrauchbar zur Bestimmung der Grössen r, s, t erweisen sich die Wertecombinationen: 4, 7, 10 und 7, 14, 15.

Im folgenden möge es uns gestattet sein eine beschränkte Anzahl von Aufgaben dieser Art näher zu detailliren, indem es nicht ohne Interesse ist in die grosse formale Mannigfaltigkeit der unseren Gleichungssystemen zukommenden Lösungen einen tieferen Einblick zu gewinnen.

I.

Es sollen die 3 Seiten x, y, z eines ebenen Dreiecks bestimmt werden, wenn bekannt ist: die Summe (a) der Seiten, die Summe (b) der Höhen und die (doppelte) Summe (c) der Mittellote; dann ist also:

$$x+y+z=a, \quad m_1+m_2+m_3=b, \quad n_1+n_2+n_3=c$$

Unter Hinzuziehung der Relationen f_1, f_4, f_7 resultirt sofort:

$$2\sqrt{(2r+s)^2+t^2}=a$$

$$\frac{1}{2r}(4r^2+2s^2+8rs+t^2)=b$$

$$2(r+s)=c$$

welche Beziehungen als Bestimmungsgleichungen für die Grössen r, s, t aufgefasst, sofort ergeben:

$$r=\tfrac{1}{3}\left(-b+\frac{c}{2}+\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2+b^2+c^2-bc}\right)$$

$$s=\tfrac{1}{3}\left(b+c-\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2+b^2+c^2-bc}\right)$$

$$t^2=\frac{a^2}{4}-\tfrac{1}{9}\left(-b+2c+\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2+b^2+c^2-bc}\right)^2$$

Bezeichnen wir die Irrationalität dieser Formeln kurz mit h, so führt die Restitution dieser Werte in (A) unmittelbar zur Beziehung:

$$u^3-au^2+u\cdot\frac{b}{3}(-2b+c+2h)-\frac{a}{9}(b+c-h)(-2b+c+2h)=0$$

— eine Gleichung, deren 3 Wurzeln x, y, z bei schicklicher Wahl von a, b, c 3 positive reelle Werte als die Seiten eines Dreiecks in Function der vorhin bezeichneten Grössen repräsentiren.

II.

Es seien vorgelegt die Wertecombinationen:

$$x+y+z=a, \quad m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3=b^2, \quad q_1q_2q_3=c^3$$

Man frage etwa wieder nach den Seiten des diesem Grössensysteme zugehörigen Dreiecks. In Rücksicht auf die Relationen f_1, f_5, f_{15} erhalten wir sofort:

$$a=2\sqrt{(2r+s)^2+t^2}$$

$$b^2=\frac{2s}{r}((2r+s)^2+t^2)$$

$$c^3=4rs^2$$

woraus zunächst hervorgeht:

$$r=\frac{ac}{2b}\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}, \quad s=c\sqrt[3]{\frac{b^2}{2a^2}}$$

während die Berechnung von t durch die Natur der vorgelegten Aufgabe als überflüssig erscheint. Die Restitution dieser Werte in (A) führt in diesem Falle zur Beziehung:

$$u^3-au^2+u\left(\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{ab}\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}(2a^2+b^2)\right)-ac^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{4b^2}}=0$$

deren Bedeutung nach dem gesagten einer näheren Interpretation wol nicht mehr bedarf.

III.

Es seien vorgelegt die Grössen:

$$xyz=a^3, \quad m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3=b^2, \quad q_1^2q_2^2+q_1^2q_3^2+q_2^2q_3^2=c^4$$

und wir wollen diesmal die Gleichung für die Höhen desjenigen Dreiecks, dem diese symmetrischen Functionen entsprechen, aufstellen. Die Zuhilfenahme der Relationen f_3, f_5, f_{14} liefert sofort:

$$a^3=4rs\sqrt{(2r+s)^2+t^2}$$

$$b^2=\frac{2s}{r}((2r+s)^2+t^2)$$

$$c^4=8rs^2(2r-s)$$

woraus zunächst r hervorgeht in der bemerkenswerten Form:

$$r = \frac{a^2}{2bc}\sqrt[4]{2a(a^3+\sqrt{a^6-b^2c^4})}$$

und wenn wir die Irrationalität dieser Form kurz mit k bezeichnen, so gewinnen s und t die Gestalt:

$$s = \frac{bc^3}{k^3}, \quad t^2 = \frac{a^2k^4}{4c^4} - \left(\frac{a^2k^4+b^2c^4}{bck^3}\right)^2$$

Mit Rücksicht auf diese Substitutionsgrösse gewinnt nun (B) die Form:

$$m^3 - m^2\frac{a^2k^{10}+8a^2c^6k^4+4b^2c^{10}}{a^2c^3k^6} + mb^2 - \frac{b^3c^3}{k^3} = 0$$

als Gleichung, welche der aufgestellten Forderung genügt.

IV.

Es seien folgende Werte bekannt:

$$xy+xz+yz = a^2, \quad q_1^2+q_2^2+q_3^2 = b^2, \quad q_1q_2q_3 = c^3$$

und wir wollten abermals die Höhenperpendikel desjenigen Dreiecks bestimmen, dem jene Werte zukommen; wir haben somit die Relationen f_2, f_{14} und f_{15} anzuwenden und erhalten so die Gleichungen:

$$a^2 = 4r^2+2s^2+8rs+t^2,$$
$$b^2 = 4r^2+2s^2-4rs+t^2,$$
$$c^3 = 4rs^2,$$

aus denen mit Leichtigkeit die Formeln resultiren:

$$r = \frac{(a^2-b^2)^2}{36c^3}, \qquad s = \frac{3c^3}{a^2-b^2}$$

während t, wie eine naheliegende Betrachtung ergibt, nicht explicite gerechnet zu werden braucht. Mit Rücksicht auf (B) erhalten wir:

$$m^3 - m^2\frac{18a^2c^3}{(a^2-b^2)^2} + m\left(\frac{6c^2}{a^2-b^2}\right)^3\left(\tfrac{1}{3}(2a^2+b^2)-\left(\frac{3c^3}{a^2-b^2}\right)^2\right)$$
$$-\frac{c}{2}\left(\frac{6c^2}{a^2-b^2}\right)^4\left(\tfrac{1}{3}(2a^2+b^2)-\left(\frac{3c^3}{a^2-b^2}\right)^2\right) = 0$$

als Gleichung, welche die Lösung der gestellten Aufgabe implicite enthält.

V.

Es seien vorgelegt die Producte:

$$m_1 m_2 m_3 = a^3, \quad n_1 n_2 n_3 = b^3, \quad q_1 q_2 q_3 = c^3$$

Sie gehören einem bestimmten Dreiecke an, von welchem wir beispielsweise die Dimensionen p_1, p_2, p_3 zu kennen wünschen. Die Relationen f_6, f_9, f_{15} führen zunächst zu den Hilfsgleichungen:

$$a^3 = \frac{2s^2}{r}((2r+s)^2+t^2)$$

$$b^3 = 2rt^2$$

$$c^3 = 4rs^2$$

aus denen zunächst s hervorgeht in der bemerkenswerten Form:

$$s = c\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2(2a^3b^3+a^3c^3-4b^3c^3)}-2c^3}{4(2b^3+c^3)}}$$

und wenn der irrationale Factor von c kurz mit ε bezeichnet wird, so folgt unmittelbar:

$$s = c\varepsilon, \quad r = \frac{c}{4\varepsilon^2}, \quad t^2 = \frac{2b^3\varepsilon^2}{c}$$

welche Werte in (D) substituirt liefern:

$$p^3 - p^2\frac{2\varepsilon}{c^2}(2\varepsilon^3(b^3+c^3)+c^3)+p\frac{4b^3\varepsilon^2}{c}(1+4\varepsilon^3)-\left(\frac{2b^2\varepsilon^2}{c}\right)^3 = 0$$

VI.

Gegeben: •

$$m_1+m_2+m_3 = a = \frac{1}{2r}(4r^2+2s^2+8rs+t^2)$$

$$n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3 = b^2 = 2s^2+3rs+t^2$$

$$p_1+p_2+{}_3 = c = \frac{1}{2r}(2s^2+4rs+t^2)$$

Gesucht etwa: n_1. n_2. n_3.

Man findet zunächst:

$$r = \frac{b^2}{2c}, \quad s = \frac{1}{2c}(ac-b^2-c^2), \quad t^2 = \frac{b^2(2c^2-b^2)-c^2(a-c)^2}{2c^2}$$

Die Restitution dieser Werte in (C) liefert sofort n_1, n_2, n_3 in Function der gegebenen Grössen durch die Gleichung:

$$n^3 - n^2(a-c) + nb^2 - \frac{b^2}{2c^3}(b^2(2c^2-b^2) - c^2(a-c)^2) = 0$$

VII.

Gegeben:

$$n_1 + n_2 + n_3 = a = 2(r+s)$$
$$n_1 n_2 n_3 = b^3 = 2rt^2$$
$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = c^2 = \frac{t^2}{r}(r+s)$$

Gesucht etwa: p_1, p_2, p_3.

Man findet zunächst:

$$r = \frac{b}{2c}\sqrt{ab}, \quad s = \frac{1}{2c}(ac - b\sqrt{ab}), \quad t^2 = bc\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Die Restitution dieser Werte in (D) liefert sofort p_1, p_2, p_3 in Function der gegebenen Grössen durch die Gleichung:

$$p^3 - p^2\left(\frac{a}{2bc\sqrt{ab}}(ac^2 - b^3) - \frac{c^2}{a}\right) + pc^2 - \frac{bc^3}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

VIII.

Gegeben:

$$n_1 n_2 n_3 = a^3 = 2rt^2, \quad p_1 p_2 p_3 = b^3 = \frac{t^4}{2r}, \quad q_1 q_2 q_3 = c^3 = 4rs^2$$

Gesucht etwa: q_1, q_2, q_3.

Man findet leicht:

$$r = \frac{a^2}{2b}, \quad s = \frac{c}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}bc}, \quad t = \sqrt{ab}$$

Die Restitution dieser Werte in (E) liefert sofort:

$$q^6 - q^4\left(\frac{a^6 + a^3b^3 + b^3c^3}{a^2b^2} - ac\sqrt{\frac{2c}{b}}\right) + q^2 . c^3\left(\frac{a^2}{b} - \frac{c}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}bc}\right) - c^6 = 0$$

IX.

Gegeben:

$$xyz = a^3 = 4rs\sqrt{(2r+s)^2 + t^2}$$
$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = b^2 = \frac{2s}{r}((2r+s)^2 + t^2)$$
$$m_1 m_2 m_3 = c^3 = \frac{2s^2}{r}((2r+s)^2 + t^2)$$

Gesucht etwa: q_1, q_2, q_3.

Es ergeben sich zunächst die Formeln:

$$r = \frac{a^2}{2c}, \quad s = \frac{c^3}{b^2}, \quad t^2 = \frac{a^2b^4}{4c^4} - \left(\frac{a^2b^2+c^4}{b^2c}\right)^2$$

deren Restitution in (E) liefert:

$$q^6 - q^4\frac{a^2b^8+4c^{10}-16a^2b^2c^6}{4b^4c^4} + q^2\frac{4a^2c^4}{b^6}(a^2b^2-c^4) - \frac{4a^4c^{10}}{b^8} = 0$$

X.

Zum Abschlusse dieser Reihe von Beispielen möge noch folgende Wertecombination, ihres hohen formalen Interesses halber, Platz finden:

$$xyz = a^3 = 4rs\sqrt{(2r+s)^2+t^2}$$

$$m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3 = b^2 = \frac{2s}{r}((2r+s)^2+t^2)$$

$$q_1q_2q_3 = c^3 = 4rs^2$$

Hieraus gehen zunächst die formell gewiss merkwürdigen Relationen hervor:

$$r = \frac{a^2}{2}\sqrt[5]{\frac{2a^2}{b^4c^3}}, \qquad s = \frac{c}{a}\sqrt[5]{\frac{b^2c^4}{8a}}$$

Substituirt man diese Werte und den ähnlich gebauten Wert von t etwa in (A), so erhält man:

$$u^3 - u^2\frac{a}{c}\sqrt[5]{\frac{4a^4b^2}{c}} + u\left(\frac{a^3b}{2c^2}\sqrt[5]{\frac{a^3}{2bc^2}} + \frac{c^3}{2a_2}\sqrt[5]{\frac{b^4c^3}{2a^2}} + ac\sqrt[5]{\frac{8ac}{b^2}}\right) - a^3 = 0$$

als Gleichung, deren 3 Wurzeln x, y, z die Seiten eines ebenen Dreiecks bestimmen, wenn das Product seiner 3 Seiten, das Product seiner 3 Winkelhalbirungslinien, sowie die Summe der als Producte aufzufassenden Combinationen zu zweien seiner Höhenperpendikel bekannt sind.

Wenn man erwägt, dass die Relationen f_1 bis f_{15} die symmetrischen Functionen erster Classe der drei möglichen Ordnungen unserer in Betracht gezogenen Dreiecksgrössen repräsentiren, und dass es nach einem Satze aus der Lehre von den symmetrischen Functionen stets möglich ist eine symmetrische Function beliebiger Ordnung und Classe darzustellen, wenn nur alle Ordnungen der symmetrischen Functionen der ersten Classe bekannt sind, so ist es also auch mög-

lich drei beliebige symmetrische Complexe unserer untersuchten Elemente durch die Werte r, s, t auszudrücken und hiermit wären auch alle jene Aufgaben, bei welchen symmetrische Complexe der Unbekannten von beliebiger Classe und Ordnung gegeben sind, auf rein analytische Schwierigkeiten zurückgeführt. Es ist klar, dass durch diese Verallgemeinerung unserer obigen Betrachtungen die Zahl der denkbaren Aufgaben dieser Gattung sich ins beliebige vermehren lässt — allein die Möglichkeit der analytischen Durchführung solcher Probleme ist leicht begreiflicher Weise eine bedeutend geringere, als in der bisher betrachteten Gruppe.

Ein Beispiel möge den Vorgang bei der Behandlung von Aufgaben dieser Art illustriren. Bildet man auf die bekannte Art aus f_1 und f_2 die Quadratsumme der Grössen x, y, z und ebenso aus f_1 und f_3 die Quadratsumme von n_1, n_2, n_3, so erhält man:

$$x^2+y^2+z^2 = 8r^2+2t^2 = a^2$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2 = 4r^2-2t^2 = b^2$$

Sei etwa noch als drittes Bestimmungsstück unserer gesuchten Dreiecksgrössen gegeben:

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2 = 4r^2-4rs+2s^2+t^2 = c^2$$

so ergibt die Auflösung des hierdurch repräsentirten Systems von Gleichungen nach r, s, t die Werte:

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}(a^2+b^2)}, \quad t = \sqrt{\tfrac{1}{6}(a^2-2b^2)}$$
$$s = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}(a^2+b^2)}-\sqrt{2c^2-\tfrac{1}{3}(2a^2-b^2)}\right)$$

welche in ein beliebiges der fünf Systeme von (A) bis (E) substituirt zur impliciten Lösung der angedeuteten Aufgabe führt.

Eine noch weitergehende und viel fruchtbarere Verallgemeinerung der Aufgaben dieser Art, welche die Reduction der untersuchten Grössen auf reine Functionen von r, s, t zulässt, besteht in folgender Bemerkung. Es ist im allgemeinen möglich beliebige algebraische (also ganze und gebrochene, rationale und irrationale) homogene symmetrische Functionen aus verschiedenen Gruppen unserer Dreieckselemente zu bilden, welche ebenfalls nur von r, s, t abhängen; auch in diesem Falle ist die Lösung von Aufgaben, in welchen die gegebenen Elemente auf die eben angedeutete Weise gebildet sind, lediglich von der Möglichkeit der Auflösung des vorliegenden Aggregates der Grössen r, s, t nach jeder einzelnen dieser Grössen abhängig.

Auch hier mögen zwei Beispiele die ausserordentliche Mannigfaltigkeit dieser Aufgaben illustriren.

I.

Es seien vorgelegt die Werte:

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2 n_3}{p_1 p_2 p_3}} = \varepsilon, \quad \frac{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}{n_1 + n_2 + n_3} = b$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2) = c^2$$

Gemäss unseren Ausführungen haben wir zunächst folgende Hilfsrelationen zu bilden:

$$\sqrt{\frac{f_9}{f_{12}}} = \varepsilon = \frac{2r}{t}, \quad \frac{f_{11}}{f_7} = b = \frac{t^2}{2r}$$

$$f_1{}^2 - 2f_2 - 2f_{13} = c^2 = 4rs - 2s^2$$

welche als Bestimmungsgleichungen für die Grössen r, s, t aufgefasst, ergeben:

$$r = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 b, \quad s = \tfrac{1}{2}(\varepsilon^2 b - \sqrt{\varepsilon^4 b^2 - 2c^2}), \quad t = \varepsilon b$$

Wollten wir nun die winkelhalbirenden Linien eines Dreiecks bestimmen, dem die obigen Werte entsprechen, so führt die Restitution dieser Werte von r, s, t in (E) unmittelbar zur Gleichung:

$$q^6 - q^4(\varepsilon b(1 + \varepsilon^3 b) - c^2) + q^2 . bc^2 \varepsilon^2(\varepsilon^2 b - \sqrt{\varepsilon^4 b^2 - 2c^2})$$
$$- \tfrac{1}{4}\varepsilon^4 b^2(\varepsilon^2 b - \sqrt{\varepsilon^4 b^2 - 2c^2})^4 = 0$$

deren 3 positive Wurzeln die Auflösung der gestellten Aufgabe repräsentiren.

II.

Es seien vorgelegt die Werte:

$$\frac{x^2 y^2 z^2}{m_1 m_2 m_3} = a^3, \quad \frac{n_1 n_2 n_3}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} = b$$

und

$$\frac{(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)(n_1 + n_2 + n_3)}{(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)(p_1 + p_2 + p_3)} = \varepsilon$$

Es seien diesmal die Dimensionen p_1, p_2, p_3 des Dreiecks, welchem die vorgelegten Werte entsprechen, zu bestimmen. Abermals bilden wir zuerst die Hilfsrelationen:

$$\frac{f_3{}^2}{f_6} = a^3 = 8r^3, \quad \frac{f_9}{f_{11}} = b = \frac{2r^2}{r + s}, \quad \frac{f_8 . f_7}{f_{11} . f_{10}} = \varepsilon = \frac{4r^2}{t^2}$$

welchen hervorgeht:

$$r = \frac{a}{2}, \quad s = \frac{a(a-b)}{2b}, \quad t^2 = \frac{a^2}{\varepsilon}$$

Diese Werte in (D) substituirt ergeben:

$$p^3 - p^2 \frac{a}{2b^2\varepsilon}(\varepsilon(a^2-b^2)-2b^2) + p\frac{a^3}{b\varepsilon} - \frac{a^3}{\varepsilon^2} = 0$$

als Gleichung, deren 3 Wurzeln p_1, p_2, p_3 der oben gestellten Forderung entsprechen.

Die Resultate dieser im vorigen gegebenen Ausführungen lassen sich kurz zusammengefasst in folgender Form aussprechen:

Es ist allgemein möglich irgend ein Aggregat von symmetrischen Functionen aus fünf (und, wie sich leicht ausführen liesse, noch vielen anderen) Gruppen je dreier gleichartiger Dreiecksgrössen durch die Werte r, s, t auszudrücken. Werden 3 solche Aggregate als bekannt vorausgesetzt und fragen wir nach den einzelnen Elementen derselben, so hängt die Möglichkeit der Beantwortung dieser Frage nur davon ab, ob es in dem gegebenen Falle gelingt die mit r, s, t bezeichneten Hilfsgrössen einzeln aus den gegebenen Aggregaten herauszurechnen — dagegen ist diese Forderung jederzeit von der Gruppe der gesuchten Dreiecksgrössen völlig unabhängig.

Wien, am 15. Juli 1879.



XXII.

Zur Geometrie der Geraden.

Von

Emil Hain.

I.

ABCD seien Punkte einer Geraden, *O* der Nullpunkt derselben; *abcd* bezeichnen die Abstände der Punkte *ABCD* von *O*. Dann ist:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \lambda$$

Liegt *C* in *O*, so haben wir:

$$\lambda = \frac{a}{b} : \frac{a-d}{b-d}, \quad d = \frac{ab(1-\lambda)}{a-b\lambda}$$

Für $(ABCE) = \mu$ ist

$$e = \frac{ab(1-\mu)}{a-b\mu}$$

Setzen wir

$$\mu = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\varphi\lambda + \psi},$$

wo α, β, φ, ψ constant sind, so finden wir

$$e = ab\left[\frac{\lambda(\varphi-\alpha)+\psi-\beta}{\lambda(a\varphi-b\alpha)+a\psi-b\beta}\right]$$

Die Punkte *D*, *E* bilden für variable λ projectivische Punktreihen, d[illegible] [illegible]d *E* eindeutig bestimmen. Für $d = \infty$ wird:

$$a - \lambda b = 0$$

$$e = ab\left[\frac{a(\varphi-\alpha)+b(\psi-\beta)}{a(a\varphi-b\alpha)+b(a\psi-b\beta)}\right]$$

Nennen wir diesen Punkt, d. i. den Gegenpunkt der Reihe E, E_μ: für D_μ erhalten wir folgende Werte:

$$e=\infty,\quad \lambda=-\frac{a\psi-b\beta}{a\varphi-b\alpha}$$

$$d=ab\left[\frac{a\varphi-b\alpha+a\psi-b\beta}{a(a\varphi-b\alpha)+b(a\psi-b\beta)}\right]$$

Daraus folgt:

$$D_\mu E_\mu = \frac{ab(b-a)(\alpha+\psi)}{a(a\varphi-b\alpha)+b(a\psi-b\beta)}$$

Es ist also $D_\mu E_\mu = 0$, wenn

$$\alpha+\psi=0$$

Wir haben somit den Satz: Construirt man zu drei Punkten ABC zwei Punkte D und E so, dass

$$(ABCD)=\lambda$$

$$(ABCE)=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\varphi\lambda+\psi},$$

wo α, β, φ, ψ constant sind; so sind D und E für variable λ conjugirte Punkte einer Involution, wenn

$$\alpha+\psi=0$$

Specielle Fälle, für welche diese Beziehung besteht, sind:

$$\mu=\frac{1}{\lambda},\quad \mu=-\lambda.$$

II.

Construirt man zu drei Punkten ABC einer Geraden zwei Pnnkte D, E so, dass

$$(ABCD)=\lambda,\quad (ABCE)=\alpha\lambda,$$

wo α constant und λ variabel ist; so bilden die Punkte D, E zwei projectivische Reihen. Aendert man auch α, so liegen die Gegenpunkte dieser projectivischen Punktreihen zu AB symmetrisch, während die Doppelpunkte fest bleiben.

C sei der Nullpunkt der Geraden. Dann ist:

$$d=ab\left(\frac{1-\lambda}{a-b\lambda}\right),\quad e=ab\left(\frac{1-\alpha\lambda}{a-b\alpha\lambda}\right)$$

Den Werten

$$\lambda = \infty, \quad \lambda = 0$$

entsprechen die Doppelpunkte:

$$d = e = a, \quad d = e = b,$$

die Punkte A, B.

Die Gegenpunkte für die Reihen α sind die Punkte:

$$\frac{a\alpha - b}{\alpha - 1}, \quad \frac{b\alpha - a}{\alpha - 1}$$

Ihre Mitte ist: $\frac{a+b}{2}$, die Mitte von AB.

Durch Projection der Punktreihe wird der unendlich ferne Punkt U der Geraden der endliche Punkt F. Wird F sowol der Reihe D, als auch der Reihe E zugehörig betrachtet; so entsprechen ihm in diesen Reihen die Punkte E_f, D_f. Die früheren Gegenpunkte D_μ, E_μ werden nun die Punkte D_f, E_f. Die Symmetrie D_μ, E_μ, welche als eine Involution aufzufassen ist, deren Doppelpunkte U und die Mitte von AB waren, ist jetzt diejenige, für welche F und der zu F bezüglich AB vierte harmonische Punkt Doppelpunkte sind. Die eingangs dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung lautet also verallgemeinert: Construirt man zu drei Punkten ABC einer Geraden zwei Punkte D, E so, dass

$$(ABCD) = \lambda, \quad (ABCE) = \alpha\lambda;$$

dann sind für variable λ die Reihen D, E projectivisch. Ist F ein beliebiger, fester Punkt des gemeinsamen Trägers und entsprechen ihm in den Reihen D, E die Punkte D_f, E_f; so liegen diese Punkte für variable α stets harmonisch zu F und dem bezüglich AB zu F harmonischen Punkte.

III.

D und E seien gegeben durch die Gleichungen:

$$d = \frac{ab(1-\lambda)}{a - b\lambda}, \qquad e = \frac{ab(1-\mu)}{a - b\mu}$$

Wir wollen die Beziehung suchen, welche zwischen $ab\lambda\mu$ besteht, wenn für feste A und B die Mitte von DE immer derselbe Punkt sein soll.

O sei die constante Mitte von DE. Dann ist:

$$d + e = 0$$

XXIII.

Geometrische Anwendung der Addition elliptischer Integrale.

Von

R. Hoppe.

Der Schnitt eines geraden Cylinders und einer Kugel liefert eine grössere Anzahl von Figuren, deren Grösse sich, und zwar zum Teil ziemlich einfach, in elliptischen Integralen ausdrückt.

Der durch die Kugel begrenzte Cylindermantel ist reine Function 2. Gattung oder aus 1. und 2. Gattung zusammengesetzt, jenachdem der Cylinder durchgesteckt oder eingekerbt ist. Im Grenzfall, wo der Cylinder die Kugel von innen berührt, ist das Integral nicht mehr elliptisch, sondern algebraisch.

Auf der Kugel begrenzt der Mantel einen innern und äussern Teil. Da sich bei der Berechnung der innere Teil stets als Rest von der Kugelfläche darstellt, so ist es einfacher nur den äussern Teil zu betrachten. Dieser ist im allgemeinen elliptisch, zusammengesetzt aus 1. und 2. Gattung, einem algebraischen und einem circularen Term, wird aber, wenn der Mantel durch den Mittelpunkt der Kugel geht, sehr einfach 2. Gattung oder aus 1. und 2. Gattung zusammengesetzt, in denselben Fällen wie der Mantel.

Die Schnittcurve ist im allgemeinen hyperelliptisch, bloss wenn der Cylinder die Kugel von innen berührt, wird sie reine elliptische Function 2. Gattung.

Der Körper zwischen beiden Flächen ist stets elliptische Function 3. Gattung.

Von den genannten Figuren betrachten wir teils das Ganze teils variabel begrenzte Stücke.

Die Gleichung der Kugel sei

$$x^2+y^2+z^2 = a$$

die des Cylinders

$$(x-b)^2+y^2 = c^2 \tag{1}$$

Die Coordinaten eines gemeinsamen Punktes reduciren sich folgendermassen auf einander:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2+b^2-c^2-z^2}{2b} \\ y^2 &= \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2+z^2)^2}{4b^2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

§. 1. Mantel des durchgesteckten Cylinders ($a > b+c$).

Sei Gl. (1) erfüllt durch

$$x = b - c\cos\varphi; \quad y = c\sin\varphi \tag{3}$$

woraus

$$z = \sqrt{a^2-b^2-c^2+2bc\cos\varphi} \tag{4}$$

dann ist der Mantel

$$M = 2c\int_0^{4R} z\,\partial\varphi$$

Durch die Substitution

$$\varphi = 2\mathrm{am}u \quad \text{für den Modul } k = 2\sqrt{\frac{bc}{a^2-(b-c)^2}}$$

bei welcher die Coordinaten die Ausdrücke erhalten

$$x = b-c+2c\,\mathrm{sn}^2u; \quad y = 2c\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u$$

$$z = \sqrt{a^2-(b-c)^2}\,\mathrm{dn}u$$

ergiebt sich:

$$M = 4c\sqrt{a^2-(b-c)^2}\int_0^{2K}\mathrm{dn}^2u\,\partial u = 8c\sqrt{a^2-(b-c)^2}E \tag{5}$$

mit u, $\mathrm{el}u$ die Integrale 1. und 2. Gattung, mit K, E deren Quadranten, mit $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ die Functionen $\sin\mathrm{am}u$, $\cos\mathrm{am}u$, $\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}$ bezeichnet.

Nimmt man das Integral bis zu der beliebigen obern Grenze $\varphi = \varphi_1$, $u = u_1$, so stellt

$$M_1 = 4c\sqrt{a^2-(b-c)^2}\,\mathrm{el}u_1 \tag{6}$$

einen Streifen des Mantels zwischen 2 Seiten dar, deren erstere nach dem Mittelpunkt hin in der xz Ebene liegt.

Ueber die Constanten b, c lässt sich derart verfügen, dass Mäntel verschiedener Cylinder einander gleich werden. Hierbei lassen wir den Factor E, bzhw. $\mathrm{el}u$, sowie a unverändert, dann sind die 2 Bedingungen

$$k = \sqrt{\frac{bc}{a^2-(b-c)^2}} \tag{7}$$

$$A = 4c\sqrt{a^2-(b-c)^2} = \frac{4c\sqrt{bc}}{k} \tag{8}$$

[illegible] gegebenen a, k, A durch verschiedene b, c zu erfüllen. Gl. (7) …ch c aufgelöst giebt:

$$c = \sqrt{a^2+\left(\frac{2k'b}{k^2}\right)^2} - \frac{2-k^2}{k^2}b \tag{9}$$

wo nur die positive Wurzel gelten kann. Dafür kann man einfacher schreiben:

$$b = \frac{ak^2}{2k'}\cot\beta; \quad c = a\frac{1-\frac{2-k^2}{2k'}\cos\beta}{\sin\beta} \tag{10}$$

Liesse man jetzt β unabhängig variiren, so würde sich M nur mit seinem algebraischen Factor ändern, und mit den M_1 würde sich gemäss den Relationen der elliptischen Functionen von gleichem Modul rechnen lassen. Doch soll auch der Coefficient übereinstimmen, damit die Beziehungen als geometrische zu Tage treten.

Sei

$$m^2 = \frac{\sqrt{1-h^2}}{\cos\beta} - 1; \quad k' = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \tag{11}$$

dann wird

$$b = \frac{ah\cot\beta}{\sqrt{1-h^2}}; \quad c = \frac{am^2\cot\beta}{\sqrt{1-h^2}} \tag{12}$$

$$\mathrm{tg}^2\beta = \frac{m^4+2m^2+h^2}{1-h^2} \tag{13}$$

daher

$$A = \frac{2a^2}{1-h}\sqrt{\frac{2}{1+h}}\,m^3\cot^2\beta = 2a^2\sqrt{2(1+h)}\,\frac{m^3}{m^4+2m^2+h^2} \tag{14}$$

Wie aus (11) ersichtlich, kann m von 0 bis ∞ variiren; gleichzeitig variirt A von 0 zu einem Maximum und zurück bis 0; folglich giebt es zu jedem m einen zweiten Wert m_1 für gleiches A, und man hat:

$$\frac{m^3}{m^4+2m^2+h^2} = \frac{m_1^3}{m_1^4+2m_1^2+h^2} \quad \text{oder}$$

$$m^3 m_1^3(m_1-m) + 2m^2 m_1^2(m-m_1) + h^2(m^3-m_1^3) = 0$$

also, sofern m_1 nicht $= m$,

$$h^2(m^2+mm_1+m_1^2) + 2m^2 m_1^2 - m^3 m_1^3 = 0$$

und wenn man

$$\mu+1 = mm_1$$

setzt,

$$h^2(m+m_1)^2 = (\mu+1)(\mu^2-1+h^2)$$
$$h^2(m-m_1)^2 = (\mu+1)(\mu^2-1-3h^2)$$

woraus:

$$\left.\begin{matrix} m \\ m_1 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{\mu+1}}{2h}\left(\sqrt{\mu^2-1+h^2} \pm \sqrt{\mu^2-1-3h^2}\right) \tag{15}$$

Hiermit ergiebt sich zugleich, dass nicht mehr als 2 Werte von m demselben A entsprechen können.

Betrachtet man jetzt μ als beliebige Grösse zwischen $\sqrt{1+3h^2}$ und ∞, so findet man:

$$m^4+2m^2+h^2 = \frac{(\mu+1)^2-h^2}{h}\sqrt{\frac{\mu^2-1+h^2}{(\mu+1)^3}}\, m^3$$

woraus dann die Werte

$$M_1 = 2a^2[(\mu+1)^2-h^2]\sqrt{\frac{2(1+h)(\mu^2-1+h^2)}{h(\mu+1)^3}}\, \mathrm{cl}\, v_1 \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} b &= a\sqrt{\frac{h^3}{(\mu+1)^2-h^2}\sqrt{\frac{(\mu+1)^3}{\mu^2-1+h^2}}\, m^{-\frac{1}{2}}} \\ c &= a\sqrt{\frac{h^3}{(\mu+1)^2-h^2}\sqrt{\frac{(\mu+1)^3}{\mu^2-1+h^2}}\, \sqrt{m}} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

leicht hervorgehen. Hier ist $\sqrt{\mu^2-1-3h^2}$ mit beliebigem Vorzeichen zu nehmen: beim Wechsel desselben geht m in m_1, und b, c in die entsprechenden Werte b_1, c_1 über, während M_1 dasselbe bleibt. Die Relationen sind:

$$\frac{b_1}{b} = \left(\frac{\sqrt{\mu^2-1+h^2}+\sqrt{\mu^2-1-3h^2}}{\sqrt{\mu^2-1+h^2}-\sqrt{\mu^2-1-3h^2}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\sqrt{\mu^2-1+h^2}+\sqrt{\mu^2-1-3h^2}}{2h}\right)^3 \tag{18}$$

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2-1+h^2}-\sqrt{\mu^2-1-3h^2}}{\sqrt{\mu^2-1+h^2}+\sqrt{\mu^2-1-3h^2}}} = \frac{2h}{\sqrt{\mu^2-1+h^2}+\sqrt{\mu^2-1-3h^2}}$$

Hat man nun 2 Streifen desselben Cylindermantels M_1 von 0 bis u_1 und M_2 von 0 bis u_2, so giebt es stets einen dritten von 0 bis u_1+u_2, derart dass

$$M_1+M_2-M_3 = A[\mathrm{el}u_1+\mathrm{el}u_2-\mathrm{el}(u_1+u_2)]$$
$$= Ak^2\mathrm{sn}u_1\mathrm{sn}u_2\mathrm{sn}(u_1+u_2)$$

wird, und zwar hat man:

$$\mathrm{sn}(u_1+u_2) = \frac{\mathrm{sn}u_1\mathrm{cn}u_2\mathrm{dn}u_2+\mathrm{sn}u_2\mathrm{cn}u_1\mathrm{dn}u_1}{1-k^2\mathrm{sn}^2u_1\mathrm{sn}^2u_2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(x_1-b+x)(x_2-b+c)}}\,\frac{(x_1-b+c)y_2z_2+(x_2-b+c)y_1z_1}{b(a^2-x_1x_2)+(c-b)z_{12}^2}$$

Hier sind $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ die Coordinaten der zwei Punkte der Schnittcurve, durch welche die begrenzenden Cylinderseiten $u=u_1$ und $u=u_2$ gehen. Zwischen beiden ist ein dritter Punkt $x_{12}y_{12}z_{12}$ genommen, bestimmt durch

$$2x_{12} = x_1+x_2$$

Ebenso wird

$$\mathrm{cn}(u_1+u_2) = \frac{\mathrm{cn}u_1\mathrm{cn}u_2-\mathrm{sn}u_1\mathrm{sn}u_2\mathrm{dn}u_1\mathrm{dn}u_2}{1-k^2\mathrm{sn}^2u_1\,\mathrm{sn}^2u_2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x_1-b+c)(x_2-b+c)}}\,\frac{[a^2-(b-c)^2]y_1y_2-(x_1-b+c)(x_2-b+c)z_1z_2}{b(a^2-x_1x_2)+(c-b)z_{12}^2}$$

$$\mathrm{dn}(u_1+u_2) = \frac{\mathrm{dn}u_1\mathrm{dn}u_2-k^2\mathrm{sn}u_1\mathrm{sn}u_2\mathrm{cn}u_1\mathrm{cn}u_2}{1-k^2\mathrm{sn}^2u_1\mathrm{sn}^2u_2}$$

$$= \frac{cz_1z_2-by_1y_2}{b(a^2-x_1x_2)+(c-b)z_{12}^2}$$

Der Streifen M_3 wird durch einen Punkt der Schnittcurve begrenzt, dessen Coordinaten demnach sind:

(19)

$$x_3 = b-c+\frac{c}{2}\,\frac{a^2-(b-c)^2}{(x_1-b+c)(x_2-b+c)}\left[\frac{(x_1-b+c)y_2z_2+(x_2-b+c)y_1z_1}{b(a^2-x_1x_2)+(c-b)z_{12}^2}\right]^2$$

$$y_3 = \frac{c\sqrt{a^2-(b-c)^2}}{2(x_1-b+c)(x_2-b+c)}\,\frac{(x_1-b+c)y_2z_2+(x_2-b+c)y_1z_1}{[b(a^2-x_1x_2)+(c-b)z_{12}^2]^2}\times$$
$$\{[a^2-(b-c)^2]y_1y_2-(x_1-b+c)(x_2-b+c)z_1z_2\}$$

$$z_3 = \sqrt{a^2-(b-c)^2}\,\frac{cz_1z_2-by_1y_2}{b(a^2-x_1x_2)+(c-b)z_{12}^2}$$

und zwar ist

$$M_1 + M_2 - M_3 = 2bc \frac{(x_1 - b + c)y_2 z_2 + (x_2 - b + c)y_1 z_1}{b^2(a^2 - x_1 x_2) + (c - b)z_1 z_2} \tag{20}$$

eine Grösse, die sich aus den Datis construiren lässt.

Nach dem Vorigen kann man die Streifen M_1, M_2, M_3 auf 2 verschiedenen Cylindern nehmen, mithin die Summe oder Differenz zweier Streifen des einen durch einen Streifen des andern darstellen. Der Ausdruck (20) kann dann ebensowol auf den einen wie auf den andern bezogen werden und muss identische Werte ergeben.

§. 2. Mantel des eingekerbten Cylinders ($a < b + c$).

Wir behalten die Einführung (3) (4) bei. Der Mantel ist hier, wo z zum Verschwinden gelangt, ehe $\varphi = 2R$ wird,

$$M = 4c \int_{\varphi=0}^{z=0} z \partial\varphi$$

und man hat zu substituiren:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn} u; \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \operatorname{dn} u$$

für den Modul

$$k = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{bc}}$$

Die Coordinaten werden

$$x = b - c + 2ck^2 \operatorname{sn}^2 u; \quad y = 2ck \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$$
$$z = 2\sqrt{bc}\, k \operatorname{cn} u$$

und man findet:

$$\partial\varphi = 2k \operatorname{cn} u\, \partial u$$

Die Grenzen gehen über in $u = 0$, $u = K$; daher ist

$$M = 16c\sqrt{bc} \int_0^K k^2 \operatorname{cn}^2 u\, \partial u = 16c\sqrt{bc}(E - k'^2 K) \tag{21}$$

und ein Streifen von $u = \varphi = 0$ bis zu beliebiger Grenze u_1

$$M_1 = 8c\sqrt{bc}(\operatorname{el} u_1 - k'^2 u_1) \tag{22}$$

Gleiche Mäntel, bzhw. Streifen, verschiedener Cylinder erhält man wie in §. 1. Damit zunächst die Moduln gleich werden, muss Gl. (9) nach Substitution von $\frac{1}{k}$ für k erfüllt werden; dies giebt:

$$c = \sqrt{a^2 - 4k^2k'^2b^2} - (2k^2-1)b \qquad (23)$$

wo wiederum die Quadratwurzel nur positiv sein kann, eine Gleichung die zerlegt werden mag in

$$b = \frac{a\sin\gamma}{2kk'}; \quad c = a\left(\cos\gamma - \frac{2k^2-1}{2kk'}\sin\gamma\right) \qquad (24)$$

Sei nun, um auch die Coefficienten gleich zu machen,

$$m^2 = 2kk'\cot\gamma + 1 - 2k^2 \qquad (25)$$

dann wird

$$c = \frac{a\sin\gamma}{2kk'}m^2 \qquad (26)$$

daher

$$8c\sqrt{bc} = 2\left(\frac{a\sin\gamma}{kk'}\right)^2 m^3$$

Aus (25) findet man:

$$\frac{1}{\sin^2\gamma} = \frac{m^4 - 2m^2(1-2k^2)+1}{4k^2k'^2} \qquad (27)$$

daher ist

$$8c\sqrt{bc} = 8a^2\frac{m^3}{m^4 - 2m^2(1-2k^2)+1} \qquad (28)$$

Damit diese Grösse für 2 Werte m, m_1 dieselbe sei, muss sein:

$$m^3m_1^3(m_1 - m) + 2m^2m_1^2(1-2k^2)(m_1-m) + m^3 - m_1^3 = 0$$

oder nach Division durch $m_1 - m$:

$$m^2 + mm_1 + m_1^2 - 2m^2m_1^2(1-2k^2) - m^3m_1^3 = 0$$

oder, wenn $mm_1 = \mu$,

$$(m+m_1)^2 = \mu[(\mu+1)^2 - 4\mu k^2]$$
$$(m-m_1)^2 = \mu[(\mu-1)(\mu+3) - 4\mu k^2]$$

woraus:

$$\left.\begin{matrix} m \\ m_1 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu}\left[\sqrt{(\mu+1)^2 - 4\mu k^2} \pm \sqrt{(\mu-1)(\mu+3) - 4\mu k^2}\right]$$

Dies eingeführt giebt:

$$m^4 - 2m^2(1-2k^2)+1 = \frac{\mu^2-1}{4k^2k'^2}\sqrt{\frac{(\mu+1)^2 - 4\mu k^2}{\mu^3}}\,m^3$$

daher ist

$$M_1 = 32a^2\frac{k^2k'^2}{\mu^2-1}\sqrt{\frac{\mu^3}{(\mu+1)^2 - 4\mu k^2}}(\mathrm{el}u_1 - k'^2u_1) \qquad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{2akk'}{\sqrt{\mu^2-1}}\sqrt[4]{\frac{\mu^3}{(\mu+1)^3-4\mu k^2}}\,m^{-\frac{1}{4}} \\ c &= \frac{2akk'}{\sqrt{\mu^2-1}}\sqrt[4]{\frac{\mu^3}{(\mu+1)^3-4\mu k^2}}\,\sqrt{m} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Die Additionsformel für die Streifen ist hier:

$$M_1 + M_2 - M_3 = 8c\sqrt{bc}\,k^2 \mathrm{sn}u_1 \mathrm{sn}u_2 \mathrm{sn}(u_1+u_2)$$

Nach Einführung der Coordinaten erhält man genau die Gl. (20) wieder. Ebenso sind die Relationen der Coordinaten dieselben wie im ersten Falle.

In beiden Fällen kann man die Gl. (20) als eine Relation zwischen 2 Cylinderstreifen ansehen, mögen diese nun auf demselben oder auf verschiedenen Cylindern liegen. Denn $M_1 + M_2$ ist der Streifen zwischen den Seiten $u = -u_2$ und $u = u_1$, und $M_3 - M_2$ der Streifen zwischen den Seiten $u = u_2$ und $u = u_3$.

§. 3. Verbindung der zwei Fälle.

Macht man in den 2 Ausdrücken des Mantels, bzhw. Streifens, die Moduln, die algebraischen Coefficienten und die Argumente u gleich, so erhält man in der Differenz beider Mäntel oder Streifen eine geometrische Darstellung eines beliebigen Integrals 1. Gattung.

Wir wollen auch hier die Kugel als gemeinsam festhalten und nur b_0, c_0 bezüglich auf 2. Fall von b, c bezüglich auf ersten unterscheiden.

Die Gleichheit der Moduln verlangt, dass

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\,\frac{a^2-(b_0-c_0)^2}{4b_0c_0} = 1 \tag{31}$$

die Gleichheit der Coefficienten, dass

$$c\sqrt{a^2-(b-c)^2} = 2c_0\sqrt{b_0c_0} \tag{32}$$

sei. Die Verbindung beider Gleichungen ergiebt:

$$c_0\sqrt{a^2-(b_0-c_0)^2} = 2c\sqrt{bc} \tag{33}$$

Betrachtet man a, b, c als gegeben, so werden b_0, c_0 durch eine Gleichung 4. Grades bestimmt. Eine Reduction auf 2. Grad lässt sich in folgender Weise erreichen.

Nach den Gl. (12) (13) (24) (26) (27) kann man b, c in k, m und b_0, c_0 in k, n ausdrücken. Erstere Bestimmung wollen wir der letztern analog abändern und setzen:

$$b = \frac{ak^2 \cot\beta}{2k'}; \qquad c = \frac{ak^2\cot\beta}{2k'} m^2$$

$$b_0 = \frac{a \sin\gamma}{2kk'}; \qquad c_0 = \frac{a\sin\gamma}{2kk'} n^2$$

wo m^2 statt des früheren $\frac{m^2}{h}$ geschrieben ist, und zwar

$$m^2 = \frac{2k'}{k^2\cos\beta} - \frac{2-k^2}{k^2}; \quad n^2 = 2kk'\cot\gamma + 1 - 2k^2$$

dann wird nach (14) (28)

$$\frac{4c\sqrt{bc}}{k} = 2c\sqrt{a^2-(b-c)^2} = \frac{4a^2}{k} \frac{m^3}{m^4 + 2\frac{2-k^2}{k^2}m^2+1}$$

$$4c_0\sqrt{b_0c_0} = 4a^2 \frac{n^3}{n^4+2(2k^2-1)n^2+1}$$

Gl. (31) ist durch die Einführung erfüllt; es bleibt nach Gl. (32)

$$\frac{m^3}{m^4+2\frac{2-k^2}{k^2}m^2+1} = \frac{kn^3}{n^4+2(2k^2-1)n^2+1}$$

Setzt man

$$n = k\lambda m \tag{34}$$

so kommt:

$$m^4+2\frac{2-k^2}{k^2}m^2+1 = \frac{k^4\lambda^4m^4+2k^2(2k^2-1)\lambda^2m^2+1}{k^4\lambda^3}$$

oder:

$$(1-\lambda)m^4+\frac{2}{k^2}\left(2-k^2+\frac{1-2k^2}{\lambda}\right)m^2+1-\frac{1}{k^4\lambda^3} = 0$$

woraus:

$$(1-\lambda)k^2m^2 = \frac{2k^2-1}{\lambda} - 2 + k^2 + \frac{R}{\lambda} \tag{35}$$

$$R^2 = \frac{1}{\lambda}\{1-4k^2k'^2\lambda+2(2-5k^2+2k^4)\lambda^2+4k'^2\lambda^3+k^4\lambda^4\}$$

Hieraus ist zu berechnen

$$N = m^4+2\frac{2-k^2}{k^2}m^2+1 \tag{36}$$



Eliminirt man m^4, so erhält man:

$$(1-\lambda)N = \frac{1}{k^4\lambda^3}\{1-k^4\lambda^4-2k^2\lambda^2[(2-k^2)\lambda^2+1-2k^2]m^2\}$$

daher

$$N = \frac{1}{k^4\lambda^3(1-\lambda)^2}\{(1-\lambda)(1-k^4\lambda^4) \tag{37}$$

$$+2\lambda[(2-k^2)\lambda^2+1-2k^2][(2-k^2)\lambda+1-2k^2+R]\}$$

Jetzt ist

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{4a^2}{k}\frac{m^3}{N}\mathrm{el}u_1 \\ M_{10} &= \frac{4a^2}{k}\frac{m^3}{N}(\mathrm{el}u_1 - k'^2 u_1) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

folglich

$$M_1 - M_{10} = \frac{4a^2k'^2}{k}\frac{m^3}{N}u_1 \tag{39}$$

mithin das Integral erster Gattung u_1 dargestellt durch die Differenz zweier Streifen auf verschiedenen Cylindern. Zu deren Construction hat man die Werte:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{a}{\sqrt{N}}; & c &= \frac{am^2}{\sqrt{N}} \\ b_0 &= \frac{a}{k^2\sqrt{\lambda^3 N}}; & c_0 &= am^2\sqrt{\frac{\lambda}{N}} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

§. 4. Sphärische Fläche ausserhalb des Cylinders.

Zerlegt man die Gleichung der Kugel in

$$x = \varrho\cos\psi;\quad y = \varrho\sin\psi;\quad \varrho^2+z^2 = a^2 \tag{41}$$

so ist ein Element der sphärischen Fläche

$$\partial^2 Q = a\partial z\partial\psi$$

Die Gleichung der Schnittcurve giebt:

$$\varrho = b\cos\psi \pm \sqrt{c^2-b^2\sin^2\psi} \tag{42}$$

Liegt der Mittelpunkt innerhalb des Cylinders, ist also $b < c$, so hat ϱ, mithin auch z, für jedes ψ nur einen Wert, entsprechend dem obern Zeichen, und z variirt bei constantem ψ von der Schnittcurve bis a. Setzt man $\int\partial z = a$, so wird $Q = 4\mathrm{R}a^2$, d. i. gleich der halben Kugelfläche; folglich wird der äussere und innere Teil der Kugel-

fläche erzeugt, wenn z von 0 bis zur Schnittcurve, dann von dieser bis a variirt. Bedeutet demnach Q die sphärische Fläche ausserhalb des Cylinders, so ist, mit Berücksichtigung der 2 Hälften oberhalb und unterhalb der xy Ebene,

$$Q = 2a\int_0^{4R}\partial\psi\int_0^{z}\partial z = 2a\int_0^{4R} z\partial\psi$$

Nach Einführung des Wertes (42) in die letzte Gl. (41) ergiebt sich:

$$z^2 = a^2 - b^2\cos 2\psi - c^2 - 2b\cos\psi\sqrt{c^2 - b^2\sin^2\psi}$$

Setzt man, um den Ausdruck rational zu machen,

$$q = \frac{\sqrt{c^2 - b^2\sin^2\psi}}{\cos\psi} \tag{43}$$

so findet man:

$$\sin^2\psi = \frac{q^2 - c^2}{q^2 - b^2}; \quad \cos^2\psi = \frac{c^2 - b^2}{q^2 - b^2}$$

$$z^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)q^2 - 2(c^2 - b^2)bq - b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{q^2 - b^2}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)q - (a^2 - b^2 + c^2)b}{q - b}$$

$$\partial\psi = \frac{q\partial q}{q^2 - b^2}\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{q^2 - c^2}}$$

Die Intervalle von $\psi = 0$ bis R und von R bis 2R entsprechen den Intervallen von $q = c$ bis ∞ und von $-\infty$ bis $-c$; der 3. und 4. Quadrant hat mit dem 2. und 1. Quadranten gleiche Werte. Daher ist

$$Q = \frac{4a\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}\left(\int_c^{\infty} + \int_{-\infty}^{-c}\right) q\partial q\sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)q - (a^2 - b^2 + c^2)b}{(q - b)^3(q - c)(q + c)}} \tag{44}$$

Ist, wie schon angenommen, $b < c$, und $b + c < a$, so wird durch folgende Substitution das Integral auf die Grundform gebracht:

$$q = c\frac{\alpha\,\mathrm{dn}u + c\,\mathrm{cn}u}{c\,\mathrm{dn}u + \alpha\,\mathrm{cn}u}$$

für den Modul

$$k = \frac{\alpha}{c}\,\frac{a^2 + b^2 - c^2 - \sigma}{a^2 + b^2 - c^2 + \sigma}$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a^2(c^2+b^2)-(c^2-b^2)(c^2-b^2-\sigma)}{2a^2b}$$

$$\sigma = \sqrt{a^2-(b+c)^2}\,\sqrt{a^2-(b-c)^2}$$

Für $q = c$ wird $u = 0$. Bis zu beliebiger oberer Grenze genommen giebt der Ausdruck (44):

$$Q = 2\frac{a^2+b^2-c^2-\sigma}{\sqrt{ab^3(a^2+b^2-c^2)}}\int_0\left\{\frac{k\alpha-c}{k'^2}\left(\frac{\alpha}{k}\mathrm{dn}^2u-\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2c}{k}-\alpha-\frac{c\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}\right\}\partial u$$

$$= 2\frac{a^2+b^2-c^2-\sigma}{\sqrt{ab^3(a^2+b^2-c^2)}}\left\{\frac{k\alpha-c}{k'^2}\left(\frac{\alpha}{k}\mathrm{el}u-\mathrm{sn}u\right)+\left(\frac{2c}{k}-\alpha\right)u\right.$$

$$\left.-\frac{c}{k}\arcsin(k\,\mathrm{sn}u)\right\} \tag{45}$$

Von diesem allgemeinen Ausdrucke, sowie den 3 analogen für $b+c > a$ und für $b > c$ machen wir keine Anwendung, weil sie zu complicirt sind.

Es lässt sich bemerken, dass die Einführung von q in (43) unmöglich wird, wenn $b = c$ ist. Hier hat man jedoch unmittelbar:

$$\varrho = 2b\cos\psi$$

$$x = 2b\cos^2\psi;\quad y = 2b\sin\psi\cos\psi;\quad z = \sqrt{a^2-4b^2\cos^2\psi}$$

$$Q = 2a\int_0^{4\mathrm{R}}\partial\psi\sqrt{a^2-4b^2\cos^2\psi}$$

Sei $a > 2b$. Dann erhält man durch die Substitution

$$\psi = \mathrm{R}-\mathrm{am}u;\quad k = \frac{2b}{a}$$

die Werte:

$$Q = 4a^2E \tag{46}$$

$$x = 2b\,\mathrm{sn}^2u;\quad y = 2b\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u;\quad z = a\,\mathrm{dn}u$$

Die u beginnen im Pole $\varrho = 0$. Der Anfangsmeridian berührt daselbst die Schnittcurve. Zwischen ihm und dem beliebigen Meridian $u = u_1$ liegt ein äusseres Flächenstück

$$Q_1 = 2a^2\mathrm{el}u_1 \tag{47}$$

das für $u_1 = 2K$, wo der Meridian zum zweitenmal die Curve berührt, in Q übergeht. Im Gegensatz zum vorigen Falle, wo Q die ganze

äussere Fläche war, muss hier Q erst durch die halbe Kugelfläche ergänzt werden um die äussere Fläche zu ergeben.

Stellt man die Summe zweier solchen Stücke durch ein drittes dar, so hat man:

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 2a^2k^2 \mathrm{sn} u_1 \mathrm{sn} u_2 \mathrm{sn}(u_1 + u_2)$$

und zwar ist

$$\mathrm{sn}(u_1 + u_2) = \frac{a}{2b\sqrt{x_1 x_2}} \frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1}{a^2 - x_1 x_2}$$

$$\mathrm{cn}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2b\sqrt{x_1 x_2}} \frac{a^2 y_1 y_2 - x_1 x_2 z_1 z_2}{a^2 - x_1 x_2}$$

$$\mathrm{dn}(u_1 + u_2) = \frac{z_1 z_2 - y_1 y_2}{a^2 - x_1 x_2}$$

also

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{a}{2b x_1 x_2} \left(\frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1}{a^2 - x_1 x_2} \right)^2 \\ y_3 &= \frac{a}{2b x_1 x_2} \frac{(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1)(a^2 y_1 y_2 - x_1 x_2 z_1 z_2)}{(a^2 - x_1 x_2)^2} \\ z_3 &= a \frac{z_1 z_2 - y_1 y_2}{a^2 - x_1 x_2} \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 2a \frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1}{a^2 - x_1 x_2} \quad (49)$$

Sei $a < 2b$. Dann ist zu substituiren:

$$\cos\psi = k \,\mathrm{sn} u; \quad \sin\psi = \mathrm{dn} u$$

für den Modul

$$k = \frac{a}{2b}$$

und man findet, das Integral bis $z = 0$, d. i. $u = K$ gerechnet:

$$Q = 8ab(E - k'^2 K) \quad (50)$$

und bis $u = u_1$:

$$Q_1 = 4ab(\mathrm{cl} u_1 - k'^2 u_1) \quad (51)$$

$$x = \frac{a^2}{2b} \mathrm{sn}^2 u; \quad y = a \,\mathrm{sn} u \,\mathrm{dn} u; \quad z = a \,\mathrm{cn} u$$

Die Addition ergiebt:

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 4abk^2 \mathrm{sn} u_1 \mathrm{sn} u_2 \mathrm{sn}(u_1 + u_2)$$

und zwar ist

$$\mathrm{sn}(u_1+u_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1}{a^2 - x_1 x_2}$$

$$\mathrm{cn}(u_1+u_2) = \frac{z_1 z_2 - y_1 y_2}{a^2 - x_1 x_2}$$

$$\mathrm{dn}(u_1+u_2) = \frac{a^2 y_1 y_2 - x_1 x_2 y_1 y_2}{a^2 - x_1 x_2}$$

Die Ausdrücke für x_3, y_3, z_3 fallen wieder mit den vorigen (48) zusammen. Auch $Q_1 + Q_2 - Q_3$ hat in Coordinaten denselben Wert (49).

Eine Elimination der 2. Gattung ist nur möglich, wenn in (47) (51) Kugel und Cylinder verschieden sind. Bedingung ist

$$a^2 = 2a_0 b_0; \quad \frac{2b}{a} = \frac{a_0}{2b_0}$$

woraus:

$$a_0 = \sqrt{2ab}; \quad b_0 = \sqrt{\frac{a^3}{8b}} \tag{52}$$

und reciprok

$$a = \sqrt{2a_0 b_0}; \quad b = \sqrt{\frac{a_0^3}{8b_0}}$$

Ist dies festgesetzt, so wird

$$Q_1 - Q_{10} = 2a^2 k'^2 u_1 = 2(a^2 - 4b^2) u_1 \tag{53}$$

Im Grenzfall $a = 2b$ ist Q nicht mehr elliptisch, sondern algebraisch und lässt sich leicht quadriren.

§. 5. Länge der Schnittcurve.

Zur Berechnung des Bogens S gehen wir von den Relationen (2) aus. Für das Linienelement findet man:

$$\partial S = \partial z \sqrt{\frac{[b^2 - (a-c)^2 + z^2]\,[(a+c)^2 - b^2 - z^2]}{[(b+c)^2 - a^2 + z^2]\,[a^2 - (b-c)^2 - z^2]}}$$

Das Integral ist im allgemeinen hyperelliptisch. Der Fall, dass 2 Factoren unter dem Wurzelzeichen einander gleich werden, tritt nur ein für

$$a = b + c \quad \text{und} \quad b = a + c$$

Für $b = a + c$ berühren sich beide Flächen von aussen; wir haben daher nur den Fall $a = b + c$ zu betrachten, wo sie sich von innen [berü]hren. Hier wird

$$\partial S = \partial z \sqrt{\frac{4ac - z^2}{4bc - z^2}}$$

und nach Substitution

$$z = 2\sqrt{bc}\,\mathrm{sn}u; \quad k = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

woraus die Werte

$$x = \frac{2ab - z^2}{2b} = a - 2c\,\mathrm{sn}^2 u$$

$$y = \frac{z}{2b}\sqrt{4bc - z^2} = 2c\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u$$

hervorgehen,

$$S = 2\sqrt{ac}\,\mathrm{el}u \tag{54}$$

Der Bogen beginnt im Berührungspunkte. Die ganze Curve wird durchlaufen, wenn u von 0 bis $4K$ variirt, ist also

$$= 8\sqrt{ac}E$$

Drückt man die Summe zweier Bogen S_1, S_2 in einem dritten S_3 aus, so hat man:

$$S_1 + S_2 - S_3 = 2\sqrt{ac}k^2\,\mathrm{sn}u_1\,\mathrm{sn}u_2\,\mathrm{sn}(u_1 + u_2)$$

und zwar ist

$$\mathrm{sn}(u_1 + u_2) = \frac{4b}{z_1 z_2}\sqrt{\frac{c^3}{a}}\,\frac{z_1^2 y_2\sqrt{4ac - z_2^2} + z_2^2 y_1\sqrt{4ac - z_1^2}}{16bc^3 - z_1^2 z_2^2}$$

$$\mathrm{cn}(u_1 + u_2) = \frac{c}{az_1 z_2}\,\frac{16ab^2 cy_1 y_2 - z_1 z_2\sqrt{4ac - z_1^2}\sqrt{4ac - z_2^2}}{16bc^3 - z_1^2 z_2^2}$$

daher

$$\left.\begin{aligned}
x_3 &= a - \frac{32b^2c^4}{az_1^2 z_2^2}\left(\frac{z_1^2 y_2\sqrt{4ac - z_2^2} + z_2^2 y_1\sqrt{4ac - z_1^2}}{16bc^3 - z_1^2 z_2^2}\right)^2 \\
y_3 &= \frac{8bc^2}{az_1^2 z_2^2}\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{z_1^2 y_2\sqrt{4ac - z_2^2} + z_2^2 y_1\sqrt{4ac - z_1^2}}{(16bc^3 - z_1^2 z_2^2)^2} \times \\
&\{16ab^2 cy_1 y_2 - z_1 z_2\sqrt{4ac - z_1^2}\sqrt{4ac - z_2^2}\} \\
z_3 &= \frac{8c^2}{z_1 z_2}\sqrt{\frac{b^3}{a}}\,\frac{z_1^2 y_2\sqrt{4ac - z_2^2} + z_2^2 y_1\sqrt{4ac - z_1^2}}{16bc^3 - z_1^2 z_2^2}
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$$S_1 + S_2 - S_3 = \frac{2bc}{a}\,\frac{z_1^2 y_2\sqrt{4ac - z_2^2} + z_2^2 y_1\sqrt{4ac - z_1^2}}{16bc^3 - z_1^2 z_2^2} \tag{56}$$

§. 6. Körper von beiden Flächen begrenzt.

Die Cylinderfläche teilt die Kugel in einen innern und einen äussern Teil; der äussere sei $= P$. Setzt man

$$x = b - r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi$$

so ist das Körperelement

$$\partial^3 P = r\,\partial r\,\partial\varphi\,\partial z$$

Liegt der Cylinder ganz innerhalb der Kugel, so dass φ den ganzen Umkreis durchlaufen kann, so ist der innere Körper

$$\tfrac{8}{3}\mathrm{R}a^3 - P = \int_0^{4\mathrm{R}} \partial\varphi \int_0^c r\partial r \int_{-z}^{z} \partial z = 4\int_0^{2\mathrm{R}} \partial\varphi \int_0^c r\partial r \int_0^z \partial z$$

und zwar die obere Grenze der z

$$z = \sqrt{a^2 - b^2 - r^2 + 2br\cos\varphi} = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\varphi - (r - b\cos\varphi)^2}$$

Integrirt man unbestimmt nach r, so kommt:

$$\int zr\,\partial r = \left(\frac{r^2 - a^2 + b^2}{3} - \frac{br}{6}\cos\varphi - \frac{b^2}{2}\cos^2\varphi\right)z$$

$$+ \frac{b}{2}(a^2 - b^2\sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{arc\,tg}\frac{r - b\cos\varphi}{z}$$

Nach Einsetzung der Grenzen wird

$$\tfrac{8}{3}\mathrm{R}a^3 - P = P' - P'' \tag{57}$$

und zwar ist, entsprechend $r = c$, wenn man zur Abkürzung

$$V = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos\varphi}$$

setzt,

$$P' = 4\int_0^{2\mathrm{R}} \partial\varphi \left\{\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{3} - \frac{bc}{6}\cos\varphi - \frac{b^2}{2}\cos^2\varphi\right)V\right.$$

$$\left. + \frac{b}{2}(a^2 - b^2\sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{arc\,tg}\frac{c - b\cos\varphi}{V}\right\}$$

woraus P'' durch Verschwinden von c hervorgeht. Integrirt man den letzten Term teilweise, so verschwindet der integrirte Teil wegen des Factors $\sin\varphi$ für beide Integralgrenzen, und man erhält:

$$P' = 4\int_0^{2\mathrm{R}} \partial\varphi \left\{\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{3} - \frac{bc}{6}\cos\varphi - \frac{b^2}{2}\cos^2\varphi\right)V\right.$$

$$\left. - \frac{b^2}{6}\,\frac{3a^2 - b^2\sin^2\varphi}{a^2 - b^2\sin^2\varphi}\sin^2\varphi\,\frac{a^2 - b^2 + bc\cos\varphi}{V}\right\}$$

$$= \tfrac{2}{3}\int_0^{2\mathrm{R}} \partial\varphi \left\{a^2(b^2 + 4c^2) - b^4 - 4b^2c^2 - 2c^4 + bc(-3a^2 + 4b^2 + 5c^2)\cos\varphi\right.$$

$$+ b^2(-2a^2 + 2b^2 + c^2)\cos^2\varphi - 3b^3c\cos^3\varphi$$

$$\left. - 2a^4\,\frac{a^2 - b^2 + bc\cos\varphi}{a^2 - b^2\sin^2\varphi}\right\}\frac{1}{V}$$

$$k\,\mathrm{sn}\,iw = \frac{2i\sqrt{\gamma\cos\alpha}}{\gamma-\cos\alpha} = \frac{2i\sqrt{bc}}{c-b}$$

$$\mathrm{cn}\,iw = \frac{1}{\gamma-\cos\alpha} = \frac{a}{c-b}$$

$$\mathrm{dn}\,iw = \frac{\gamma+\cos\alpha}{\gamma-\cos\alpha} = \frac{c+b}{c-b}$$

und indem man zu den reellen Argumenten mit conjugirtem Modul übergeht:

$$\left.\begin{aligned} k\,\mathrm{sn}'w &= 2\sqrt{\gamma\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{bc}}{a} \\ \mathrm{cn}'w &= \gamma-\cos\alpha = \frac{c-b}{a} \\ \mathrm{dn}'w &= \gamma+\cos\alpha = \frac{c+b}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Da ferner

$$k^2\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,v = 2\cos\alpha = \mathrm{dn}'w - \mathrm{cn}'w$$

ist, so hat man:

$$P_3 = \tfrac{4}{3}a^3\left\{K\left[i\,\mathrm{el}\,iw + \left(\frac{\mathrm{dn}'w}{\mathrm{cn}'w}-1\right)\mathrm{sn}'w\right] + Ew\right\}$$

$$= \tfrac{4}{3}a^3\{K\,\mathrm{el}'w - (K-E)w - K\,\mathrm{sn}'w\}$$

Nach Reduction von b, c auf w wird ferner

$$P_0 = \tfrac{4}{3}a^3K\,\frac{2-\mathrm{cn}'w(\mathrm{dn}'w-\mathrm{cn}'w)}{\mathrm{sn}'w}$$

$$P_2 = \tfrac{4}{9}a^3\left\{4E\,\mathrm{sn}'w[4-2(\mathrm{cn}'^2w+\mathrm{dn}'^2w)-3\,\mathrm{cn}'w\,\mathrm{dn}'w]\right.$$
$$\left. - K\,\frac{4-\mathrm{cn}'^2w-\mathrm{dn}'^2w+3\,\mathrm{cn}'w\,\mathrm{dn}'w+\mathrm{cn}'^2w\,\mathrm{dn}'^2w}{\mathrm{sn}'w}\right\}$$

und nach Addition der Teile

$$P = \tfrac{4}{3}a^3\left\{K\,\mathrm{el}'w - (K-E)w\right.$$
$$+ K\,\frac{(\mathrm{cn}'w-\mathrm{dn}'w)(7\,\mathrm{cn}'w-\mathrm{dn}'w) - (1-\mathrm{cn}'w\,\mathrm{dn}'w)^2}{3\,\mathrm{sn}'w}$$
$$\left. + \tfrac{4}{3}E\,\mathrm{sn}'w(4-2\,\mathrm{cn}'^2w-2\,\mathrm{dn}'^2w-3\,\mathrm{cn}'w\,\mathrm{dn}'w)\right\} \qquad (59)$$

Aus den Formeln (58) ersieht man, dass k und w zwischen ihren weitesten Grenzen, d. i. w von 0 bis $2K'$, variiren können. Unmittelbar nämlich ist deutlich, dass w den Wert K' erreicht, wenn $b = c$ wird, und dass dabei k noch ganz unbestimmt bleibt. Soll aber w verschwinden, so muss gleichzeitig b verschwinden, und c in a übergehen. Es fragt sich, ob dann k noch jeden Wert haben kann. Sei ε unendlich klein, und

$$b = a\beta\varepsilon; \quad c = a(1-\varepsilon)$$

dann wird

$$k' = \sqrt{\frac{1-[1-(1-\beta)\varepsilon]^2}{1-[1-(1+\beta)\varepsilon]^2}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\sqrt{\frac{2-(1-\beta)\varepsilon}{2-(1+\beta)\varepsilon}}$$

hat also den Grenzwert

$$k' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

und dieser variirt von 1 bis 0, wenn β von 0 bis 1 variirt. Folglich bleibt noch jeder Modulwert möglich.

Man kann demnach 3 Körper P_1, P_2, P_3 (die bisherige Bedeutung dieser Zeichen ist aufgehoben) construiren, welche demselben Modul k und den Argumenten w_1, w_2, $w_1 + w_2$ entsprechen. Zur Abkürzung sei

$$\varphi(w) = \frac{(\text{cn}'w - \text{dn}'w)(7\text{cn}'w - \text{dn}'w) - (1 - \text{cn}'w)(\text{dn}'w)^2}{3\text{sn}'w}$$

$$\psi(w) = \text{sn}'w(4 - 2\text{cn}'^2w - 2\text{dn}'^2w - 3\text{cn}'w\,\text{dn}'w)$$

Dann ist die Relation der 3 Körper:

$$P_1 + P_2 - P_3 = \tfrac{4}{3}a^3\{K[k'^2\text{sn}'w_1\text{sn}'w_2\text{sn}'(w_1+w_2) + \varphi(w_1) + \varphi(w_2) - \varphi(w_1+w_2)] + \tfrac{4}{3}E[\psi(w_1) + \psi(w_2) - \psi(w_1+w_2)]\}$$

Führt man zur Reduction auf gegebene Lineargrössen die Werte (58) ein, so wird

$$\text{sn}'(w_1+w_2) = 2ak^3\frac{(c_1^2-b_1^2)\sqrt{b_2c_2} + (c_2^2-b_2^2)\sqrt{b_1c_1}}{a^4k^4 - 16k'^2b_1b_2c_1c_2}$$

$$\text{cn}'(w_1+w_2) = k^2\frac{a^2k^2(c_1-b_1)(c_2-b_2) - 4(c_1+b_1)(c_2+b_2)\sqrt{b_1b_2c_1c_2}}{a^4k^4 - 16k'^2b_1b_2c_1c_2}$$

$$\text{dn}'(w_1+w_2) = k^4\frac{a^2k^2(c_1+b_1)(c_2+b_2) - 4(c_1-b_1)(c_2-b_2)\sqrt{b_1b_2c_1c_2}}{a^4k^4 - 16k^2b_1b_2c_1c_2}$$

zur Construction von P_3 hat man (60)

$$b_3 = ak^2 \frac{a^2k^2(b_1c_2+c_1b_2)+2[(1+k^2)(b_1c_2+c_1b_2)+k'^2(c_1c_2+b_1b_2)]\sqrt{b_1b_2c_1c_2}}{a^4k^4-16k'^2b_1b_2c_1c_2}$$

$$c_3 = ak^2 \frac{a^2k^2(c_1c_2+b_1b_2)-2[(1+k^2)(c_1c_2+b_1b_2)+k'^2(b_1c_2+c_1b_2)]\sqrt{b_1b_2c_1c_2}}{a^4k^4-16k'^2b_1b_2c_1c_2}$$

Hier sind jedoch die b und c durch die Relation verbunden:

$$k^2[a^2-(b-c)^2] = 4bc$$

die man, wie in §. 1. geschehen, in die beiden

$b =$ … $\frac{2-k^2}{2k'}\cos\beta$ / $\sin\beta$

auflösen kann, so … s beliebig erscheinen. Dies auf b_3, c_3 angewa… . (60) identisch sind. Man bedarf dann nur de… bildet:

kann jedoch auch von der zweiten Gebrauch machen, um ohne Wurzelausziehung zu finden:

$$\frac{1}{\sin\beta_3} = \frac{c_3}{a} + (2-k^2)\frac{b_3}{ak^2} = \frac{2b_3}{ak^2} + \operatorname{cn}'(w_1+w_2)$$

Nach diesen Angaben ergiebt sich $P_1+P_2-P_3$ durch algebraische Rechnung.

§. 7. Ellipsen.

Zum Schluss wollen wir noch die Figuren zusammenstellen, deren Grösse sich in Ellipsenlinien ausgedrückt ergeben hat. Wir denken a, b, c in irgend einer Linieneinheit gemessen.

1) Der von der Kugelfläche begrenzte Mantel des durchgesteckten Cylinders ist nach (6) gleich der Ellipse von den Halbaxen

$$4c\sqrt{a^2-(b-c)^2}, \quad 4c\sqrt{a^2-(b+c)^2}$$

Basis des Cylinders heisse derjenige normale Schnitt, in dessen Ebene der Mittelpunkt der Kugel M liegt. Sein Mittelpunkt sei C. Eine Gerade durch beide schneide die Basis in A und B. Zwei Lote von A und B errichtet schneiden die Kugel in D und E. Man vollende die Rechtecke $CADF$ und $CBEG$. Diese vierfach sind gleich jen Halbaxen.

2) Der vom durchgesteckten Cylinder begrenzte Teil der Kugelfläche ausserhalb des Cylinders ist, wenn der Mittelpunkt auf dem Cylinder liegt, nach (47) gleich der Ellipse von den Halbaxen

$$a^2, \quad a\sqrt{a^2-4b^2}$$

Hier fällt A mit M zusammen. Man verlängere AB bis zum Durchschnitt mit der Kugel in H und J. Dann sind das Quadrat über AH und das Dreieck EHJ gleich jenen Halbaxen.

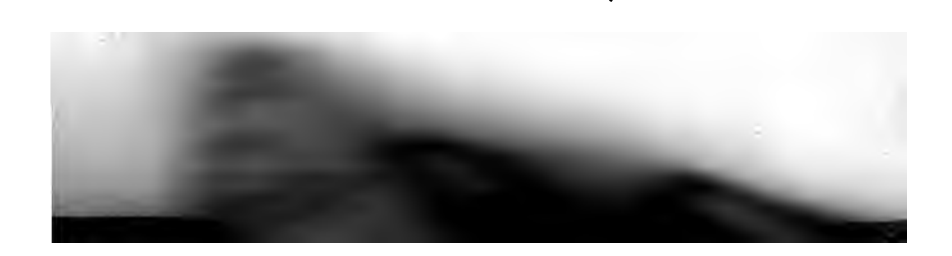
3) Die Länge der Schnittcurve der Kugel und des von innen berührenden Cylinders ist nach (54) gleich der Ellipse, deren Halbaxen sind

$$2\sqrt{ac}, \quad 2c$$

d. i. die Linien BD, BA.

Wie man Teile derselben Figuren als Bogen derselben Ellipsen darstellen kann, ist aus den Formeln leicht zu ersehen.

Die im Vorstehenden übergangenen Grenzfälle sind, soweit sie Lösungen des Viviani'schen Problems ergeben, in Schlömilch's Zeitschrift VI. p. 56. behandelt.



XXIV.

Beitrag zu den Auflösungen der Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade.

Von

Th. Sinram.

I. Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade.

Es sei gegeben die Gleichung

$$1)\quad x^2+ax+b=0$$

Nimmt man als allgemeine Form der Wurzeln dieser Gleichung

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = m+ni \text{ und} \\ x_2 = m-ni \end{cases}$$

so ist identisch

$$x^2+ax+b = (x-m-ni)(x-m+ni) = 0 \text{ oder}$$
$$x^2+ax+b = x^2-2mx+m^2+n^2$$

Weil nun die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x einan gleich sind, so ist

$$3)\quad a = -2m \text{ und}$$
$$4)\quad b = m^2+n^2$$

Aus Gleichung 3) folgt

$$m = -\frac{a}{2}$$

und aus 3) und 4) folgt

$$n = \pm\sqrt{-\frac{a^2}{4}+b}$$



Substituirt man diese Werte für m und n in 2), so erhält man

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$x_{11} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

II. Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade.

Es sei gegeben die allgemeine Gleichung vierten Grades

$$1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung seien:

$$2) \quad \begin{array}{l} x_1 \text{ und } x_2 = m \pm ni \\ x_3 \text{ und } x_4 = p \pm qi \end{array}$$

so dass also identisch

$$3) \; x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-m-ni)(x-m+ni)(x-p-qi)(x-p+qi) = 0$$
$$= x^4 - 2x^3(m+p) + x^2(m^2+n^2+p^2+q^2+4mp) - 2x(mp^2+m^2p+n^2p+q^2m)$$
$$+ (m^2+n^2)(p^2+q^2)$$

Hieraus folgt, dass

$$4) \quad a = -2(m+p)$$
$$5) \quad b = m^2+n^2+p^2+q^2+4mp$$
$$6) \quad c = -2[m(p^2+q^2)+p(m^2+n^2)]$$
$$7) \quad d = (m^2+n^2)(p^2+q^2)$$

Setzt man der Abkürzung wegen

$$m^2+n^2 = \alpha \quad \text{und} \quad p^2+q^2 = \beta$$

so erhält man

$$4a) \quad -\frac{a}{2} = (m+p)$$
$$5a) \quad b = \alpha + \beta + 4mp$$
$$6a) \quad -\frac{c}{2} = p\alpha + m\beta$$
$$7a) \quad d = \alpha\beta$$

Aus 5a) und 7a) folgt:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}[b - 4mp + \sqrt{(b-4mp)^2 - 4d}]$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}[b - 4mp - \sqrt{(b-4mp)^2 - 4d}]$$

Diese Werte für α und β in 6a) substituirt, ergibt:

$$-c = (m+p)(b-4mp) - (m-p)\sqrt{(b-4mp)^2 - 4d}$$

und weil nach)

$$m+p=-\frac{a}{2} \quad \text{und}$$

$$m-p=\sqrt{\frac{a^2}{4}-4mp}$$

so ist

$$-c=-\frac{ab}{2}+2amp-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-4mp\right)[(b-4mp)^2-4d]}$$

oder

$$(mp)^3- \quad d)+\frac{a^2d-abc+c^2}{64}=0$$

oder wenn man n als kubische Resolvente de gegebenen Gleic

$$z^3-\frac{b}{2} \quad +\frac{a^2d-abc+c^2}{64}=0$$

Berechnung v

$$m+p \quad \frac{a}{2}$$

$$mp=z$$

folglich

$$8) \quad m=-\frac{a}{4}+\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}$$

$$9) \quad p=-\frac{a}{4}-\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}$$

Berechnung von n und q.

Aus 5) folgt

$$10) \quad b-\frac{a^2}{4}-2z=n^2+q^2$$

Aus 6) folgt

$$-\frac{c}{2}=mp(m+p)+mq^2+n^2p$$

oder

$$11) \quad \frac{az-c}{2}=mq^2+n^2p$$

Aus den Gleichungen 10) und 11) folgt

$$\frac{az-c}{2}+\frac{p}{4}(a^2-4b+8z)=q^2(m-p)$$

und weil nach 8) und 9)

$$m-p=2\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}$$

ist, so ist

$$q^2 = \frac{z(2a+8p)-2c+p(a^2-4b)}{8\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}}$$

Ebenso folgt auch aus 10) und 11)

$$n^2 = -\frac{z(2a+8m)-2c+m(a^2-4b)}{8\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}}$$

Es ist also vorhin entwickelt:

$$m = -\frac{a}{4}+\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}$$

$$p = -\frac{a}{4}-\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{z(2a+8p)-2c+p(a^2-4b)}{8\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}}}$$

$$n = \pm\sqrt{-\frac{z(2a+8m)-2c+m(a^2-4b)}{8\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}}}$$

Substituirt man diese Werte für m, n, p und q in 2), so erhält man

$$x_1 \text{ u. } x_2 = -\frac{a}{4}+\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}\pm\sqrt{z+\frac{(a^2-4b)\left(-\frac{a}{4}+\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}\right)-2c}{8\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}}}$$

$$x_3 \text{ u. } x_4 = -\frac{a}{4}-\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}\pm\sqrt{z+\frac{(a^2-4b)\left(\frac{a}{4}+\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}\right)+2c}{8\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}}}$$

Setzt man der Abkürzung wegen $\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-z}=\varphi$, so erhält man

$$12)\quad x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{a}{4}+\varphi\pm\sqrt{z+\frac{a^2-4b}{8}-\frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}}$$

$$13)\quad x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{a}{4}-\varphi\pm\sqrt{z+\frac{a^2-4b}{8}+\frac{a^3-4ab+8c}{32\varphi}}$$

Wenn aus der Resolvente der biquadratischen Gleichung ein Wert für $z = \left(\frac{a}{4}\right)^2$ berechnet ist, so wird $\varphi = 0$, dann ist aber auch zugleich

$$a^3 - 4ab + 8c = 0$$

Der Bruch $\frac{a^3 - 4ab + 8c}{32\varphi}$ erhält in diesem Falle die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

Eine biquadratische Gleichung, in welcher

$$a^3 - 4ab + 8c = 0$$

ist, lässt sich ohne kubische Resolvente lösen; es ist unter dieser Voraussetzung

$$14)\quad x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{3\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 - d}}$$

$$15)\quad x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{3\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(b - \frac{a^2}{4}\right)^2 - d}}$$

1. Beispiel.

$$x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 62x + 56 = 0$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form der Gleichung 4. Grades, so ist:

$$a = -8$$
$$b = -3$$
$$c = 62$$
$$d = 56$$

Aus der kubischen Resolvente der gegebenen Gleichung, nämlich aus:

$$z^3 + \frac{3z^2}{2} - \frac{711z}{16} + \frac{1485}{16} = 0$$

folgt:

$$z_1 = 3;\quad z_2 = 3\tfrac{3}{4};\quad z_3 = -8\tfrac{1}{4}$$

Substituirt man diese Werte für z in die Gleichung

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 - z}$$

so ist

$$\varphi_1 = 1;\quad \varphi_2 = \tfrac{1}{2};\quad \varphi_3 = \tfrac{7}{2}$$

Setzt man den Wert $z_1 = 3$ in die Gleichungen 12) und 13), so erhält man



$$x_1 = 7$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 4$$
$$x_4 = -2$$

Nimmt man nun den Wert

$$z_2 = 3\tfrac{3}{4} \text{ oder}$$
$$z_3 = -8\tfrac{1}{4}$$

so erhält man dieselben Wurzeln wie vorhin, nur in anderer Aufeinanderfolge.

2. Beispiel.

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$$

Die kubische Resolvente dieser Gleichung ist

$$z^3 - 43z^2 + 612z - 2880 = 0$$

Hieraus ergibt sich

$$z_1 = 16, \text{ folglich } \varphi_1 = 0$$
$$z_2 = 15, \quad „ \quad \varphi_2 = 1$$
$$z_3 = 12, \quad „ \quad \varphi_3 = 2$$

Für $z_1 = 16$ lassen die Gleichungen 12) und 13) die Werte für x unbestimmt, dagegen erhalten wir aus den Gleichungen 14) und 15)

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 3$$
$$x_3 = 7$$
$$x_4 = 1$$

Setzt man $z_2 = 15$ oder $z_3 = 12$, so erfolgen aus den Gleichungen 12) und 13) dieselben Werte für x, nur in anderer Aufeinanderfolge.

Lehrsatz. Wenn in der Cardanischen Formel die Discriminante $b^2 + \frac{4a^3}{27}$ rational ist, so sind entweder beide dritten Wurzeln dieser Formel auch rational oder beide irrational.

Beweis. Setzt man

$$b = \frac{4a^2 - 27au^2}{54}$$

worin u eine rationale Zahl bedeutet, so ist $b^2 + \frac{4a^3}{27}$ rational.

Setzt man jenen Wert für b in die Cardanische Formel ein, so man

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4a^2-27au^2}{2.54u}+\frac{4a^2+27au^2}{2.54u}} - \sqrt[3]{\frac{4a^2-27au^2}{2.54u}+\frac{4a^2+27au^2}{2.54u}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{au}{2}} - \sqrt[3]{\frac{2a^2}{27u}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{au}{2}} - \frac{2}{3u}\sqrt[3]{\left(\frac{au}{2}\right)^2}$$

Wenn also $\sqrt[3]{\frac{au}{2}}$ [illegible] l ist, so ist es auch $\sqrt[3]{\left(\frac{au}{2}\right)^2}$,

mithin auch $\frac{2}{3u}\sqrt[3]{\ldots}$ [illegible]

Zusatz. Sin[illegible]ln der Cardanischen Formel rational, so ist d[illegible]r der dritten Wurzel auch rational gewesen.

Lehrsatz. Wenn eine Wurzel einer kubischen Gleichung rational ist, und wenn ausserdem die Discriminante unter der dritten Wurzel der Cardanischen Formel rational ist, so sind auch die beiden dritten Wurzeln dieser Formel rational.

Beweis. Weil nach dem Lehrsatze die Discriminante rational sein soll, so kann man die Cardanische Formel schreiben:

$$\text{I)} \quad x = \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2}-\frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2}+\frac{b}{2}}$$

worin x, φ und b rational sind.

Es soll nun bewiesen werden, dass sowohl $\sqrt[3]{\frac{\varphi}{2}-\frac{b}{2}}$ als auch $\sqrt[3]{\frac{\varphi}{2}+\frac{b}{2}}$ rational ist.

Kubirt man beide Seiten der Gleichung I), so erhält man:

$$x^3 = -b - 3x\sqrt[3]{\frac{\varphi^2}{4}-\frac{b^2}{4}}$$

oder

$$\text{II)} \quad -\frac{x^3+b}{3x} = \sqrt[3]{\frac{\varphi^2}{4}-\frac{b^2}{4}}$$

Gleichung I) quadrirt, gibt:

$$x^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} - \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} + \frac{b}{2}}\right)^2$$

und weil

$$\text{II)} \quad \frac{-4(x^3+b)}{3x} = 4\sqrt[3]{\frac{\varphi^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$$

so ist

$$\sqrt[3]{-\frac{x^3+4b}{3x}} = \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} - \frac{b}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} + \frac{b}{2}}$$

Ferner

$$\text{I)} \quad x = \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} - \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} + \frac{b}{2}}$$

folglich

$$\text{III)} \quad x + \sqrt{-\frac{x^3+4b}{3x}} = 2\sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} - \frac{b}{2}}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist reell, folglich ist auch $\sqrt{-\frac{x^3+4b}{3x}}$ stets reell.

Kubirt man die Gleichung III), so erhält man

$$\sqrt{-\frac{x^3+4b}{3x}} = \frac{3\varphi x}{2x^3 - b}$$

Weil nun die rechte Seite dieser Gleichung rational ist, so ist auch $\sqrt{-\frac{x^3+4b}{3x}}$ rational, demnach ist auch die linke Seite der Gleichung III) rational, also auch die rechte Seite, folglich ist $\sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} - \frac{b}{2}}$ rational. Ebenso kann man beweisen, dass $\sqrt[3]{\frac{\varphi}{2} + \frac{b}{2}}$ rational ist. (Dieses folgt nun auch aus Gleichung I).

Beispiel.

$$x^3 + 6x + 7 = 0$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{7}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{81}} - \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{81}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8} = -1$$

Probe.

$(x^3$ [illegible] $7):(x+1) = x^2 - x + 7$

Wenn x_1 irrational ist, so kann wohl die Discriminante rational sein, es sind dann die dritten Wurzeln der Cardanischen Formel auch irrational.

Beispiel.

$$x^3+3x+\tfrac{3}{2}=0$$

$$x_1=\sqrt[3]{-\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}}-\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}-\tfrac{5}{4}}$$

$$x_1=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}-\sqrt[3]{2}$$

Mit der Rationalität der Wurzeln der gegebenen Gleichung ist aber eine Rationalität der Discriminante nicht immer verbunden.

Beispiel.

$$x^3-5x^2+\frac{5x}{3}-\frac{25}{3}=0$$

Setzt man

$$x=y+\tfrac{5}{3}$$

so erhält man die Reducirte

$$y^3-\tfrac{20}{3}y-\tfrac{400}{27}=0$$

$$y_1=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{200+178,88544}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{200-178,88544}$$

$$y_1=2,412022+0,9213112$$

und weil

$$x=y+\tfrac{5}{3}$$

ist, so ist

$$x_1=5$$

ein rationaler Wert für x, welcher der gegebenen Gleichung genügt.

III. Welche Form muss eine Gleichung 3. Grades $x^3+ax+b=0$ haben, damit die Lösung der Cardanischen Formel eine rationale Wurzel der Gleichung liefert?

Antwort. Die Form der Gleichung ist

$$x^3-3x\varphi(m-\varphi)+3m\varphi(m-\varphi)-m^3=0$$

worin m eine rationale Zahl und φ eine rationale oder irrationale Zahl bedeutet.

x_1 ist dann gleich m.

Beweis. Wenn die Gleichung $x^3+ax+b=0$ gegeben, so ist nach der Cardanischen Formel:

$$1)\quad x_1=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}}}$$

Es sei nun

$$2)\quad \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}}} = m-\varphi$$

und

$$3)\quad \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}}} = \varphi$$

so erhält man, wenn man die Gleichungen 2) und 3) kubirt:

$$2a)\quad \sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}} = 2(m-\varphi)^3+b$$

$$3a)\quad \sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}} = -2\varphi^3-b$$

folglich

$$4)\quad b = -(m-\varphi)^3-\varphi^3$$

Quadrirt man die Gleichung 3a), so erhält man:

$$\frac{a^3}{27} = \varphi^6+b\varphi^3$$

Substituirt man in diese Gleichung den Wert für b aus 4), so erhält man

$$a = -3\varphi(m-\varphi)$$

Die Gleichung x^3+ax+b, aus welcher die Cardanische Formel entwickelt ist, erhält also die Form:

$$5)\quad x^3-3x\varphi(m-\varphi)+3m\varphi(m-\varphi)-m^3 = 0$$

Die Factoren dieser Gleichung sind

$$x-m = 0 \quad \text{und}$$

$$x^2+mx+m^2-3\varphi(m-\varphi) = 0$$

daher ist

$$x_1 = m$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{m}{2}\pm\frac{m-2\varphi}{2}\sqrt{-3}$$

Die Gleichung 5) kann auch geschrieben werden

$$x^3-3x\varphi(m-\varphi)-(m-\varphi)^3-m^3 = 0$$

Wenn φ nun rational ist, so ist auch $(m-\varphi)$ rational; setzt man dann $m-\varphi = m$ und $\varphi = n$, so erhält die Gleichung 5) die Form

$$x^3-3mnx-m^3-n^3 = 0$$

$$x_1 = m+n$$

IV. Welche Form muss eine vollständige Gleichung 3. Grades haben, damit die Lösung mit der Cardanischen Formel eine rationale Wurzel der Gleichung liefert?

Antwort. Die Form der Gleichung ist

$$6)\quad z^3 - az^2 + \frac{az}{3}(a+3) - \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3} - am - m^3 = 0$$

m ist eine rationale Zahl und a eine rationale oder irrationale Zahl.

$$z_1 = \frac{a}{3} + m$$

Beweis. In Gleichung 5) setze man für $-3\varphi(m-\varphi)$ den identischen Wert a, wenn a eine rationale oder irrationale Zahl bedeutet, so erhält diese Gleichung die Form

$$x^3 + ax - am - m^3 = 0$$

Setzt man nun für x gleich $z - \frac{a}{3}$, so erhält man die in der obigen Antwort stehende Gleichung 6). Weil

$$x = z - \frac{a}{3}$$

so ist

$$z_1 = x_1 + \frac{a}{3} = m + \frac{a}{3}$$

ferner folgt aus Gleichung 6)

$$z_2 \text{ und } z_3 = \frac{a}{2} - \frac{m}{2} \pm \frac{m-2\varphi}{2}\sqrt{-3}$$

φ bedeutet hier $\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{3} + \frac{m^2}{4}}$.

V. Welche Form muss eine Gleichung 4. Grades $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ haben, damit eine Wurzel ihrer kubischen Resolvente, durch die Cardanische Formel berechnet, rational ist?

Antwort. Die Form der Gleichung ist:

$$7)\quad x^4 + 2ax^2 + 8x\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)} - \frac{a^2 + 12a}{3} = 0$$

und die kubische Resolvente derselben:

$$8)\quad z^3 - z^2a + \frac{za(a+3)}{3} - \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3} - am - m^3 = 0$$

m ist hierin wieder rational und a rational oder irrational.

$$z_1 = m + \frac{a}{3}$$

Beweis. Für die allgemeine biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

wurde die Resolvente

$$z^3 - \frac{b}{2}z + \frac{z}{16}(ac + b^2 - 4d) + \frac{a^2d - abc + c^2}{64} = 0$$

gefunden. Setzt man in diesen beiden Gleichungen $a = 0$, so erhält die biquadratische Gleichung die Form

$$x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

und die zugehörige Resolvente

$$z^3 - \frac{\alpha z^2}{2} + \frac{z}{16}(\alpha^2 - 4\gamma) + \frac{\beta^2}{64} = 0$$

Wenn diese kubische Resolvente durch die Cardanische Formel eine rationale Wurzel liefern soll, so muss sein:

$$z^3 - \frac{\alpha}{2}z^2 + \frac{z}{16}(\alpha^2 - 4\gamma) + \frac{\beta^2}{64} = z^3 - az^2 + \frac{az(a+3)}{3} - \frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3} - am - m^3$$

dann ist aber

$$\frac{\alpha}{2} = a \qquad \text{mithin} \quad \alpha = 2a$$

$$\frac{\alpha^2 - 4\gamma}{16} = \frac{a}{3}(a+3) \qquad \text{,,} \quad \gamma = -\frac{a^2 + 12a}{3}$$

$$\frac{\beta^2}{64} = -\frac{a^3}{27} - \frac{a^2}{3} - am - m^3 \qquad \text{,,} \quad \beta = 8\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)}$$

Substituirt man diese Werte für α, β und γ in der Gleichung

$$x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

ein, so erhält man die in der Antwort stehenden Resultate.

VI. Welche Form muss eine vollständige Gleichung 4. Grades haben, damit eine Wurzel ihrer kubischen Resolvente, durch die Cardanische Formel berechnet, rational ist?

Antwort. Die Form der Gleichung ist:

$$9) \quad y^4 - 2ay^3 + \frac{ay^2}{2}(3a+4) - \frac{y}{2}\left[a^3 + 4a^2 - 16\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)}\right]$$
$$+ \frac{a^4}{16} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^2}{3} - 4a - 4a\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)} = 0$$

Die kubische Resolvente dieser Gleichung ist:

$$10)\quad z^3 - \frac{a}{4}(3a+4)z^2 + \frac{z}{16}(3a^4 + 8a^3 + 5\tfrac{1}{3}a^2 + 16a) - \frac{a^6}{64} - \frac{a^5}{16} - \frac{a^4}{12}$$
$$- \frac{31a^3}{108} - \frac{a^2}{3} - am - m^3 = 0$$

a und m haben dieselbe Bedeutung wie vorhin.

Beweis. Man setze in die Gleichung

$$7)\quad x^4 + 2ax^2 + 8x\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)} - \frac{a^2+12a}{3} = 0$$

für $x = y - \frac{a}{2}$, so erhält man die Gleichung 9).

Vergleicht man die Coefficienten der Gleichung 9) mit denen der allgemeinen biquadratischen Gleichung

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

so bedeutet:

$$\alpha = -2a$$

$$\beta = \frac{(3a+4)a}{2}$$

$$\gamma = \frac{-a^3 - 4a^2 + 16\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)}}{2}$$

$$\delta = \frac{a^4}{16} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^2}{3} - 4a - 4a\sqrt{-\left(\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{3} + am + m^3\right)}$$

In der zu der Gleichung

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

gehörenden kubischen Resolvente

$$z^3 - \frac{\beta}{2}z^2 + \frac{z}{16}(\alpha\gamma + \beta^2 - 4\delta) + \frac{\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2}{64} = 0$$

substituire man für α, β, γ und δ die obigen Werte ein, so erhält man als kubische Resolvente der Gleichung 9)

$$10)\quad z^3 - \frac{a}{4}(3a+4)z^2 + \frac{z}{16}(3a^4 + 8a^3 + 5\tfrac{1}{3}a^2 + 16a) - \frac{a^6}{64} - \frac{a^5}{16} - \frac{a^4}{12}$$
$$- \frac{31a^3}{108} - \frac{a^2}{3} - am - m^3 = 0$$



Setzt man in dieser Gleichung wieder

$$z = y + \frac{a}{12}(3a + 4)$$

so erhält man die Reducirte

$$y^3 + ay - am - m^3 = 0$$

also

$$y_1 = m$$

mithin ist y rational.

Hamburg, im August 1879.

XXV.

Sommes des dix premières puissances des n premiers nombres entiers, et des cinq premières puissances des n premiers nombres impairs. Relation entre ces diverses sommes.

Par

Georges Dostor.

---

1. La somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers peut s'obtenir par une méthode directe, qui ne repose pas sur la connaissance des sommes des puissances antérieures des n mêmes nombres. Nous avons déjà indiqué cette méthode à la page 437 du tome LXIII de ces Archives (1879). Les résultats, que nous avons obtenus pour les sommes des dix premiers puissances des n premiers nombres entiers, présentent entre eux des relations assez remarquables, pour que nous croyons devoir les signaler au lecteur. Ils nous ont servi en outre à calculer les sommes des puissances semblables des n premiers nombres impairs. Nous avons déterminé ces dernières sommes pour les cinq premières puissances.

2. **Nature du polynôme, qui exprime la somme des puissances α des n premiers nombres entiers.** Représentons, en général, par Σn^α la somme des puissances α des n premiers nombres entiers. Dans la formule, qui donne la somme des puissances $m^{\text{èmes}}$ des n termes d'une progression arithmétique, faisons $m=\alpha$ et la raison $r=1$; elle devient

$$(n+1)^{\alpha+1} = 1+(\alpha+1)\Sigma n^\alpha + \frac{(\alpha+1)\alpha}{2}\Sigma n^{\alpha-1}$$
$$+\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{2.3}\Sigma n^{\alpha-2}+\ldots+n.$$

ou

$$(n+1)[(n+1)^\alpha - 1] = (\alpha+1)\Sigma n^\alpha + \frac{(\alpha+1)\alpha}{2}\Sigma n^{\alpha-1} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{2.3}\Sigma n^{\alpha-2} + \ldots$$

La plus haute puissance de n, qui soit contenue dans le premier membre de cette égalité, est évidemment de degré $\alpha+1$; de plus le facteur $(n+1)^\alpha - 1$ étant divisible par n, il en sera de même du second membre. Donc

La somme des puissances α des n premiers nombres entiers est un polynôme divisible à la fois par n et par $n+1$, qui est du degré $\alpha+1$ par rapport à n.

3. **Méthode des coëfficients indéterminés.** Proposons-nous de calculer la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers.

Si nous désignons par $\varphi(n)$ le polynôme entier en n, qui exprime cette somme, nous pourrons écrire (n° 2)

$$(1)\quad \Sigma n^7 = \varphi(n) = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5 + Fn^6 + Gn^7 + Hn^8,$$

où A, B, C, ..., H représentent des coefficients numériques, qu'il s'agit de déterminer.

Afin d'obtenir les valeurs numériques de ces coefficients, dans (1) remplaçons n par $n-1$; nous trouvons, en vertu de la formule de Taylor, que

$$(2)\quad \Sigma(n-1)^7 = \varphi(n) - \varphi^I(n) + \tfrac{1}{2}\varphi^{II}(n) - \frac{1}{2.3}\varphi^{III}(n) + \frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV}(n) - \frac{1}{2..5}\varphi^{V}(n) + \frac{1}{2..6}\varphi^{VI}(n) - \frac{1}{2..7}\varphi^{VII}(n) + \frac{1}{2..8}\varphi^{VIII}(n).$$

Or il est évident que

$$\Sigma n^7 - \Sigma(n-1)^7 = n^7;$$

nous avons, par suite, en retranchant (2) de (1),

$$(3)\quad n^7 = \varphi^I(n) - \tfrac{1}{2}\varphi^{II}(n) + \frac{1}{2.3}\varphi^{III}(n) - \frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV}(n) + \frac{1}{2..5}\varphi^{V}(n) - \frac{1}{2..6}\varphi^{VI}(n) + \frac{1}{2..7}\varphi^{VII}(n) - \frac{1}{2..8}\varphi^{VIII}(n).$$

Il suffira maintenant de calculer les dérivées de $\varphi(n)$ au moyen d'égalité (1) et d'en substituer les expressions dans (3), pour avoir

une identité, qui fournira immédiatement huit équations simples du premier degré entre les huit inconnues A, B, C, ..., H.

Prenons les dérivées successives de $\varphi(n)$. L'égalité (1) nous donne

$$\begin{aligned}
\varphi^{I}(n) &= A+2Bn+3Cn^2+4Dn^3+5En^4+6Fn^5 \\
&\qquad +7Gn^6+8Hn^7, \\
-\tfrac{1}{2}\varphi^{II}(n) &= -(B+3Cn+6Dn^2+10En^3+15Fn^4+21Gn^5 \\
&\qquad +28Hn^6), \\
\frac{1}{2.3}\varphi^{III}(n) &= C+4Dn+10En^2+20Fn^3+35Gn^4+56Hn^5, \\
-\frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV}(n) &= -(D+5En+15Fn^2+35Gn^3+70Hn^4), \\
\frac{1}{2..5}\varphi^{V}(n) &= E+6En+21Fn^2+56Hn^3, \\
-\frac{1}{2..6}\varphi^{VI}(n) &= -(F+7Gn+28Hn^2), \\
\frac{1}{2..7}\varphi^{VII}(n) &= G+8Hn, \\
-\frac{1}{2..8}\varphi^{VIII}(n) &= -H.
\end{aligned}$$

Substituons ces expressions dans l'égalité (3) et égalons à zéro les coefficients des puissances successives de n; nous obtenons les huit équations du premier degré

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
A-B+C-D+E-F+G-H &= 0, \\
2B-3C+4D-5E+6F-7G+8H &= 0, \\
3C-6D+10E-15F+21G-28H &= 0, \\
4D-10E+20F-35G+56H &= 0, \\
5E-15F+35G-70H &= 0, \\
6F-21G+56H &= 0, \\
7G-28H &= 0, \\
8H &= 1.
\end{aligned}\right.$$

Si nous résolvons ces équations de proche en proche, en commençant par la dernière, nous obtiendrons, pour les coefficients A, B, C, ..., H pris en sens inverse, les valeurs cherchées

$$H=\tfrac{1}{8},\quad G=\tfrac{1}{2},\quad F=\tfrac{7}{12},\quad E=0,$$
$$D=-\tfrac{7}{24},\quad C=0,\quad B=\tfrac{1}{12},\quad A=0.$$

Il nous suffira de mettre ces valeurs dans le développement (1), pour trouver que la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers est

$$\Sigma n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12},$$

ou

$$\Sigma n^7 = \tfrac{1}{24}n^2(3n^6 + 12n^5 + 14n^4 - 7n^2 + 2).$$

Le facteur entre parenthèses est divisible par $n+1$ (n° 2); et, comme sa dérivée

$$2n(9n^4 + 30n^3 + 28n^2 - 7)$$

est aussi divisible par $n+1$ puis qu'elle s'annule pour $n = -1$, ce facteur admet le diviseur $(n+1)$. Effectuant la division, on trouve que

$$\Sigma n^7 = \tfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2).$$

4. **Formation des équations linéaires aux coefficients indéterminés.** Les équations (4) peuvent s'écrire immédiatement, a priori:

Il est aisé de remarquer, en effet, que, dans la disposition adoptée, les coefficients linéaires de la $p^{\text{ème}}$ des lettres A, B, C, ... sont, dans le sens vertical, les coefficients numériques, moins le dernier, qui se présentent successivement dans le développement de la puissance

$$-(-a+b)^p.$$

De plus, les seconds membres des α premières de ces équations sont tous égaux à zéro et celui de la dernière équation est égal à 1.

Ces coefficients, pris en valeur absolue, peuvent d'ailleurs s'obtenir au moyen de la règle, qui sert à former le triangle arithmétique de Pascal.

On écrit d'abord les $\alpha+1$ premières lettres A, B, C, ..., affectées alternativement du signe $+$ et du signe $-$; au-dessous on écrit ces mêmes lettres, à partir de la seconde, en leur donnant aussi alternativement le signe $+$ et le signe $-$, puis l'on affecte chaque lettre de cette ligne d'un coefficient numérique, qui est égal à la valeur absolue du coefficient du terme précédent ajouté au coefficient absolu qui lui est superposé dans la ligne précédente.

On forme les autres lignes successives de la même manière, en observant toute fois que le premier coefficient de chaque ligne est égal au numero d'ordre de cette ligne.

D'après cela, les équations linéaires, donnant les valeurs numériques des coefficients, qui affectent les termes successifs du polynôme développé de Σn^5, seront

$$A - B + C - D + E - F = 0,$$
$$2B - 3C + 4D - 5E + 6F = 0;$$

$$3C-6D+10E-15F=0,$$
$$4D-10E+20F=0,$$
$$5E-15F=0,$$
$$6F=1.$$

5. **Sommes des dix premières puissances des n premiers nombres entiers.** Si nous appliquons la méthode précédente au calcul de ces sommes, nous obtiendrons les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\Sigma n &= \tfrac{1}{2}n(n+1),\\
\Sigma n^2 &= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\\
\Sigma n^3 &= \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,\\
\Sigma n^4 &= \tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),\\
\Sigma n^5 &= \tfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),\\
\Sigma n^6 &= \tfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),\\
\Sigma n^7 &= \tfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),\\
\Sigma n^8 &= \tfrac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),\\
\Sigma n^9 &= \tfrac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),\\
\Sigma n^{10} &= \tfrac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3\\
&\qquad +2n^2-15n+5).
\end{aligned}$$

Il n'est pas inutile de faire observer que les expressions, qui fournissent les sommes des puissances semblables paires des n premiers nombres entiers, admettent toutes, comme facteur, le produit $n(n+1)(2n+1)$; et que celles, qui donnent les sommes des puissances semblables de degré impair, contiennent toutes le facteur $n^2(n+1)^2$.

6: **Relations entre les trois premières des sommes précédentes.** Ajoutons deux à deux Σn, Σn^2, Σn^3, et prenons de même les différences entre ces sommes; nous obtenons les six égalités

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} & \Sigma n^2+\Sigma n &= \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2),\\
&\text{(II)} & \Sigma n^2-\Sigma n &= \tfrac{1}{3}(n-1)n(n+1);\\
& & \Sigma n^3+\Sigma n &= \tfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2),\\
&\text{(III)} & \Sigma n^3-\Sigma n &= \tfrac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2);\\
& & \Sigma n^3+\Sigma n^2 &= \tfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1),\\
& & \Sigma n^3-\Sigma n^2 &= \tfrac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).
\end{aligned}$$

Nous voyons par (I), (II) et (III) que

1° La somme des carrés des n premiers nombres entiers, ajoutée à la somme de ces n mêmes no

est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est n.

2° La somme des carrés des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n-1$.

3° La somme des cubes des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au quart du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n-1$.

On trouve aussi que

$$2\Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + \Sigma n = \tfrac{1}{2}n(n+1)^2(n+2),$$
$$3\Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + \Sigma n = \tfrac{1}{4}n(n+1)^2(3n+4).$$

7. **Relations entre Σn^4 et les trois sommes Σn^3, Σn^2, Σn.** Il est facile de vérifier que l'on a

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned} \Sigma n^4 - \Sigma n &= \tfrac{1}{30}(n-1)n(n+1)(6n^2+15n+16), \\ \Sigma n^4 - \Sigma n^2 &= \tfrac{1}{10}(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1), \\ \Sigma n^4 - \Sigma n^3 &= \tfrac{1}{60}(n-1)n(n+1)(12n^2+15n+2). \end{aligned}$$

Nous concluons de (IV) que

La somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme des carrés de ces n mêmes nombres, est égale au produit de $\frac{2n+1}{10}$ par le produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n-1$.

Si nous divisons (IV) par (III), nous aurons

$$\text{(V)}\quad \frac{\Sigma n^4 - \Sigma n^2}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \tfrac{2}{5}(2n+1)$$

Ainsi, Si n égale un multiple de 5 plus 2, la différence, entre la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des carrés de ces n mêmes nombres, est divisible par la différence entre la somme des cubes des n premiers nombres entiers et la somme de ces n mêmes nombres.

On trouve facilement que l'on a aussi

$$\text{(VI)}\quad 5\Sigma n^4 + \Sigma n^2 = \tfrac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n+1) = 6\Sigma n^2 . \Sigma n.$$

8. **Autres cas de divisibilité.** Il nous vient encore

$$\text{(VII)} \qquad \Sigma n^4 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{10}\right]\Sigma n^2,$$

$$\text{(VIII)} \qquad \Sigma n^5 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{6}\right]\Sigma n^3.$$

Or le produit $(n-1)(n+2)$ est toujours divisible par 2; donc

1° Si n égale un multiple de 5 plus 1, ou un multiple de 5 plus 3, la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.

2° Si n égale un multiple de 3 plus 1, la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.

Comme on a

$$\text{(IX)} \qquad \Sigma n^5 - \Sigma n^3 = \tfrac{1}{6}(n-1)n^2(n+1)^2(n+2),$$

on voit aussi, au moyen de (III), que

$$\text{(X)} \qquad \frac{\Sigma n^5 - \Sigma n^3}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \tfrac{2}{3}n(n+1).$$

Donc Si n est un multiple de 3 ou un multiple de 3 moins 1, la différence, entre la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des cubes de ces n mêmes nombres, est divisible par la différence entre la somme de ces cubes et la somme des n mêmes nombres.

On trouve encore que

$$\text{(XI)} \qquad 3\Sigma n^5 + \Sigma n^3 = \tfrac{1}{2}n^3(n+1)^3 = 4\Sigma n^3 . \Sigma n.$$

9. Nous avons

$$\frac{\Sigma n^6}{\Sigma n^2} = \frac{3n^4 + 6n^3 - 3n + 1}{7};$$

or, si n est un multiple de 7 plus 1 et égal à $7p+1$, le numérateur de la fraction du second membre devient

$$3(7p+1)^4 + 6(7p+1)^3 - 3(7p+1) + 1;$$

et, comme le reste de la division du numérateur par 7 est le même que celui que l'on obtient, en divisant par 7 la somme

$$3+6-3+1=7$$

des restes, cette fration se réduit à un nombre entier. Donc

Si n est un multiple de 7 plus 1, la somme des sixièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par sa somme des carrés de ces n mêmes nombres.

10. Si nous ajoutons Σn^7 à Σn^5, nous trouverons que

$$\text{(XII)} \qquad \Sigma n^7 + \Sigma n^5 = \tfrac{1}{8}n^4(n+1)^4 = 2(\Sigma n^3)^2.$$

Ainsi la demi-somme des cinquièmes et des septièmes puissances des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme des cubes de ces n mêmes nombres.

On a aussi

$$\Sigma n^7 = \tfrac{1}{3}\Sigma n^3(6\Sigma n^3 - 4\Sigma n + 1).$$

Mais, si n est un multiple de 3 plus 1, $4\Sigma n - 1$ ou $2n(n+1)-1$ sera divisible par 3. Donc

Si n est un multiple de 3 plus 1, la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers sera divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.

11. D'autres relations, plus ou moins simples peuvent encore se déduire des formules du n° 5. Nous nous contenterons de citer les suivantes

$$5\Sigma n^8 + 7\,\Sigma n^6 = \tfrac{4}{3}n^3(n+1)^3(2n+1)(5n^2+5n-1),$$
$$5\Sigma n^9 + 9\,\Sigma n^7 = \tfrac{1}{8}n^4(n+1)^4(4n^2+4n-1),$$
$$5\Sigma n^9 + 10\,\Sigma n^7 + \Sigma n = \tfrac{1}{2}n^5(n+1)^5.$$

12. **Formule servant à calculer la somme des puissances α des n premiers nombres impairs.** Si, dans l'expression $2n-1$, on remplace n successivement par les n premiers nombres entiers

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,$$

on obtiendra les n premiers nombres impairs.

La somme de ces n premiers nombres impairs pourra donc être désignée par le symbole

$$\Sigma(2n-1),$$

et, parsuite

$$\Sigma(2n-1)^\alpha$$

représentera la somme des puissances α des n premiers nombres impairs.

Cette somme $\Sigma(2n-1)^\alpha$ est évidemment égale à la somme des puissances α des $2n-1$ premiers nombres entiers, diminuée de la somme des puissances α des $n-1$ premiers nombres pairs. Cette dernière somme étant égale à

$$2^\alpha[1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\ldots+(n-1)^\alpha],$$

pourra être désignée par $2^\alpha\Sigma(n-1)^\alpha$.

Si nous représentons par S_α la somme des puissances α des $2n-1$ premiers nombres entiers, nous aurons donc la formule générale

$$(A) \qquad \Sigma(2n-1)^\alpha = S_\alpha - 2^\alpha\Sigma(n-1)^\alpha,$$

qui servira à calculer la somme des puissances α des n premiers nombres impairs.

13. **Sommes des cinq premières puissances des n premiers nombres impairs.** On trouve facilement que

$$(a) \qquad \Sigma(2n-1) = n^2,$$
$$(b) \qquad \Sigma(2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(4n^2-1),$$
$$(c) \qquad \Sigma(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1),$$
$$(d) \qquad \Sigma(2n-1)^4 = \tfrac{1}{15}n(4n^2-2)(12n^2-7),$$
$$(e) \qquad \Sigma(2n-1)^5 = \tfrac{1}{3}n^2(16n^4-20n^2-7).$$

14. La formule (6) pouvant s'écrire

$$\Sigma(2n-1)^2 = \tfrac{1}{6}(2n-1)2n(2n+1).$$

nous voyons que

La somme des carrés des n premiers nombres impairs est égale au sixième du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est le dernier nombre impair considéré.

15. Si nous divisons (c) par (a) et (d) par (b), nous obtiendrons les quotients

$$\frac{\Sigma(2n-1)^3}{\Sigma(2n-1)} = 2n^2-1,$$

$$\frac{\Sigma(2n-1)^4}{\Sigma(2n-1)^2} = \tfrac{1}{5}(12n^2-7).$$

Donc 1° La somme des cubes des n premiers nombres impairs est toujours divisible par la somme de ces n mêmes nombres impairs; le quotient est $2n^2-1$.



2° La somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres impairs sera divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres, si n est un multiple de 5 plus ou moins 1.

16. Nous avons aussi, en vertu des mêmes formules

$$\Sigma(2n-1)^3+\Sigma(2n-1)=2n^4,$$
$$\Sigma(2n-1)^4+\Sigma(2n-1)^2=\tfrac{2}{15}n(4n^2-1)(6n^2-1).$$

Ainsi La somme des cubes des n premiers nombres impairs, augmentée de la somme de ces n mêmes nombres est égale à $2n^4$.

17. Nous trouvons encore que

$$\Sigma(2n-1)^3-\Sigma(2n-1)=2n\,.(n-1)n(n+1).$$

Donc La somme des cubes des n premiers nombres impairs, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale à $2n$ fois le produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n-1$.

18. Il est facile de vérifier que l'on a aussi

$$\Sigma(2n-1)^5+2\Sigma(2n-1)^3=3[\Sigma(2n-1)^2]^2.$$

Ainsi La somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres impairs, augmentée de 2 fois la somme des cubes des n mêmes nombres, est égale à 3 fois le carré de la somme des carrés de ces n premiers nombres impairs.

19. **Somme des puissances α de m nombres impairs consécutifs.** Supposons que ces m nombres impairs soient précédés de n nombres impairs.

La somme des puissances α des $m+n$ premiers nombres impairs sera

$$\Sigma(2m+2n-1)^\alpha,\quad \text{et}\quad \Sigma(2n-1)^\alpha$$

sera la somme des n premiers nombres impairs.

La somme cherchée est donc

$$\Sigma(2m+2n-1)^\alpha-\Sigma(2n-1)^\alpha.$$

Ainsi la somme des cubes des m nombres impairs, qui viennent à la suite des n premiers nombres impairs, sera, d'après (c),

$$\Sigma(2m+2n-1)^3 - \Sigma(2n-1)^3 = (m+n)^2[2(m+n)^2-1] - n^2(2n^2-1)$$
$$= m(m+2n)(2m^2+4mn+4n^2-1).$$

Lorsque $m = n$, celle expression devient

$$3n^2(10n^2-1),$$

et représente la somme des cubes des n nombres impairs, qui suivant les n premier nombres impairs.

20. **Somme** des puissances α de m nombres entiers consécutifs. Si ces m nombres sont précédés de n nombres entiers, la somme demandée sera

$$\Sigma(m+n)^\alpha - \Sigma n^\alpha.$$

Dans le cas où $\alpha = 3$, on aura

$$\Sigma(m+n)^3 = \tfrac{1}{4}(m+n)^2(m+n+1)^2, \quad \Sigma n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Notre somme sera donc

$$\Sigma(m+n)^3 - \Sigma n^3 = \tfrac{1}{4}(m+n)^2(m+n+1)^2 - \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}[(m+n)(m+n+1)+n(n+1)][(m+n)(m+n+1)-n(n+1)]$$
$$= \tfrac{1}{4}m(m+2n+1)(m^2+2mn+2n^2+m+2n).$$

Pour $m = n$, cette expression devient

$$\tfrac{1}{4}n^2(3n+1)(5n+3);$$

elle fournit la somme des cubes des n nombres entiers, qui viennent à la suite des n premiers nombres entiers.



XXVI.

Méthodes expéditives pour l'extraction de la racine cubique des nombres entiers ou décimaux.

Par

Georges Dostor.

---

1. Les industries professionnelles, telles que la charpente, la menuiserie, la coupe des pierres, la fonderie, etc. présentent souvent des calculs, dans lesquels on est conduit à extraire des racines cubiques. Ces racines se déterminent alors, selon les cas, avec deux ou trois chiffres exacts.

Mais, dans les arts de précision, le constructeur, le mécanicien, le physicien, etc. ont souvent besoin d'un plus grande approximation; ils ont alors recours aux Tables et obtiennent les racines cubiques à l'aide des Logarithmes. Ceux-ci ne sauraient donner tout au plus que cinq ou six chiffres exacts.

Cependant, lorsque la quantité à évaluer en décimales contient des radicaux superposés, les premières racines cubiques devront être calculées, de manière à fournir autant de tranches de trois chiffres, que l'on désire avoir de chiffres à la dernière racine. Dans ce cas il faut, de toute nécessite, proceder à l'extraction directe de la racine cubique, et déterminer cette racine avec un assez grand nombre de chiffres exacts.

2. L'extraction de la racine carrée est une opération assez e: elle repose sur des principes qui sont faciles à établir et s à appliquer; les calculs sont peu compliqués.

Il n' en est pas de même de l'extraction de la racine cubique.

Si les principes, qui lui servent de base, sont aisés à comprendre et à démontrer, surtout à la suite de ceux de la racine carrée, avec les quels ils ont la plus grande analogie, l'opération en est laborieuse et pénible, d'une longueur souvent répugnante.

Ces défauts, dans la pratique, tiennent au mode d'essai du dernier chiffre présumé à la racine. Pour vérifier ce chiffre, on a l'habitude d'élever au cube toute la partie trouvée à la racine, y compris le chiffre à essayer, afin de s'assurer que ce cube peut se retrancher de la partie correspondante du nombre proposé. Ce calcul, déjà long lorsque la racine ne se compose que de trois chiffres, dévient malaisé et fastidieux, pour ne pas dire impraticable, dès que la racine contient un plus grand nombre de chiffres.

Il est vrai que quelques auteurs, en petit nombre, se bornent à former les trois dernières parties du cube de la racine, décomposée en dizaines et en unités, et à retrancher leur somme du reste précédent suivi de la tranche correspondante; mais, dans cette formation, on se trouve toujours assujetti à calculer directement le triple carrée des dizaines trouvées à la racine.

3. L'éxtraction de la racine cubique, d'après les méthodes suivies, sera donc toujours une opération entravée de longeurs et hérissée de difficultés pour les personnes, qui sont peu familiarisées avec l'usage des Tables, ou qui veulent calculer la racine cubique avec un grand nombre de chiffres exacts.

Nous pensons que la méthode suivante obvie à ce double inconvénient.

Dans cette méthode, pour déterminer un nouveau chiffre à la racine, on fait usage des résultats fournis par le calcul du chiffre précédent, que l'on complète par une simple multiplication, dans laquelle l'un des deux facteurs est tout au plus égal à 3×9.

Cette méthode n'est guère plus pénible que celle qui est employée pour l'extraction de la racine carrée, et se conduit presque aussi rapidement.

Nous l'avons publiée dès 1850 *) avec tous ses développements; depuis elle a été reproduite d'une manière incomplète et souvent incomprise dans quelques ouvrages, mais sans indication d'origine.

---

*) G. **Dostor**, Nouveau système d'Arithmétique; Paris L. Hachette, 1850.

Nous nous proposons de l'exposer avec toutes les simplifications, que la réflexion et l'expérience nous ont suggérées depuis.

4. On sait que:

Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, et l'on extrait la racine du plus grand cube entier qui soit contenu dans la première tranche à gauche.

On obtient ainsi le premier chiffre de la racine cubique cherchée.

5. Cela fait, il est aisé de démontrer que:

Pour trouver le second chiffre de cette racine, de la première tranche à gauche, dans le nombre donné, on retranche le cube du premier chiffre obtenu à la racine; à côté du reste on abaisse le premier chiffre de la tranche suivante; on divise ensuite le nombre résultant, d'abord par le triple carré du chiffre trouvé à la racine, puis par ce triple carré augmenté de trois fois le même chiffre. On obtient ainsi deux quotients, entre lesquels se trouve compris le second chiffre de la racine.

Soit, en effet, à extraire la racine cubique du nombre 274308, qui se sépare dans les deux tranches de trois chiffre 274 et 308.

Le plus grand cube entier, qui soit contenu dans 274, est 216, dont la racine est 6. Le premier chiffre de notre racine cubique est donc 6.

274.308	6	
216	36	108
583.08	3	18
	108	126

Retranchant le cube de 6, qui est 216, de la première tranche 274 et, à côté du reste 58, abaissant la tranche suivante 308, on obtient le nombre 583.08, qui contient 583 centaines.

On divise ces 583 centaines, d'abord par le triple carré 108 du chiffre 6, puis par ce triple carré augmenté de 3 fois 6 ou 18, c'est-à-dire par 126. On trouve ainsi pour quotients entiers les nombres 5 et 4. Je dis que le second chiffre de la racine est 5 ou 4.

Pour le prouver, désignons par N le nombre donné 274308, par d le chiffre des dizaines de sa racine cubique, par u le chiffre des

unités de cette racine et par r ce qu'il faut ajouter à u pour avoir la racine complète. La quantité r nécessairement moindre que l'unité.

Si nous posons $u+r=a$, nous aurons

(1) $N=(10d+a)^3=1000d^3+3.100d^2.a+3.10d.a^2+a^3.$

Appelons q et q' les quotients entiers, que fournit la division des centaines contenues dans $N-1000d^3$, d'abord par $3d^2$, puis par $3d^2+3d$; ou, si l'on veut, la division de $N-1000d^3$, d'abord par $300d^2$, puis par $300d^2+300d$.

1⁰ Nous avons, en vertu de (1),

$$\frac{N-1000d^3}{300d^2}=a+\frac{a^2}{10d}+\frac{a^3}{300d^2};$$

or la partie entière q du quotient est nécessairement égale à la partie entière du second membre; mais celle-ci n'est pas moindre que la partie entière u contenue dans a; donc le quotient q n'est pas moindre que le chiffre des unités u de la racine cubique cherchée.

2⁰ Supposons que le chiffre d des dizaines ne soit pas moindre que 4. Puisque a est inférieur à 10, nous avons nécessairement

$$3d>a,\quad 10-a>1,\quad 10a>a^2,$$

d'où nous tirons, en multipliant,

$$30da(10-a)>a^3,$$

ou

$$300da-30da^2>a^3.$$

Il s'ensuit que nous pouvons écrire

$$300da>30da^2+a^3,$$

et, par suite, en ajoutant de part et d'autre $300d^2a$

$$300d^2a+300da>300d^2a+30da^2+a^3.$$

Le second membre étant égal à $N-1000d^3$, nous avons

$$(300d^2+300d)a>N-1000d^3.$$

Nous voyons ainsi que, si nous divisons $N-1000d^3$ par $300d^2+300d$, nous obtiendrons un quotient, qui n'est pas supérieur à a; donc la partie entière q' de ce quotient n'est pas supérieure au chiffre des unités u, lequel est la partie entière de a.

Il s'ensuit que le chiffre des unités de la racine cubique de 274308 est 5 ou 4.

6. Pour essayer le chiffre 5, on observe que le reste 58308 contient la somme des trois dernières parties

$$3.(10d)^2u + 3.(10d)u^2 + u^3$$

du cube de $10 + u$.

	64		
274.308			
216		36	36
583.08		3	3
461 44	$3(10d)^2 =$	10800	10800
121 64	$3.10du =$	900	720
	$u^2 =$	25	16
		11725	11536
		5	4
	$3(10d)^2u + 3.10du^2 + u^3 =$	58625	46144

Afin de former ces trois parties, où $d = 6$ et $u = 5$, nous écrivons, sous $10800 = 3(10d)^2$, le triple produit 900 de $60 = 10d$ par $5 = u$, et sous celui-ci le carré $25 = u^2$ de $u = 5$; la somme de ces trois parties, ou 11725, sera donc égale à $3(10d)^2 + 3(10d)u + u^2$. En multipliant cette somme par $5 = u$, nous obtiendrons 58625 pour la somme

$$3(10d)^2u + 3(10d)u^2 + u^3$$

des trois autres parties du cube de 65.

Le nombre 58625 étant supérieur au reste 58308, le chiffre 5 est trop fort.

On essaie de la même manière le chiffre 4, que l'on trouve être exact.

7. Soit maintenant à extraire la racine cubique du nombre 274308246864083, qui renferme plus de six chiffres.

274.308.246.864.083	64975				
583.08	$3(10d)^2 =$	10800	1228800	126360300	12663302700
121642.46	$3.10du =$	720	17280	136290	974550
9487978.64	$u^2 =$	16	81	49	25
633213910.83		11536	1246161	126496639	12664277275
47 08	$u^2 =$	16	81	49	
	$310(du+)^2 =$	12288	1263603	126633027	
		192	1947	19491	
		12480	1265550	126652518	

Après avoir séparé le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, on calcule, comme précédemment, la racine cubique 64 du nombre 274308 formé par les deux premières tranches à gauche.

A côté du reste 12164 on abaisse la tranche suivante 246, et l'on sépare, dans le résultat, les deux derniers chiffres par un point.

Pour obtenir le troisième chiffre de la racine, il nous faudra diviser la partie 121642, qui se trouve à gauche du point dans le deuxième reste, par le triple carré de la partie 64 trouvée à la racine.

Or ce triple carré peut s'obtenir immédiatement par une simple addition.

En effet, sous le nombre 11536, qui est égal à

$$3(10d)^2+3(10d)u+u^2,$$

écrivons le carré $u^2=16$ du dernier chiffre obtenu 4, et faisons la somme de tous les nombres superposés, à l'exception du premier nombre 10800; nous obtiendrons pour somme le nombre 12288, qui se compose des parties

$$3(10d)u,\quad u^2,\quad 3(10d)^2+3(10d)u+u^2,\quad u^2,$$

et par suite se trouve être égal à

$$3(10d)^2+6(10d)u+3u^2=3(10d+u)^2.$$

Ce nombre est donc égal à

$$3(60+4)^2=3.64^2,$$

ou au triple carré de la partie 64 trouvée à la racine.

En divisant 121642 d'abord par 12288, puis par 12288 plus 3 fois $64=192$, ou par 12480, nous trouvons le même quotient entier 9; donc 9 est le troisième chiffre de la racine.

Du deuxième reste 12164246 nous devons retrancher

$$3.640^2.9+3.640.9^2+9^3=(3.640^2+3.640.9+9^2)9.$$

Or, en écrivant deux zéros à la droite de 12288, qui est égal à 3.64^2, nous aurons formé le produit $3.640^2=1228800$. Sous ce nombre 1228800, porté sur la première ligne à la suite de 10800, nous écrivons le nombre $17280=640\times 3.9$, que nous calculons directement; et, sous celui-ci, nous mettrons le carré $81=9^2$. La somme des trois nombres superposés

1228800, 17280, 81 .

sera égale à

$$3.640^2+3.640.9+9^2.$$

En multipliant cette somme par 9, et en retranchant le produit directement de 12164246, nous obtiendrons le reste 948797, à côté duquel nous abaisserons la tranche suivante 864, après en avoir séparé les deux derniers chiffres par un point.

La partie à gauche du point, ou 9487978, devra être divisée par le triple carré de 649, pour fournir le chiffre suivant de la racine.

Or ce triple carré s'obtient de suite, en mettant le carré de 9 ou 81 sous 124616, et en faisant la somme des quatre derniers nombres ainsi écrits.

Cette somme sera $1263603=3.649^2$; en y ajoutant $1947=3.649$, que l'on calculera directement, on aura le second diviseur 1265550.

Divisant le nombre 9487978 par ces deux diviseurs, on obtient le même quotient entier 7, qui sera ainsi le quatrième chiffre de la racine.

Il sera facile de continuer l'opération, en suivant les calculs du tableau précédent.

8. Le calcul d'un chiffre de la racine sera d'autant plus certain, que le nombre des chiffres déjà obtenus à la racine sera plus considérable.

Car dès que la partie D trouvée à la racine sera égale ou supérieure à 10, on obtiendra le même chiffre au quotient, en divisant les centaines du reste correspondant suivi de la tranche suivante, d'abord par $3D^2$, en suite par $3D^2+3D$, ou du moins on obtient deux quotients, dont la différence est moindre qu' une unité.

Soit, en effet, R le nombre formé par les centaines du reste. Si nous désignons par Q et Q' les quotients complets que fournit la division de R d'abord par $3D^2$, puis par $3D^2+3D$, nous aurons

$$Q=\frac{R}{3D^2},\quad Q'=\frac{R}{3D^2+3D},$$

d'où il nous vient

$$Q-Q'=\frac{R}{3D^2}-\frac{R}{3D^2+3D},$$

ou

$$Q-Q'=\frac{R}{D(3D^2+3D)}=\frac{Q'}{D}.$$

Or le quotient Q' est évidemment moindre que 10; par suite, si D est égal ou supérieur à 10, la différence $Q-Q'$ sera moindre que 1.

9. Calcul des racines cubiques par des divisions successives. Pour effectuer cette opération, nous nous appuierons sur trois principes ou théorèmes, que nous allons établir.

Théorème I. Lorsqu'on a déterminé plus de la moitié des chiffres de la racine cubique d'un nombre entier, on obtient le nombre, approché par excès, formé par les autres chiffres de la racine, en divisant le reste suivi du premier tiers des chiffres à abaisser par le triple carré de la partie trouvé à la racine.

Reportons-nous à l'opération du n° 7.

Après avoir déterminé les trois premiers chiffres 649 de la racine cubique par la règle ordinaire, abaissons, à côté du reste 948797, le premier tiers 86 des chiffres suivants 864083 du nombre.

La racine totale pourra être considérée comme composée de 649 centaines et d'un certain nombre b d'unités, moindre que 100. Le nombre proposé renferme le cube de cette racine, ou

$$(64900+b)^3 = 64900^3+3.64900^2.b+3.64900.b^2+b^3.$$

La première partie 64900^3 a déjà été retranchée du nombre donné, de sorte que le reste 948797864083 renferme encore la somme des trois autres parties.

Or $3.64900^2.b$ ne peut être contenu que dans les unités de l'ordre $100^2 = 10000$ de ce reste, lesquelles renferment en outre les dizaines de mille des deux dernières parties. Donc, si l'on divise ces dizaines de mille 94879786 par le triple carré $3.649^2 = 1263603$ des centaines trouvées, on obtiendra les unités de la racine ou un nombre trop fort. Donc le quotient 75 exprime les autres chiffres de la racine, approchée par excès

948797864083		649.75	
94879786	1263603	64900	12636030000
6426976	75	3.75 = 225	14602500
108961		3245	5625
948797859375		1298	12650638125
4708		1298	75
		14602500	63253190625
		75	88554466875
		75	948797859375
		375	
		525	
		5625	

Pour vérifier les chiffres 75 obtenus au quotient, on met à la suite du diviseur 1263603 autant de zéros que l'on a négligé de chiffres dans la partie à abaisser; sous le résultat on écrit le triple produit 14602500 de la partie 64900 obtenue à la racine par 75, et au-dessous on met le carré 5625 de 75; la somme 12650638125 de ces trois nombres sera égale à

$$3.64900^2+3.64900.75+75^2.$$

En multipliant cette somme par 75, on forme la somme 948797859375 des trois dernières parties du cube de $(64900+75)$ ou de 64975, laquelle somme, n'étant pas supérieure au reste 948797864083, fait voir que le quotient 75 n'est pas trop fort. Donc le nombre 75 forme les deux derniers chiffres de la racine.

10. **Théorème II.** Lorsqu'on a déterminé plus de la moitié des chiffres de la racine cubique d'un nombre entier, on obtient le nombre, approché par défaut, formé par les autres chiffres de la racine, en divisant le reste suivi du premier tiers des chiffres à abaisser par trois fois le carré plus trois fois le nombre de la partie trouvée à la racine.

Reprenons l'exemple 274308246864083 du nº 7, et déterminons les trois premiers chiffres 649 de la racine cubique par la méthode ordinaire. Divisons ensuite le reste 948797 suivi du premier tiers 86 des chiffres restant à abaisser par $1263603+1947=1265550$, c'est-à-dire par le triple carré plus le triple de la partie 649 trouvée à la racine, ce qui donne le quotient 74. Je dis que le nombre des unités de la racine ne peut être inférieur à 74.

En effet, posons $649=a$, $74=b$. On prouve, comme au nº 5 que $(3.100a+b)b$ est inférieur à $3.10000a$; donc

$$3.100^2a^2b+3.100ab^2+b^3$$

est inférieur à

$$(3.10000a^2+3.10000a)b.$$

Or la partie 94879786 du reste R contient $(3a^2+3a)b$; donc 948797860000 et, surtout, le reste total 948797864083 contiennent

$$(3.10000a^2+3.10000a)b,$$

et, à plus forte raison

$$3.100^2a^2b+3.100ab^2+b^3,$$

c'est-à-dire les trois dernières parties de $(100a+b)^3$; donc le nombre b ou 74 n'est pas trop grand.

Si nous essayons 74, nous trouvons le reste 12665061659.

Calculons la différence $64975^3 - 64974^3$ ou

$$3.64974^2 + 3.64974 + 1 = \left\{ \begin{array}{l} 3.64900^2 + 6.64900.74 + 3.74^2 \\ + 3.64900 + 3.74 + 1, \end{array} \right.$$

et, pour cela, ajoutons ensemble les nombres

$12650443276 = 3.64900^2 + 3.64900.74 + 74^2$		déjà obtenu,
$14407800 =$	$3.64900.74$	déjà obtenu,
$10952 = 2.5476 = 2.74^2$		déjà calculé,
$194922 = 3.64900 + 3.74$		qui revient à
	3.64974	facilement calculable;

nous trouvons 12665056951 pour la différence cherchée. Ce nombre étant inférieur au reste, le quotient 74 est trop faible.

11. Théorème III. **Lorsqu'on a déterminé plus de la moitié des chiffres de la racine cubique d'un nombre, et que l'on divise par le triple carré de la partie trouvée tel quel, puis augmenté de cette partie, le reste correspondant suivi du premier tiers des chiffres à abaisser, on obtient deux quotients, qui ne peuvent différer de plus d'une unité du nombre formé par les autres chiffres de la racine.**

En effet, soient q et q' les quotients complets que l'on obtient, en divisant par $3a^2$ et $3a^2+3a$ le reste correspondant à la partie a trouvée à la racine, suivi du premier tiers des chiffres à abaisser, nombre que nous représenterons par b; nous avons

$$q - q' = \frac{b}{3a^2} - \frac{b}{3a^2+3a} = \frac{b}{3a^2+3a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{q'}{a}.$$

La partie a ayant n chiffres et la partie à trouver, laquelle n'est pas moindre que q', ayant moins de n chiffres, on a $q' < 10^{n-1}$ et par suite $\frac{q'}{a} < 1$; donc les quotients q et q' ne peuvent différer de plus d'une unité du nombre formé par les autres chiffres de la racine.

12. Supposons que l'on ait déterminé plus de la moitié des chiffres de la racine cubique d'un nombre entier. On sait (n° 9) que l'on pourra obtenir tous les autres chiffres de cette racine, en divisant le reste, suivi du premier tiers des chiffres à abaisser, par le triple carré de la partie trouvée à la racine.



On obtient ainsi le nombre, a p p r o c h é p a r e x c è s, qui est formé par les autres chiffres de la racine.

Si l'on avait divisé le même reste, suivi du premier tiers des chiffres à abaisser, par le triple carré de la partie trouvée à la racine, augmenté de trois fois la même partie, on aurait trouvé (n° 10) le nombre, a p p r o c h é p a r d é f a u t, qui est formé par les autres chiffres de la racine.

Dans ces deux divisions, on obtient des quotients, l'un par excès et l'autre par défaut, qui comprennent le nombre formé par les autres chiffres de la racine, et qui diffèrent de ce nombre, chacun de moins d'une unité (n° 11).

En combinant ces deux méthodes, on peut obtenir, avec une grande rapidité, la racine cubique d'un nombre très considérable.

13. Soit, par exemple, à extraire la racine cubique du nombre

274389357824326853420875439,

qui comprend neuf tranches de trois chiffres. La racine cubique aura neuf chiffres.

On calculera d'abord les trois premiers chiffres de la racine cubique par le procédé indiqué ci-dessus (n° 7); au moyen de ces trois chiffres, on obtiendra, par une simple division, les deux chiffres suivants.

Les cinq chiffres ainsi trouvés permettent de calculer, par une division, les quatre derniers chiffres.

L'opération peut d'ailleurs, être disposée comme ci-dessous :

```
274.389.357.824.326.853.420.875.439
 583.89
 122453.57
  102990882.4326
    1902642 division par 1263603
     639039 quotient = 81
    1746882 division par 1265550
     481332 quotient = 81
  1024796388141
     51124361858531.20875439
       45399752653  division par 12667591083
        73969794044 quotient = 4035
        10631838629
       45321775453  division par 12667786026
        73184173754 quotient = 4035
         9845243634
```

649.81.4035			
10800	1228800	12636030000	= 3.64900²
720	17280	15770700	= 3.64900.81
16	81	6561	= 81²
11536	1246161	12651807261	
16	81	6561	= 81²
12288	1263603	12667591083	
192	1947	194943	= 3.64981
12480	1265550	12667786026	

La racine cubique demandée est donc 649814035.

XXVII.

Ueber die Anzahl der unter einer gegebenen Grenze liegenden Primzahlen.

Von

K. E. Hoffmann.



Sind $p_1, p_2, \ldots,$ nach der Grösse geordnet, die in einer Zahl m nicht aufgehenden Primzahlen, so erhält man alle zu m relativen Primzahlen, indem man in dem Schema:

$$\begin{matrix} 1 & p_1 & p_1^2 & p_1^3 & \ldots \\ 1 & p_2 & p_2^2 & p_2^3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

aus jeder Horizontalreihe ein Element nimmt, die gewählten Elemente zu einem Product vereinigt und alle möglichen Producte dieser Art bildet; die Elemente je einer Horizontalreihe bilden eine unendliche geometrische Reihe, man kann deshalb die Summe aller zu m relativen Primzahlen als Product aus den Summen der einzelnen Reihen darstellen in der Form:

$$T\frac{1}{1-p},$$

wobei das Zeichen T sich auf alle in m nicht aufgehenden Primzahlen bezieht.

Unter den Summanden des entwickelten Productes T sind nun insbesondere diejenigen merkwürdig, welche $< m$ sind, und deren Anzahl in der Zahlentheorie mit $\varphi(m)$ bezeichnet wird; man hat, wenn $a, b, c \ldots k, l$ die in m aufgehenden Primzahlen sind:

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

(cf. Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind § 11.)

Unter den $\varphi(m)$ Zahlen, welche $< m$ und relativ prim zu m sind, mögen nun μ zusammengesetzte Zahlen sein; ausserdem sei die Anzahl aller unter m liegenden absoluten Primzahlen N und λ die Anzahl der in m aufgehenden Primzahlen $a, b, c \ldots k, l$, dann ist offenbar:

$$N = \varphi(m) - \mu + \lambda.$$

Die Aufsuchung der Zahl N führt dann wesentlich darauf hinaus, die Zahl μ zu bestimmen, da man, wenn m nicht eine sehr grosse absolute Primzahl ist oder sich aus grossen Factoren zusammensetzt, jederzeit mit Leichtigkeit $\varphi(m)$ und λ angeben kann.

Um nun die Zahl μ zu erhalten, denke man sich aus den P
zahlen $p_1, p_2, \ldots$ alle Combinationen mit Wiederholungen geb
so zwar, dass die Werte der erhaltenen Producte immer $< m$ ble
da es sich aber nur um die Anzahl der hier zulässigen Combinati
handelt, braucht man diese selbst nicht zu bilden.

Die Anzahl der Amben z. B. wird gefunden, indem man die
zwischen p_1 und $\left[\frac{m}{p_1}\right]$, p_2 und $\left[\frac{m}{p_2}\right]$, $\ldots$ p_s und $\left[\frac{m}{p_s}\right]$ liegenden Prim-
zahlen, diese selbst mitgerechnet, abzählt; auszunehmen sind natürlich
die in m aufgehenden Primzahlen $a, b, c \ldots k, l$; mit $\left[\frac{m}{p}\right]$ ist hier
die grösste in $m:p$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet; p_s bestimmt
sich aus der Bedingung: $\left[\frac{m}{p_s}\right] > p_s$ d. h. $p_s < \sqrt{m}$.

Um die Anzahl der Ternen zu erhalten, zählt man die zwischen
p_1 und $\left[\frac{m}{p_1^2}\right]$, p_2 und $\left[\frac{m}{p_1 p_2}\right]$, $\ldots$ p_s und $\left[\frac{m}{p_1 p_s}\right]$, p_2 und $\left[\frac{m}{p_2^2}\right]$, p_3 u. $\left[\frac{m}{p_2 p_3}\right]$ etc. liegenden Primzahlen (ausgenommen $a, b, c \ldots k, l$) ab;
die Divisoren von der Form $p_r p_s$ sind zu bilden, solange $\left[\frac{m}{p_r p_s}\right] > p_s$
d. h. $p_s < \sqrt{\frac{m}{p_r}}$ und diejenigen von der Form p_r^2, solange $\left[\frac{m}{p_r^2}\right] > p_r$
d. h. $p_r < \sqrt[3]{m}$ ist.

In derselben Weise geht man weiter.

Vorausgesetzt, dass m keine sehr grosse Zahl ist und gleichzeitig unter den p nicht viele kleine Primzahlen vorkommen, gelangt man durch das oben angegebene Verfahren sehr rasch zum Ziel, da man nur Divisionen und darauf folgende Abzählungen vorzunehmen hat, welche mit Hilfe der Primzahltafeln sehr leicht auszuführen sind.

Die grösste unter den p vorkommende Zahl ist die der $\left[\frac{m}{p_1}\right]$ unmittelbar vorausgehende Primzahl; je grösser also p_1 ist, um so weniger Primzahlen sind notwendig zur Bestimmung von N; z. B. für $m = 1000$ ist $p_1 = 3$; hier ist also die Kenntniss der zwischen 1 und 333 liegenden Primzahlen erforderlich; dagegen für $m = 1050$ ($p_1 = 11$) genügt die Kenntniss der zwischen 1 und 95 liegenden Primzahlen.

Geht $\left[\frac{m}{p_1}\right]$ über die Grenze einer dem Rechner gerade zugänglichen Primzahltafel hinaus, so kann man sich die Anzahl der unter $\left[\frac{m}{p_1}\right]$, $\left[\frac{m}{p_2}\right]$ etc. liegenden Primzahlen selbständig suchen, so dass man die Primzahlen nur bis zu jenem p_s zu kennen braucht, welches bei der Bildung der Amben aus der Bedingung $p_s < \sqrt{m}$ gefunden wurde. Man

kann also das Ergebniss der vorausgehenden Untersuchung folgendermassen aussprechen:

„Die Kenntniss der unter $\sqrt{m}$ liegenden Primzahlen genügt vollständig, um die Anzahl aller unter m liegenden Primzahlen in genauer Weise zu bestimmen."

In vielen Fällen kann man sich auch die Rechnung bedeutend vereinfachen, indem man statt der Zahl m eine bequemere in der Nähe von m liegende Zahl einführt, wobei man nur zu beachten hat, dass nicht eine Primzahl verloren geht, oder eine neue hinzukommt; so kann man z. B. statt $m = 4747$, bei welcher die zur Bildung der Amben erforderlichen Primzahlen wegen $p_1 = 2$ sich bis 2373 (resp. der zunächst vorausgehenden Primzahl) erstrecken, die Zahl $m = 4746$ nehmen, für welche wegen $p_1 = 5$ schon die zwischen 1 und 949 liegenden Primzahlen genügen, oder noch besser $m = 4740$, für welche wegen $p_1 = 7$ die unter 677 liegenden Primzahlen genügen.

In den folgenden Beispielen ist mit n die Anzahl, mit f die Form der einzelnen Combinationen bezeichnet.

Beispiel I. $m = 3000 = 2^3.3.5^3$; $p = 7, 11, 13, \ldots$

$\sqrt{3000} = 54, \ldots$; die Amben zu bilden bis $p_s = 53$;

$\sqrt[3]{3000} = 14, \ldots$; die Ternen bis $p_s = 13$;

$\sqrt[4]{3000} = 1, \ldots$; von den Quaternen hat man nur 7^4 zu nehmen. Man findet nun:

n	f	p	n	f	p	n	f	p
79	$7p$	$\geqq 7$	11	$37p$	$\geqq 37$	5	$7.13p$	>13
54	$11p$	$\geqq 11$	9	$41p$	$\geqq 41$	2	$7.17p$	>17
45	$13p$	$\geqq 13$	6	$43p$	$\geqq 43$	2	$11p^2$	$\geqq 11$
34	$17p$	$\geqq 17$	4	$47p$	$\geqq 47$	4	11^2p	>11
30	$19p$	$\geqq 19$	1	$53p$	$=53$	2	$11.13p$	>13
23	$23p$	$\geqq 23$	5	$7p^2$	$\geqq 7$	1	$13p^2$	$\geqq 13$
18	$29p$	$\geqq 29$	14	7^2p	>7	1	13^2p	>13
14	$31p$	$\geqq 31$	7	$7.11.p$	>11	1	$7p^3$	$=7$

$\mu = 372$

$$\varphi(3000) = 3000.\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{4}{5} = 800; \quad \mu = 372; \quad \lambda = 3;$$

folglich:

$$N = 800 - 372 + 3 = 431.$$

Beispiel II. $m = 30030 = 2.3.5.7.11.13;\quad p = 17, 19, 23, \ldots$

$\sqrt{30030} = 173, \ldots$; die Amben zu bilden bis $p_s = 173$;

$\sqrt[3]{30030} = 31, \ldots$; die Ternen bis $p_s = 31$;

$\sqrt[4]{30030} = 13, \ldots < 17$; Quaternen kommen nicht vor.

n	f	p	n	f	p	n	f	p
268	$17p$	$\geqq 17$	39	$97p$	$\geqq 97$	16	$17.19p$	>19
242	$19p$	$\geqq 19$	37	$101p$	$\geqq 101$	12	$17.23p$	>23
205	$23p$	$\geqq 23$	35	$103p$	$\geqq 103$	7	$17.29p$	>29
165	$29p$	$\geqq 29$	32	$107p$	$\geqq 107$	5	$17.31p$	>31
153	$31p$	$\geqq 31$	30	$109p$	$\geqq 109$	3	$17.37p$	>37
130	$37p$	$\geqq 37$	27	$113p$	$\geqq 113$	1	$17.41p$	>41
117	$41p$	$\geqq 41$	21	$127p$	$\geqq 127$	5	$19p^2$	$\geqq 19$
112	$43p$	$\geqq 43$	19	$131p$	$\geqq 131$	15	19^2p	>19
101	$47p$	$\geqq 47$	15	$137p$	$\geqq 137$	10	$19.23p$	>23
88	$53p$	$\geqq 53$	14	$139p$	$\geqq 139$	6	$19.29p$	>29
80	$59p$	$\geqq 59$	12	$149p$	$\geqq 149$	4	$19.31p$	>31
77	$61p$	$\geqq 61$	10	$151p$	$\geqq 151$	1	$19.37p$	>37
68	$67p$	$\geqq 67$	7	$157p$	$\geqq 157$	3	$23p^2$	$\geqq 23$
63	$71p$	$\geqq 71$	5	$163p$	$\geqq 163$	7	23^2p	>23
60	$73p$	$\geqq 73$	3	$167p$	$\geqq 167$	4	$23.29p$	>29
54	$79p$	$\geqq 79$	1	$173p$	$\geqq 173$	2	$23.31p$	>31
50	$83p$	$\geqq 83$	7	$17p^2$	$\geqq 17$	2	$29p^2$	$\geqq 29$
45	89	$\geqq 89$	20	17^2p	>17	1	29^2p	>29
						1	$31p^2$	$=31$
							$\mu = 2517$	

$$\varphi(30030) = 30030.\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{6}{7}.\tfrac{10}{11}.\tfrac{12}{13} = 5760;$$

$$\mu = 2517;\quad \lambda = 6;$$

$$N = 5760 - 2517 + 6 = 3249.$$

Zweibrücken, 22. August 1879.

XXVIII.

Ueber Newton's erste Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte*).

Von

Johann August Grunert.

In seinem unsterblichen Werke: Philosophiae naturalis Principia mathematica. Lib. I. Sect. V. (De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur.). Propositio XXII. Problema XIV. Trajectoriam per data quinque puncta describere. Tom. I. pag. 207.**), dessen Studium für einen Jeden, der mit wahrem Sinn für mathematische Strenge und insbesondere für mathematische Untersuchungen nach der Methode der reinen Geometrie an dieses Studium herantritt, auch jetzt noch einen eigentümlichen Reiz hat, und namentlich auch — wenigstens in einzelnen Partieen — jüngeren Mathematikern und mathematischen Physikern in jeder Beziehung sehr zu empfehlen ist, hat Newton zwei Methoden zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene

*) Diese Arbeit war vom Herausgeber, wie aus einer Bemerkung von ihm hervorgeht, zur Veröffentlichung im Archiv bestimmt; desgl. einige, die noch folgen sollen. D. Red.

**) Ich bediene mich der folgenden mit einem wertvollen sehr ausführlichen Commentar und anderen wichtigen Zusätzen versehenen Ausgabe: Philosophiae naturalis Principia mathematica. Auctore Isaaco Newtono, Eq. aurato. Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio PP. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier, ex Gallicanâ Minimorum Familiâ, Matheseos Professorum. Genevae 4°. Tom. I. MDCCXXXIX. Tom. II. MDCCXL. Tom. III. MDCCXLII.

Punkte entwickelt. Die zweite dieser beiden Methoden, welche man eine organische Beschreibung nennen kann, findet sich in mehreren neueren Schriften*). Weit weniger bekannt scheint dagegen Newton's erste Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte zu sein, die ich für ganz besonders schön und der weiteren Bekanntwerdung ganz besonders wert halte. Der vorliegende Aufsatz soll daher der Entwickelung dieser schönen Methode gewidmet sein, womit ich aber noch den besonderen Zweck verbinde, eine weitere Anwendung des trimetrischen Coordinatensystems zu zeigen. Alles, was zum Verständniss des Folgenden über das trimetrische Coordinatensystem im Allgemeinen zu wissen nötig ist, findet man vollständig und mit völliger Allgemeinheit entwickelt in meiner Abhandlung: Das System der Dreilinien-Coordinaten in allgemeiner analytischer Entwickelung. in diesem Archiv. T. XXXVIII. Nr. XXXVI. 389., auf welche ich daher hier ein für alle Mal verweise, und auf welche sich alle im Folgenden vorkommenden Zurückweisungen, wenn dieselben mit a. a. O. bezeichnet sind, beziehen. Auch wegen der im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen hat man überall die genannte Abhandlung zu vergleichen.

Des grossen Newton erste Methode zur Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte kommt ganz auf den folgenden Satz zurück und ist in demselben eigentlich schon vollständig ausgesprochen, wobei Fig. 1. zur Erläuterung dient:

Es seien

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5$$

fünf Punkte. Durch die Punkte A^1, A^2 und A^2, A^3 lege man die beiden Geraden A^1A^2 und A^2A^3. Hierauf lege man durch den Punkt A^4 zwei den Geraden A^1A^2 und A^2A^3 parallele Gerade, welche wir beziehungsweise durch $A_1{}^1A_1{}^2$ und $A_1{}^2A_1{}^3$ bezeichnen wollen. Die Gerade $A_1{}^1A_1{}^2$ werde von der Geraden A^1A^5 in B^1, die Gerade $A_1{}^2A_1{}^3$ werde von der Geraden A^3A^5 in B^3 geschnitten. Zieht man nun eine beliebige der Geraden B^1B^3 parallele Gerade, welche die Gerade $A_1{}^1A_1{}^2$ in $B_1{}^1$, die Gerade $A_1{}^2A_1{}^3$

*) M. s. z. B. Analytische Geometrie der Kegelschnitte von G. Salmon. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. Leipzig. 1860. S. 480. Auch s. m. meine Abhandlung: Ueber die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte in T. XXIV. Nr. XXV. S. 330.

B_1^3 schneidet, und zieht endlich die Geraden $A^1B_1^1$ und $A^3B_1^3$, welche sich in dem Punkte A^6 schneiden mögen: so liegen die sechs Punkte

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5,\ A^6$$

derzeit in einem Kegelschnitte.

Um nun den Beweis dieses sehr merkwürdigen Satzes auf das trimetrische Coordinatensystem zu gründen, wollen wir das durch die drei Punkte A^1, A^2, A^3 bestimmte Dreieck $A^1A^2A^3$ als Fundamentaldreieck (triangle of reference) dieses Systems, und die Geraden A^1A^2, A^2A^3, A^3A^1 beziehungsweise als die 1ste, 2te, 3te Axe dieses Systems annehmen.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir die trimetrischen Coordinaten

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5$$

beziehungsweise auf folgende Art bezeichnen:

$$\begin{array}{ccc} 0, & p_1^1, & 0; \\ 0, & 0, & p_2^2; \\ p_0^3, & 0, & 0; \\ p_0^4, & p_1^4, & p_2^4; \\ p_0^5, & p_1^5, & p_2^5. \end{array}$$

Die Gleichung der durch die Punkte A^1, A^2 gehenden Geraden A^1A^2 ist (a. a. O. §. 6.):

$$p_0 = 0.$$

Die Gleichung der durch die Punkte A^2, A^3 gehenden Geraden A^2A^3 ist:

$$p_1 = 0.$$

Die Gleichung der durch A^4 mit A^1A^2 parallel gezogenen Geraden $A_1^1A_1^2$ ist (a. a. O. §. 9.):

$$p_0 - p_0^4 = 0 \text{ oder } p_0 = p_0^4.$$

Auch ist diese Gleichung, wie a. a. O. gezeigt worden ist:

$$(J - p_0^4 \sin w_{12})p_0 - p_0^4 \sin w_{20} . p_1 - p_0^4 \sin w_{01} . p_2 = 0,$$

folglich, weil bekanntlich

$$J = p_0^4 \sin w_{12} + p_1^4 \sin w_{20} + p_2^4 \sin w_{01}$$

ist:

$$(p_1^4 \sin w_{20} + p_2^4 \sin w_{01})p_0 - p_0^4 \sin w_{20} . p_1 - p_0^4 \sin w_{01} . p_2 = 0$$

oder:

B^1B^3 parallele Gerade, so ist die Gleichung dieser parallelen Gerade (a. a. O. §. 9.):

$$\left.\begin{array}{l}(p_0{}^5-p_0{}^4)p_1{}^4p_2{}^5\sin w_{12}.(p_0-\overline{\omega}_0)\\+(p_1{}^5-p_1{}^4)p_0{}^4p_2{}^5\sin w_{20}.(p_1-\overline{\omega}_1)\\-\{p_1{}^5(p_2{}^4p_0{}^5-p_0{}^4p_2{}^5)-p_1{}^4p_2{}^5(p_0{}^5-p_0{}^4)\}\sin w_{01}.(p_2-\overline{\omega}_2)\end{array}\right\}=0,$$

oder, wenn wir diese Gleichung durch $p_0{}^4p_1{}^4p_2{}^5$ dividiren und der Kürze wegen

$$\lambda_0=\frac{p_0{}^5}{p_0{}^4},\quad \lambda_1=\frac{p_1{}^5}{p_1{}^4},\quad \lambda_2=\frac{p_2{}^5}{p_2{}^4}$$

setzen:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_0-1)\sin w_{12}.(p_0-\overline{\omega}_0)+(\lambda_1-1)\sin w_{20}.(p_1-\overline{\omega}_1)\\-\left\{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)-(\lambda_1-1)\right\}\sin w_{01}.(p_2-\overline{\omega}_2)\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_0-1)\sin w_{12}.(p_0-\overline{\omega}_0)+(\lambda_1-1)\sin w_{20}.(p_1-\overline{\omega}_1)\\-\left\{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)-(\lambda_0-1)\right\}\sin w_{01}.(p_2-\overline{\omega}_2)\end{array}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_0-1)\sin w_{12}.(p_0-\overline{\omega}_0)+(\lambda_1-1)\sin w_{20}.(p_1-\overline{\omega}_1)\\-\left\{(\lambda_0-1)(\lambda_1-1)+\lambda_0\lambda_1\left(\frac{1}{\lambda_2}-1\right)\right\}\sin w_{01}.(p_2-\overline{\omega}_2)\end{array}\right\}=0.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Durchschnittspunkts $B_1{}^1$ der durch den Punkt $(\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2)$ der Geraden B^1B^3 parallel gelegten Geraden mit der Geraden $A_1{}^1A_1{}^2$ durch

$$\Pi_0{}^1,\ \Pi_1{}^1,\ \Pi_2{}^1;$$

so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten nach dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$\Pi_0{}^1-\overline{\omega}_0=p_0{}^4-\overline{\omega}_0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_0-1)\sin w_{12}.(\Pi_0{}^1-\overline{\omega}_0)+(\lambda_1-1)\sin w_{20}.(\Pi_1{}^1-\overline{\omega}_1)\\-\left\{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)-(\lambda_1-1)\right\}\sin w_{01}.(\Pi_2{}^1-\overline{\omega}_2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\sin w_{12}.(\Pi_0{}^1-\overline{\omega}_0)+\sin w_{20}.(\Pi_1{}^1-\overline{\omega}_1)+\sin w_{01}.(\Pi_2{}^1-\overline{\omega}_2)=0,$$

und erhalten hieraus mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination:

$$\Pi_0{}^1-\overline{\omega}_0=p_0{}^4-\overline{\omega}_0,$$

$$\Pi_1{}^1-\overline{\omega}_1=-\frac{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{12}}{\sin w_{20}}\cdot(p_0{}^4-\overline{\omega}_0),$$

$$\Pi_2{}^1-\overline{\omega}_2=\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{12}}{\sin w_{01}}\cdot(p_0{}^4-\overline{\omega}_0).$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten des Durchschnittspunkts $B_1{}^3$ der durch den Punkt $(\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2)$ der Geraden B^1B^3 parallel gelegten Geraden mit der Geraden $A_1{}^2A_1{}^3$ durch

$$\Pi_0{}^3,\ \Pi_1{}^3,\ \Pi_2{}^3;$$

so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten nach dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$\Pi_1{}^3-\overline{\omega}_1=p_1{}^4-\overline{\omega}_1,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_0-1)\sin w_{12}.(\Pi_0{}^3-\overline{\omega}_0)+(\lambda_1-1)\sin w_{20}.(\Pi_1{}^3-\overline{\omega}_1)\\ -\left\{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)-(\lambda_1-1)\right\}\sin w_{01}.(\Pi_2{}^3-\overline{\omega}_0)\end{array}\right\}=0,$$

$$\sin w_{12}.(\Pi_0{}^3-\overline{\omega}_0)+\sin w_{20}.(\Pi_1{}^3-\overline{\omega}_1)+\sin w_{01}.(\Pi_2{}^3-\overline{\omega}_2)=0;$$

und erhalten hieraus wiederum mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination:

$$\Pi_0{}^3-\overline{\omega}_0=-\frac{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{20}}{\sin w_{12}}\cdot(p_1{}^4-\overline{\omega}_1),$$

$$\Pi_1{}^3-\overline{\omega}_1=p_1{}^4-\overline{\omega}_1\quad\text{oder}\quad\Pi_1{}^3=p_1{}^4,$$

$$\Pi_2{}^3-\overline{\omega}_2=-\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{20}}{\sin w_{01}}\cdot(p_1{}^4-\overline{\omega}_1).$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, wollen wir jetzt den Punkt $(\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2)$, wodurch der Allgemeinheit kein Eintrag geschieht, in den Durchschnittspunkt der Parallelen mit B^1B^3 mit der Geraden $A_1{}^1A_1{}^2$ verlegen; dann ist:

$$\overline{\omega}_0=p_0{}^4,\quad\overline{\omega}_1=\overline{\omega}_1,\quad\overline{\omega}_2=\overline{\omega}_2$$

zu setzen, und wir haben also nach dem Vorhergehenden die Formeln:

$$\Pi_0{}^1=p_0{}^4,\quad\Pi_1{}^1=\overline{\omega}_1,\quad\Pi_2{}^1=\overline{\omega}_2$$

$$\Pi_0{}^3 - p_0{}^4 = -\frac{\lambda_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{20}}{\sin w_{12}}\cdot(p_1{}^4-\overline{\omega}_1),$$

$$\Pi_1{}^3 - \overline{\omega}_1 = \quad p_1{}^4 - \overline{\omega}_1 \quad \text{oder} \quad \Pi_1{}^3 = p_1{}^4,$$

$$\Pi_2{}^3 - \overline{\omega}_2 = -\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{20}}{\sin w_{01}}\cdot(p_1{}^4-\overline{\omega}_1).$$

Die Gleichungen der durch die Punkte $A^1(0, p_1{}^1, 0)$, $B_1{}^1(\Pi_0{}^1\Pi_1{}^1\Pi_2{}^1)$ und $A^3(p_0{}^3, 0, 0)$, $B_1{}^3(\Pi_0{}^3\Pi_1{}^3\Pi_2{}^3)$ bestimmten Geraden $A^1B_1{}^1$ und $A^3B_1{}^3$ sind beziehungsweise (a. a. O. §. 6.):

$$\Pi_2{}^1 p_0 - \Pi_0{}^1 p_2 = 0 \quad \text{und} \quad \Pi_2{}^3 p_1 - \Pi_1{}^3 p_2 = 0;$$

und bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts A^6 der Geraden $A^1B_1{}^1$ und $A^3B_1{}^3$ durch $p_0{}^6$, $p_1{}^6$, $p_2{}^6$; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\Pi_2{}^1 p_0{}^6 - \Pi_0{}^1 p_2{}^6 = 0,$$
$$\Pi_2{}^3 p_1{}^6 - \Pi_1{}^3 p_2{}^6 = 0,$$
$$\sin w_{12}\,.\,p_0{}^6 + \sin w_{20}\,.\,p_1{}^6 + \sin w_{01}\,.\,p_2{}^6 = J;$$

und erhalten aus der ersten:

$$\frac{p_0{}^6}{p_2{}^6} = \frac{\Pi_0{}^1}{\Pi_2{}^1} = \frac{p_0{}^4}{\overline{\omega}_2},$$

und aus der zweiten:

$$\frac{p_1{}^6}{p_2{}^6} = \frac{\Pi_1{}^3}{\Pi_2{}^3} = \frac{p_1{}^4}{\overline{\omega}_2 - \frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{\sin w_{20}}{\sin w_{01}}\cdot(p_1{}^4-\overline{\omega}_1)},$$

also, weil

$$(p_0{}^4-\overline{\omega}_0)\sin w_{12} + (p_1{}^4-\overline{\omega}_1)\sin w_{20} + (p_2{}^4-\overline{\omega}_2)\sin w_{01} = 0,$$

folglich nach dem Obigen

$$(p_1{}^4-\overline{\omega}_1)\sin w_{20} = -(p_2{}^4-\overline{\omega}_2)\sin w_{01}$$

ist:

$$\frac{p_1{}^6}{p_2{}^6} = \frac{p_1{}^4}{\overline{\omega}_2 + \frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot(p_2{}^4-\overline{\omega}_2)},$$

also:

$$\frac{p_1^6}{p_2^6}=\frac{p_1^4}{\dfrac{\lambda_0\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\overline{\omega}_2+\dfrac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}p_2^4}.$$

Bemerken wir nun, dass

$$\frac{p_0^6}{p_1^6}=\frac{p_0^6}{p_2^6}:\frac{p_1^6}{p_2^6}$$

ist, so erhalten wir sogleich:

$$\frac{p_0^6}{p_1^6}=\frac{p_0^4}{p_1^4}\left\{\frac{\lambda_0\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}+\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\cdot\frac{p_2^4}{\overline{\omega}_2}\right\}.$$

Wir haben also jetzt, wenn wir der Kürze wegen

$$\Omega=\frac{p_2^4}{\overline{\omega}_2}$$

setzen, die folgenden Formeln:

$$\frac{p_0^6}{p_1^6}=\frac{p_0^4}{p_1^4}\left\{\frac{\lambda_0\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}+\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\Omega\right\},$$

$$\frac{p_1^6}{p_2^6}=\frac{\dfrac{p_1^4}{\overline{\omega}_2}}{\dfrac{\lambda_0\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}+\dfrac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}-1\right)}\Omega},$$

$$\frac{p_2^6}{p_0^6}=\frac{1}{\dfrac{p_0^4}{\overline{\omega}_2}};$$

oder:

$$\frac{p_0^6}{p_1^6}=\frac{p_0^4}{p_1^4}\left\{\frac{\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_0-\lambda_2)}+\frac{\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_0-\lambda_2)}\Omega\right\},$$

$$\frac{p_1^6}{p_2^6}=\frac{\dfrac{p_1^4}{\overline{\omega}_2}}{\dfrac{\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_0-\lambda_2)}+\dfrac{\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_0-\lambda_2)}\Omega},$$

$$\frac{p_2{}^6}{p_0{}^6} = \frac{1}{\frac{p_0{}^4}{\overline{\omega}_2}}.$$

Die Bedingungsgleichung nun, dass die sechs Punkte

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5,\ A^6,$$

deren Coordinaten in Bezug auf das Fundamentaldreieck $A^1A^2A^3$ beziehungsweise die folgenden sind:

$$\begin{array}{ccc} 0, & p_1{}^1, & 0; \\ 0, & 0, & p_2{}^2; \\ p_0{}^3, & 0, & 0; \\ p_0{}^4, & p_1{}^4, & p_2{}^4; \\ p_0{}^5, & p_1{}^5, & p_2{}^5; \\ p_0{}^6, & p_1{}^6, & p_2{}^6; \end{array}$$

in einem Kegelschnitte liegen, ist, wie ich in der Abhandlung T. LI. H. 3., wo aber, was man nicht unbeachtet zu lassen hat, das Dreieck $A^4A^5A^6$ das Fundamentaldreieck war, gezeigt habe, die folgende:

$$\left.\begin{array}{r} p_0{}^4p_1{}^4(p_1{}^5p_2{}^5 \cdot p_2{}^6p_0{}^6 - p_2{}^5p_0{}^5 \cdot p_1{}^6p_2{}^6) \\ + p_1{}^4p_2{}^4(p_2{}^5p_0{}^5 \cdot p_0{}^6p_1{}^6 - p_0{}^5p_1{}^5 \cdot p_2{}^6p_0{}^6) \\ + p_2{}^4p_0{}^4(p_0{}^5p_1{}^5 \cdot p_1{}^6p_2{}^6 - p_1{}^5p_2{}^5 \cdot p_0{}^6p_1{}^6) \end{array}\right\} = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch

$$p_0{}^4p_0{}^4p_1{}^4p_1{}^4p_2{}^4p_2{}^4$$

dividirt, die folgende:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1\lambda_2\frac{p_0{}^6}{p_0{}^4}\left(\frac{p_2{}^6}{p_2{}^4} - \frac{p_1{}^6}{p_1{}^4}\right) \\ + \lambda_2\lambda_0\frac{p_1{}^6}{p_1{}^4}\left(\frac{p_0{}^6}{p_0{}^4} - \frac{p_2{}^6}{p_2{}^4}\right) \\ + \lambda_0\lambda_1\frac{p_2{}^6}{p_2{}^4}\left(\frac{p_1{}^6}{p_1{}^4} - \frac{p_0{}^6}{p_0{}^4}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Setzen wir der Kürze wegen im Obigen:

$$M = \frac{\lambda_0(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_0 - \lambda_2)}, \quad N = \frac{\lambda_2(\lambda_0 - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_0 - \lambda_2)}$$

und

$$L = M + N\Omega;$$

so ist nach den obigen Formeln:

$$\frac{p_0^6}{p_1^6}=\frac{p_0^4}{p_1^4}L,\quad \frac{p_1^6}{p_2^6}=\frac{p_1^4}{\omega_2}\cdot\frac{1}{L},\quad \frac{p_2^6}{p_0^6}=1:\frac{p_0^4}{\omega_2};$$

also:

$$\frac{p_0^6}{p_0^4}=\frac{p_1^6}{p_1^4}L,\quad \frac{p_1^6}{p_1^4}=\frac{p_2^6}{\omega_2}\cdot\frac{1}{L}=\frac{p_2^6}{p_2^4}\cdot\frac{\Omega}{L}$$

und hieraus:

$$\frac{p_2^6}{p_2^4}=\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}.$$

Also ist die obige Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1\lambda_2\frac{p_1^6}{p_1^4}L\left(\frac{p_2^6}{p_2^4}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\right)\\ +\lambda_2\lambda_0\frac{p_1^6}{p_1^4}\left(\frac{p_0^6}{p_0^4}-\frac{p_2^6}{p_2^4}\right)\\ +\lambda_0\lambda_1\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}-\frac{p_0^6}{p_0^4}\right)\end{array}\right\}=0,$$

folglich:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1\lambda_2\left(\frac{p_2^6}{p_2^4}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\right)\\ +\lambda_2\lambda_0\left(\frac{p_0^6}{p_0^4}-\frac{p_2^6}{p_2^4}\right)\cdot\frac{1}{L}\\ +\lambda_0\lambda_1\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}-\frac{p_0^6}{p_0^4}\right)\cdot\frac{1}{\Omega}\end{array}\right\}=0,$$

und hieraus ferner:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1\lambda_2\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\right)\\ +\lambda_2\lambda_0\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot L-\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}\right)\cdot\frac{1}{L}\\ +\lambda_0\lambda_1\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot L\right)\cdot\frac{1}{\Omega}\end{array}\right\}=0,$$

also:

$$\lambda_1\lambda_2\left(\frac{L}{\Omega}-1\right)+\lambda_2\lambda_0\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)+\lambda_0\lambda_1\frac{1-L}{\Omega}=0,$$

oder:

$$\lambda_1\lambda_2(L-\Omega)-\lambda_2\lambda_0(1-\Omega)+\lambda_0\lambda_1(1-L)=0,$$

folglich:

$$\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)L+\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)\Omega+\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)=0,$$

setzt man nun

$$L=M+N\Omega,$$

$$\frac{p_2{}^6}{p_0{}^6} = \frac{1}{\frac{p_0{}^4}{\bar{\omega}_2}}.$$

Die Bedingungsgleichung nun, dass die sechs Punkte

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5,\ A^6,$$

deren Coordinaten in Bezug auf das Fundamentaldreieck $A^1A^2A^3$ beziehungsweise die folgenden sind:

$$\begin{array}{ccc}
0, & p_1{}^1, & 0; \\
0, & 0, & p_2{}^2; \\
p_0{}^3, & 0, & 0; \\
p_0{}^4, & p_1{}^4, & p_2{}^4; \\
p_0{}^5, & p_1{}^5, & p_2{}^5; \\
p_0{}^6, & p_1{}^6, & p_2{}^6;
\end{array}$$

in einem Kegelschnitte liegen, ist, wie ich in der Abhandlung T. LI. II. 3., wo aber, was man nicht unbeachtet zu lassen hat, das Dreieck $A^4A^5A^6$ das Fundamentaldreieck war, gezeigt habe, die folgende:

$$\left.\begin{array}{r}
p_0{}^4p_1{}^4(p_1{}^5p_2{}^5\cdot p_2{}^6p_0{}^6 - p_2{}^5p_0{}^5\cdot p_1{}^6p_2{}^6) \\
+p_1{}^4p_2{}^4(p_2{}^5p_0{}^5\cdot p_0{}^6p_1{}^6 - p_0{}^5p_1{}^5\cdot p_2{}^6p_0{}^6) \\
+p_2{}^4p_0{}^4(p_0{}^5p_1{}^5\cdot p_1{}^6p_2{}^6 - p_1{}^5p_2{}^5\cdot p_0{}^6p_1{}^6)
\end{array}\right\} = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch

$$p_0{}^4p_0{}^4p_1{}^4p_1{}^4p_2{}^4p_2{}^4$$

dividirt, die folgende:

$$\left.\begin{array}{r}
\lambda_1\lambda_2\dfrac{p_0{}^6}{p_0{}^4}\left(\dfrac{p_2{}^6}{p_2{}^4} - \dfrac{p_1{}^6}{p_1{}^4}\right) \\
+\lambda_2\lambda_0\dfrac{p_1{}^6}{p_1{}^4}\left(\dfrac{p_0{}^6}{p_0{}^4} - \dfrac{p_2{}^6}{p_2{}^4}\right) \\
+\lambda_0\lambda_1\dfrac{p_2{}^6}{p_2{}^4}\left(\dfrac{p_1{}^6}{p_1{}^4} - \dfrac{p_0{}^6}{p_0{}^4}\right)
\end{array}\right\} = 0.$$

Setzen wir der Kürze wegen im Obigen:

$$M = \frac{\lambda_0(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_0 - \lambda_2)}, \qquad N = \frac{\lambda_2(\lambda_0 - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_0 - \lambda_2)}$$

und

$$L = M + N\Omega;$$

so ist nach den obigen Formeln:

$$\frac{p_0^6}{p_1^6}=\frac{p_0^4}{p_1^4}L,\quad \frac{p_1^6}{p_2^6}=\frac{p_1^4}{\overline{\omega}_2}\cdot\frac{1}{L},\quad \frac{p_2^6}{p_0^6}=1:\frac{p_0^4}{\overline{\omega}_2};$$

also:

$$\frac{p_0^6}{p_0^4}=\frac{p_1^6}{p_1^4}L,\quad \frac{p_1^6}{p_1^4}=\frac{p_2^6}{\overline{\omega}_2}\cdot\frac{1}{L}=\frac{p_2^6}{p_2^4}\cdot\frac{\Omega}{L}$$

und hieraus:

$$\frac{p_2^6}{p_2^4}=\frac{p_1^6}{p_1^4}\,\frac{L}{\Omega}.$$

Also ist die obige Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1\lambda_2\frac{p_1^6}{p_1^4}L\left(\frac{p_2^6}{p_2^4}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\right)\\
+\lambda_2\lambda_0\frac{p_1^6}{p_1^4}\left(\frac{p_0^6}{p_0^4}-\frac{p_2^6}{p_2^4}\right)\\
+\lambda_0\lambda_1\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}-\frac{p_0^6}{p_0^4}\right)
\end{array}\right\}=0,$$

folglich:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1\lambda_2\left(\frac{p_2^6}{p_2^4}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\right)\\
+\lambda_2\lambda_0\left(\frac{p_0^6}{p_0^4}-\frac{p_2^6}{p_2^4}\right)\cdot\frac{1}{L}\\
+\lambda_0\lambda_1\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}-\frac{p_0^6}{p_0^4}\right)\cdot\frac{1}{\Omega}
\end{array}\right\}=0,$$

und hieraus ferner:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1\lambda_2\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\right)\\
+\lambda_2\lambda_0\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot L-\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot\frac{L}{\Omega}\right)\cdot\frac{1}{L}\\
+\lambda_0\lambda_1\left(\frac{p_1^6}{p_1^4}-\frac{p_1^6}{p_1^4}\cdot L\right)\cdot\frac{1}{\Omega}
\end{array}\right\}=0,$$

also:

$$\lambda_1\lambda_2\left(\frac{L}{\Omega}-1\right)+\lambda_2\lambda_0\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)+\lambda_0\lambda_1\frac{1-L}{\Omega}=0,$$

oder:

$$\lambda_1\lambda_2(L-\Omega)-\lambda_2\lambda_0(1-\Omega)+\lambda_0\lambda_1(1-L)=0,$$

folglich:

$$\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)L+\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)\Omega+\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)=0,$$

und setzt man nun

$$L=M+N\Omega,$$

so wird diese Gleichung:

$$\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)M+\{\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)+\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)N\}\Omega=0.$$

Für

$$F=\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2),\quad G=\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1),\quad H=\lambda_1(\lambda_0-\lambda_2)$$

ist aber nach dem Obigen:

$$M=\frac{F}{H},\qquad N=\frac{G}{H};$$

und daher die vorstehende Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)F+\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)H\\+\{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)G+\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)H\}\Omega\end{array}\right\}=0.$$

Auf der Stelle übersieht man aber, dass

$$\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)F+\lambda_0(\lambda_1-\lambda_2)H=0,$$
$$\lambda_1(\lambda_2-\lambda_0)G+\lambda_2(\lambda_0-\lambda_1)H=0;$$

und daher die vorstehende Gleichung, also die Bedingungsgleichung, dass die sechs Punkte

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5,\ A^6$$

in einem Kegelschnitte liegen, für jedes Ω, folglich für jede mit der Geraden B^1B^3 parallel gezogene Gerade $B_1{}^1B_1{}^3$ erfüllt ist.

Hiermit ist aber das merkwürdige Newton'sche Theorem, um welches es sich hier handelt, vollständig und in völliger Allgemeinheit bewiesen.

Wie man sich dieses Theorems zu bedienen hat, um beliebig viele Punkte des zu beschreibenden Kegelschnitts zu bestimmen, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

In einem besonderen Scholium fügt Newton noch eine von der aus seinem Theorem unmittelbar sich ergebenden Construction etwas verschiedene Construction des im Vorhergehenden durch A^6 bezeichneten Punktes bei, die er für einfacher hält als jene*).

Nachdem man nämlich die Gerade B^1B^3 auf die aus dem Obigen bekannte Weise gezogen hat, ziehe man die Linie A^1A^4, und bestimme auf derselben den Punkt C so, dass

$$A^1C:A^1A^4=A^4B^3:A^4B^1$$

ist. Dann ziehe man durch den Punkt C eine unbestimmt lange

---

*) Er sagt: „Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo etc. etc."

Parallele mit A^1A^2 oder $A_1{}^1A_1{}^2$, welche für das Folgende als eine feste Gerade zu betrachten ist. Nehmen wir nun an, dass diese Parallele die Gerade $A^1B_1{}^1$ in dem Punkte D schneidet, so haben wir die folgenden Proportionen:

$$A^1C:A^1A^4 = A^4B^3:A^4B^1,$$
$$A^1C:A^1A^4 = CD:A^4B_1{}^1;$$

also:

$$A^4B^3:A^4B^1 = CD:A^4B_1{}^1.$$

Nun ist aber:

$$A^4B^3:A^4B^1 = A^4B_1{}^3:A^4B_1{}^1,$$

also:

$$CD:A^4B_1{}^1 = A^4B_1{}^3:A^4B_1{}^1,$$

folglich:

$$CD = A^4B_1{}^3.$$

Man kann also den Punkt A^6 auch auf folgende Art bestimmen.

Nachdem man A^1A^4 gezogen, und auf dieser Geraden den Punkt C auf die obige Weise bestimmt hat, lege man durch diesen Punkt eine unbestimmt lange Parallele mit A^1A^2 oder $A_1{}^1A_1{}^2$, nehme in der Geraden $A_1{}^2A_1{}^3$ einen beliebigen Punkt $B_1{}^3$ an, schneide auf der in Rede stehenden Parallele $CD = A^4B_1{}^3$ ab, und ziehe die Geraden A^1D und $A^3B_1{}^3$, so ist deren Durchschnittspunkt der Punkt A^6.

Da der Punkt $B_1{}^3$ auf $A_1{}^2A_1{}^3$ beliebig angenommen worden ist, so kann man auf diese Weise beliebig viele Punkte A^6 des zu beschreibenden Kegelschnitts bestimmen.

Newton sagt am Schluss: „Hâc methodo puncta trajectoriae inveniuntur expeditissime, nisi mavis curvam, ut in constructione secunda *), describere mechanice".

*) Er meint damit die organische Beschreibung, von der oben die Rede gewesen ist.

XXIX.

Question sur les nombres.

Par

Georges Dostor.

Trouver $2n+1$ nombres entiers consécutifs, tels que la somme des carrés des $n+1$ premiers de ces nombres soit égale à la somme des carrés des n nombres suivants.

Appelons x le nombre du milieu de cette suite. Les n nombres, qui précèdent x, seront

$$x-n,\quad x-n+1,\quad \ldots,\quad x-2,\quad x-1;$$

et les n nombres, qui suivant x, seront

$$x+1,\quad x+2,\quad \ldots,\quad x+n-1,\quad x+n.$$

Nous avons donc l'équation

$$\begin{aligned}&(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2\\ &=(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)^2.\end{aligned}$$

Cette équation donne

$$\begin{aligned}x^2&=[(x+1)^2-(x-1)^2]+[(x+2)^2-(x-2)^2]\\ &+\ldots+[(x+n-1)^2-(x-n+1)^2]+[(x+n)^2-(x-n)^2].\end{aligned}$$

Transformant les différences de carrés en produits, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}x^2&=2x.2+2x.4+\ldots+2x.2(n-1)+2x.2n\\ &=4x[1+2+\ldots+(n-1)+n].\end{aligned}$$

Le facteur entre crochets étant égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, on trouve de suite que

$$x^2 = 2x \cdot n(n+1),$$

d'où on tire

$$x = 2n(n+1).$$

Le premier de nos $2n+1$ nombres entiers consécutifs est donc

$$x - n = 2n(n+1) - n = n(2n+1),$$

et

$$x + n = 2n(n+1) + n = n(2n+3)$$

est le dernier des nombres cherchés.

Nous pouvons facilement trouver l'expression du nombre N, qui est égal à la somme des carrés de nos $n+1$ premiers nombres entiers consécutifs, ou égal à la somme des carrés des n nombres consécutifs suivants.

Ce nombre est évidemment égal à la différence que l'on obtient en retranchant la somme des carrés des

$$n(2n+1) - 1 = 2n^2 + n - 1$$

premiers nombres entiers de la somme des carrés des

$$2n(n+1) = 2n^2 + 2n$$

premiers nombres entiers.

Or il est aisé de voir que la première somme est égale à

$$\tfrac{1}{6}(2n^2+n-1)(2n^2+n)(4n^2+2n-1),$$

ou à

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(4n^2-1)(4n^2+2n-1);$$

pendant que la seconde somme est

$$\tfrac{1}{3}n(n+1)(2n^2+2n+1)(4n^2+4n+1).$$

Retranchant la première somme de la seconde, on obtient la différence ou le nombre demandé

$$N = \tfrac{1}{6}n(n+1)(24n^3+36n^2+14n+1),$$

qui peut s'écrire

$$N = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(12n^2+12n+1).$$

Ce nombre est toujours divisible par la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

Si l'on donne à n successivement les valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots,$$

on verra que, pour

$n=1$, on a $n+1=2$, $n(2n+1)=3$, $n(2n+3)=5$,
$$N=3^2+4^2=5^2=25;$$

$n=2$, on a $n+1=3$, $n(2n+1)=10$, $n(2n+3)=14$.
$$N=10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365;$$

$n=3$, on a $n+1=4$, $n(2n+1)=21$, $n(2n+3)=27$,
$$N=21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2=2030;$$

$n=4$, on a $n+1=5$, $n(2n+1)=36$, $n(2n+3)=44$,
$$N=36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2=7230; \text{ etc.}$$

Le nombre
$$N=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(12n^2+12n+1),$$
qui exprime la somme des carrés des $n+1$ nombres entiers consécutifs, égale à la somme des carrés des n nombres suivants, est toujours un multiple de 5, quel que soit n.

Représentons tout multiple de 5 par la notation usitée $m5$.

1° Si $n=m5$, le premier facteur de N sera divisible par 5.

2° Pour $n=m5+1$, le facteur $12n^2+12n+1$ est un multiple de 5, augmenté de la somme $12+12+1=25$ des restes, laquelle est aussi un multiple de 5; donc ce facteur est divisible par 5.

3° Si $n=m5+2$, le facteur $2n+1$ prendra la forme $m5+4+1$, laquelle admet le diviseur 5.

4° Pour $n=m5+3$, le facteur $12n^2+12n+1$ est un multiple de 5, augmenté de la somme $12.3^2+12.3+1=108+36+1=145$, laquelle est divisible par 5.

Enfin 5° Si $n=m5+4$, le facteur $n+1$ deviendra $m5+4+1$ et sera un multiple de 5.

Donc le nombre N est toujours divisible par 5.

Ce nombre N sera même divisible par 10, chaque fois que n est doublement pair ou égal un multiple de 4, moins 1: car, dans le premier cas, le facteur n est divisible par 4; et, dans le second cas, le facteur $n+1$ admet le diviseur 4.

On en conclut que le nombre N est toujours terminé par un 5 ou par un zéro.

XXX.

Sommation des cubes d'un certain nombre d'impairs consécutifs.

Par

Georges Dostor.

---

1. Nous nous proposons de déterminer la somme des cubes des $2n+1$ nombres impairs consécutifs, dont le premier est $2n+1$.

Le nombre impair, qui précède immédiatement $2n+1$, est évidemment $2n-1$; celui-ci occupe le $n^{\text{ème}}$ rang dans la suite des nombres impairs.

Pour obtenir notre somme, il nous suffira donc de chercher d'abord la somme des cubes des n premiers nombres impairs, dont le dernier est $2n-1$; puis de calculer la somme des cubes des $n+(2n+1)=3n+1$ nombres impairs, dont le dernier est $2(3n+1)-1$ $=6n+1$; ensuite de retrancher la première somme de la seconde.

Or nous avons fait voir, dans un article précédent*), que la somme des cubes des n premiers nombres impairs est

$$(1) \qquad \Sigma(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

nous en concluons que

$$\Sigma[2(3n+1)-1]^3 = (3n+1)^2[2(3n+1)^2-1].$$

---

*) n. 318 (c).

2. Posons $2n+1=p$; nous pouvons écrire

$$\Sigma[2(3n+1)-1]^3=(n+p)^2[2(n+p)^2-1]$$
$$=(n^2+2np+p^2)(2n^2+4np+2p^2-1).$$

Multiplions d'abord n^2 par $2n^2-1$, puis $2np+p^2$ aussi par $2n^2-1$, et faisons enfin le produit de $n^2+2np+p^2$ par la partie restante $4np+2p^2$ du multiplicateur; nous trouvons ainsi que

$$(2)\qquad \Sigma[2(3n+1)-1]=n^2(2n^2-1)+(2np+p^2)(2n^2-1)$$
$$+(n^2+2np+p^2)(4np+2p^2).$$

Retranchons (1) de (2), et représentons par S la différence obtenue ou la somme cherchée; nous avons

$$S=(2np+p^2)(2n^2-1)+(n^2+2np+p^2)(4np+p^2).$$

Si, dans le second membre, nous mettons en évidence le facteur

$$2np+p^2=p(2n+p),$$

nous trouverons enfin que

$$(\mathrm{I})\qquad S=p(2n+p)(4n^2+4np+2p^2-1).$$

Cette formule donne la *somme des cubes des p nombres impairs consécutifs, qui viennent à la suite du $n^{ième}$ nombre impair.*

3. Dans la formule (I) restituons à p sa valeur $2n+1$, que nous avons fixée au commencement du n° précédent; elle deviendra

$$S=(2n+1)(4n+1)(20n^2+12n+1).$$

Mais le facteur $20n^2+12n+1$ s'annule pour $n=-\frac{1}{2}$; ce facteur est par suite divisible par $2n+1$ et fournit le quotient $10n+1$. Nous avons donc

$$(\mathrm{II})\qquad S=(2n+1)^2(4n+1)(10n+1),$$

ou

$$(\mathrm{III})\qquad (2n+1)^3+(2n+3)^3+\dots+(6n-1)^3+(6n+1)^3$$
$$=(2n+1)^2(4n+1)(10n+1).$$

Telle est la *somme des cubes des $2n+1$ nombres impairs consécutifs, dont le premier est $2n+1$.*

L'inspection de la formule (II) nous fait voir que:

La somme des cubes des $2n+1$ nombres impairs consécutifs, dont le premier est $2n+1$, est toujours divisible par le carré de $2n+1$, quel que soit le nombre entier n.

4. Dans la formule (III) attribuons à n successivement les valeurs entières depuis 1 jusqu à 10. Nous trouvons

pour $n = 1$, $p = 2n+1 = 3$,
$$3^3+5^3+7^3 = 3^2.5.11 = 495;$$

pour $n = 2$, $p = 2n+1 = 5$,
$$5^3+7^3+9^3+11^3+13^3 = 5^2.9.21 = 3^3.5^2.7 = 675;$$

pour $n = 3$, $p = 2n+1 = 7$,
$$7^3+9^3+\ldots+17^3+19^3 = 7^2.13.31 = 19747;$$

pour $n = 4$, $p = 2n+1 + 9$,
$$9^3+11^3+\ldots+23^3+25^3 = 9^2.17.41 = 56457;$$

pour $n = 5$, $p = 2n+1 = 11$,
$$11^3+13^3+\ldots+29^3+31^3 = 11^2.21.51 = 3^2.7.11^2.17 = 129591;$$

pour $n = 6$, $p = 2n+1 = 13$,
$$13^3+15^3+\ldots+35^3+37^3 = 13^2.25.61 = 5^2.13^2.61 = 257725;$$

pour $n = 7$, $p = 2n+1 = 15$,
$$15^3+17^3+\ldots+41^3+43^3 = 15^2.29.71 = 3^2.5^2.29.71 = 463275;$$

pour $n = 8$, $p = 2n+1 = 17$,
$$17^3+19^3+\ldots+47^3+49^3 = 17^2.33.81 = 3^5.11.17^2 = 772497;$$

pour $n = 9$, $p = 2n+1 = 19$,
$$19^3+21^3+\ldots+53^3+55^3 = 19^2.37.91 = 7.13.19^2.37 = 1215487;$$

pour $n = 10$, $p = 2n+1 = 21$,
$$21^3+23^3+\ldots+59^3+61^3 = 21^2.41.101 = 1826181.$$

5. L'inspection de la formule (II) nous fait voir aussi que:

La somme des cubes des $2n+1$ nombres impairs consécutifs, dont le premier est $2n+1$, est toujours divisible par 9, quand n n'est pas un multiple de 3; et cette somme est divisible par 5 ou par 25, suivant que n est égal à un multiple de 5 plus 1, ou égal à un multiple de 5 plus 2.

XXXI.

Propriétés de la suite naturelle des nombres impairs.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Théorème I.** Si l'on partage la suite ascendante des nombres impairs en groupes de p nombres chacun, la somme des nombres, qui forment le $n^{\text{ème}}$ groupe, sera égale à $(2n-1)p^2$.

Représentons par $S_{n,p}$ la somme des p nombres impairs, qui composent le $n^{\text{ème}}$ groupe.

Le dernier nombre de ce groupe occupe, dans la suite naturelle des nombres impairs, le $pn^{\text{ème}}$ rang, pendant que le dernière nombre du groupe précédent n'y occupe que le $p(n-1)^{\text{ème}}$ rang.

Mais la somme des pn premiers nombres impairs est

$$p^2n^2,$$

et celle des $p(n-1)$ premiers nombres impairs est

$$p^2(n-1)^2.$$

Retranchant la seconde somme de la première, on trouve que

$$\text{(I)} \qquad S_{n,p} = (2n-1)p^2,$$

ce qu'il fallait prouver.

2. **Corollaire.** Si chaque groupe ne se compose que d'un nombre, on aura $p=1$, et l'on retrouvera le $n^{\text{ème}}$ nombre impair $2n-1$ pour le $n^{\text{ème}}$ groupe.

3. **Théorème II.** Si l'on partage la suite naturelle des nombres impairs en groupes, contenant le premier p nombres, le second $2p$ nombres, et, en général, le $n^{ème}$ groupe np nombres, la somme des nombres de cet $n^{ème}$ groupe sera égale à n^3p^2.

Désignons par $S_{n,np}$ la somme des np nombres impairs du $n^{ème}$ groupe. Le dernier des nombres impairs, qui forment ce groupe, occupe dans la suite ascendante des nombres impairs le rang

$$p+2p+3p+\ldots+np=(1+2+3+\ldots+n)p,$$

ou le rang

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)p.$$

Le dernier nombre du groupe précédent occupe dans la même suite le rang

$$\tfrac{1}{2}(n-1)np.$$

Or la somme des $\frac{1}{2}n(n+1)p$ premiers nombres impairs est

$$\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2p^2;$$

et la somme des $\frac{1}{2}n(n-1)p$ premiers nombres impairs est

$$\tfrac{1}{4}n^2(n-1)^2p^2$$

Donc il vient

$$S_{n,np}=\tfrac{1}{4}n^2p^2[(n+1)^2-(n-1)^2]=\tfrac{1}{4}n^2p^2.2n.2,$$

ou

$$\text{(II)} \qquad S_{n,np}=n^3p^2,$$

ce que nous voulions démontrer.

4. **Corollaire.** Si $p=1$, le $n^{ème}$ groupe ne comprendra que n nombres impairs. Donc,

Si l'on partage la suite des nombres impairs en groupes, de manière que chaque groupe contienne autant de nombres qu'il y a d'unités dans le rang de ce groupe, les sommes des nombres composant les groupes successifs seront les cubes de la suite des nombres entiers.

5. **Théorème III.** Si l'on partage la suite ascendante des nombres impairs en groupes, contenant le premier p nombres, le second $3p$ nombres, le troisième $5p$ nombres, et, en général, le $n^{ème}$ groupe $(2n-1)p$ nombres impairs, la somme des nombres du $n^{ème}$ groupe sera égale à $(2n-1)(2n^2-2n+1)p^2$.

Représentons par $S_{n,(2n-1)p}$ la somme des nombres impairs, qui forment le $n^{\text{ème}}$ groupe.

Le dernier des nombres impairs, qui composent ce groupe, occupe, dans la suite naturelle des nombres impairs, le rang

$$p+3p+5p+\dots+(2n-1)p=[1+3+5+\dots+(2n-1)]p,$$

ou le rang

$$n^2p.$$

Le dernier nombre du groupe précédent occupe dans la même suite le rang

$$(n-1)^2p.$$

Or la somme des n^2p premiers nombres impairs est

$$n^4p^2,$$

et la somme des $(n-1)^2p^2$ premiers nombres impairs est

$$(n-1)^4p^2.$$

Retranchant la seconde somme de la première, nous obtenons

$$S_{n,(2n-1)p}=[n^4-(n-1)^4]p^2=[n^2-(n-1)^2][n^2+(n-1)^2]p^2,$$

ou

$$\text{(III)}\qquad S_{n,(2n-1)p}=(2n-1)(2n^2-2n+1)p^2.$$

Telle est la somme des nombres impairs, qui composent le $n^{\text{ème}}$ groupe.

6. **Corollaire.** Si le premier groupe ne se compose que du premier nombre impair 1, le deuxième des trois nombres impairs suivants 3, 5, 7, le troisième des cinq nombres impairs 9, 11, 13, 15, 17 qui viennent après, et ainsi de suite, il nous faudra poser $p=1$ dans la formule précédente (III). Nous trouvons alors que

$$\text{(IV)}\qquad S_{n,2n-1}=(2n-1)(2n^2-2n+1).$$

Ainsi la somme des nombres du $n^{\text{ème}}$ groupe est égale à la somme des deux nombres entiers consécutifs $n-1$ et n, multipliée par la somme $(n-1)^2+n^2$ des carrés de ces nombres.

7. **Théorème IV.** Si l'on partage la suite naturelle des nombres impairs en groupes, formés le premier de p nombres, le second de 2^3p nombres, le troisième de 3^3p nombres, et, en général, le $n^{\text{ème}}$ groupe de n^3p nombres impairs, la somme des nombres de cet $n^{\text{ème}}$ groupe sera égale à $\frac{1}{2}n^5(n^2+1)p^2$.

Désignons par S_{n,n^3p} la somme des nombres impairs qui composent le $n^{ème}$ groupe.

Le dernier des nombres impairs, qui forment ce groupe, occupe dans la suite ascendante des nombres impairs le rang

$$p+2^3p+3^3p+\ldots+n^3p=(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)p,$$

ou le rang

$$\tfrac14 n^2(n+1)^2p;$$

et le dernier nombre du groupe précédent occupe dans la même suite le rang

$$\tfrac14(n-1)^2n^2p.$$

Or la somme des $\frac14 n^2(n+1)^2p$ premiers [illegible]

$$\tfrac1{16}n^4(n+1)^4p^2.$$

et la somme des $\frac14 n^2(n-1)^2p$ premiers [illegible]

$$\tfrac1{16}n^4(n-1)^4p^2.$$

Nous trouvons donc, en retranchant la seconde somme de la première,

$$S_{n,n^3p}=\tfrac1{16}n^4[(n+1)^4-(n-1)^4]p^2= \text{[illegible]}$$

ou

(V) $$S_{n,n^3p}=\tfrac12 n^5(n^2+1)p^2.$$

8. **Corollaire.** Lorsque $p=1$, cette somme se réduit à

(VI) $$S_{n,n^3}=\tfrac12 n^5(n^2+1).$$

9. **Théorème V.** Si l'on partage la suite ascendante des nombres impairs en groupes, formés le premier de p nombres, le second de 3^3p nombres, le troisième de 5^3p nombres, et, en général, le $n^{ème}$ groupe de $(2n-1)^3p$ nombres impairs, la somme des nombres du $n^{ème}$ groupe sera égale à $[2n(n+1)(2n^2-2n+3)+1][2(n-1)(2n^2-2n-1)-1]p^2$.

Représentons par $S_{n,(2n-1)^3p}$ la somme des nombres impairs qui forment cet $n^{ème}$ groupe.

Le dernier des nombres impairs, qui composent ce groupe, occupe, dans la suite naturelle des nombres impairs, le rang

$$p+3^3p+5^3p+\ldots+(2n-1)^3p= \text{[illegible]}$$

ou le rang

$$n^2(2n^2-1)p.$$

Le dernier nombre du groupe précédent occupe dans la même suite le rang

$$(n-1)^2[2(n-1)^2-1]p = (n^2-2n+1)(2n^2-4n+1)p.$$

Mais la somme des $n^2(2n^2-1)p$ premiers nombres impairs est

$$n^4(2n^2-1)^2p^2,$$

et la somme des $(n^2-2n+1)(2n^2-4n+1)p$ premiers nombres impairs est

$$(n^2-2n+1)^2(2n^2-4n+1)^2p^2.$$

Retranchant la seconde somme de la première, nous obtenons

$$S_{n,(2n-1)^3p} = n^4(2n^2-1)^2p^2-(n^2-2n+1)^2(2n^2-4n+1)^2p^2$$
$$= [n^2(2n^2-1)+(n^2-2n+1)(2n^2-4n+1)] \times$$
$$[n^2(2n^2-1)-(n^2-2n+1)(2n^2-4n+1)]p^2$$
$$= [(2n^4-n^2)+(2n^4-8n^3+11n^2-6n+1)] \times$$
$$[(2n^4-n^2)-(2n^4-8n^3+11n^2-6n+1)]p^2,$$

ou

$$\text{(VII)} \quad S_{n,(2n-1)^3p} = (4n^4-8n^3+10n^2-6n+1)(8n^3-12n^2+6n-1)p^2.$$

10. **Corollaire.** Pour $p=1$, cette somme se réduit à

(VIII)

$$S_{n,(2n-1)^3} = [2n(n-1)(2n^2-2n+3)+1][2(n-1)(4n^2-2n+1)+1].$$

XXXII.

Somme des carrés et Somme des cubes des $n+1$ nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n+1$.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Somme des carrés.** Nous obtiendrons cette somme, en retranchant la somme des carrés des n premiers nombres entiers, de la somme des carrés des $n+(n+1) = 2n+1$ premiers nombres entiers.

La somme des carrés des n premiers nombres étant

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

la somme des carrés des $2n+1$ premiers nombres sera

$$\tfrac{1}{6}(2n+1)(2n+2)(4n+3) = \tfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)(8n+6).$$

La somme cherchée est donc

$$S_2 = \tfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)(8n+6-n),$$

ou

$$S_2 = \tfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)(7n+6).$$

2. Pour $n = 2$, puis $n = 3$, on a

$$3^2+4^2+5^2 = 2.5^2 = 50,$$
$$4^2+5^2+6^2+7^2 = 2.7.9 = 126.$$

Puisque

$$1^2+2^2+3^2=2.7=14,$$

il vient

$$\frac{4^2+5^2+6^2+7^2}{1^2+2^2+3^2}=9=3^2,$$

d'où l'on tire

$$4^2+5^2+7^2=3^2+9^2=90.$$

3. **Somme des cubes.** La somme des cubes des n premiers nombres entiers étant

$$\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

celle des cubes des $2n+1$ premiers nombres sera

$$\tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2=\tfrac{1}{4}(4n+2)^2(n+1)^2.$$

On trouvera donc pour la somme demandée

$$S_3=\tfrac{1}{4}(n+1)^2[(4n+2)^2-n^2],$$

ou

(II) $$S_3=\tfrac{1}{4}(n+1)^2(3n+2)(5n+2).$$

Ainsi la somme des cubes des $n+1$ premiers nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n+1$, est toujours divisible par le carré de $n+1$.

4. Pour $n=4$, on a

$$5^3+6^3+7^3+8^3+9^3=5^2.7.11=1925.$$

XXXIII.

Ueber die freie Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung eines Kräftepaars.

Von

R. Hoppe.

Diese analytisch von Jacobi, constructiv von Poinsot gelöste Aufgabe nehme ich noch einmal auf, weil ihre Lösung an sich, nicht etwa bloss die ihr gegebene Form, stets als eine der grössern Leistungen, als eine wirkliche Erfindung genannt wird, um zu zeigen, dass sie sich im Gegenteil ohne jeden Kunstgriff auf dem gar nicht zu verfehlenden analytischen Wege in aller Kürze darbietet. So hoch ich auch die uns von Poinsot eröffneten neuen Gesichtspunkte schätze, so muss ich doch seiner Behauptung widersprechen, jene Lösung sei ein Zeugniss dafür, dass oft schwierige Aufgaben durch synthetische Betrachtung auf einfache Weise gelöst würden. Viel eher könnte man dieselbe bezüglich auf seine Theorie der Nutation einräumen, wo in der Tat eine grössere Leistung vorliegt; wiewol sich deren Deduction nur unwesentlich von einer analytischen unterscheidet und nur darum zu Anfang in synthetischer Form auftritt, weil diese dem Entdecker mehr zusagt. Was aber die gegenwärtige Aufgabe betrifft, so geht schon aus dem Umstande, dass Poinsot eine Rechnung von circa 20 Seiten gebraucht um aus der Construction die analytischen Bestimmungen abzuleiten, hervor, dass jene constructive Lösung nicht dasselbe praktische Ziel erreicht wie die directe Berechnung und nicht der kürzeste Weg zum Ziele einer expliciten Darstellung der gesuchten Grössen ist.

§. 1.

Directe Lösung der Aufgabe ohne Discussion.

Ein Körper, dessen Masse m, dessen Hauptträgheitsmomente A, B, C, sei in beliebiger freier Bewegung. Aus allen Kräften, die etwa auf ihn wirken, kann nur eine Kraft und ein Kräftepaar resultiren. Letzteres sei null, wenn wir, was freisteht, erstere durch den Schwerpunkt gehen lassen. Dann sind die Bewegung des Schwerpunkts, allein bedingt durch jene Kraft und die Masse m, und die Bewegung des Körpers relativ zum Schwerpunkt unabhängig von einander. Erstere bildet eine Frage für sich, mit der wir uns nicht beschäftigen; auf letztere wirkt keine Kraft. Der Schwerpunkt sei gemeinsamer Anfang der xyz und $x_1y_1z_1$, die Richtungen der erstern unveränderlich, die Axen der letztern Hauptträgheitsaxen, die Relationen zwischen beiden Systemen:

$$x = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1$$
$$y = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1$$
$$z = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1$$

Wir gehen von den Laplace'schen Gleichungen aus:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial p}{\partial t} - (B-C)qr &= 0 \\ B\frac{\partial q}{\partial t} - (C-A)rp &= 0 \\ C\frac{\partial r}{\partial t} - (A-B)pq &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wie sie lauten, wenn man das Kräftepaar null setzt. Die Multiplicatoren p, q, r geben als Integral die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = k \tag{2}$$

die Multiplicatoren Ap, Bq, Cr das des Flächenmoments:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = h^2 \tag{3}$$

Hier bedeuten p, q, r die Componenten der momentanen Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen der x_1, y_1, z_1, zugleich die Verhältnisszahlen der Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe. Aus beiden Gleichungen geht hervor:

$$Ap^2 = \frac{B(B-C)q^2 + Ck - h^2}{C-A} = \frac{C(B-C)r^2 + h^2 - Bk}{A-B} \tag{4}$$

und die erste Gl. (1) giebt nach Elimination von q, r:

$$t = \int \frac{\sqrt{BC}\partial p}{\sqrt{\frac{h^2 - Ck}{A} + (C-A)p^2}\sqrt{\frac{Bk - h^2}{A} + (A-B)p^2}} \tag{5}$$

Hiernach sind p, q, r als inverse elliptische Functionen 1. Gattung von t bekannt.

Ferner hat man bekanntlich die 9 Formeln:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = br - cq$$

und die analogen, denen zufolge und nach (1)

$$\begin{aligned} A\partial(pa) &= \{Ap(br - cq) + (B - C)qra\}\partial t \\ B\partial(qb) &= \{Bq(cp - ar) + (C - A)rpb\}\partial t \\ C\partial(rc) &= \{Cr(aq - bp) + (A - B)pqc\}\partial t \end{aligned}$$

wird, nebst 2 analogen Systemen, deren 3 Summen, da die Rechte verschwindet, nach Integration geben:

$$\left.\begin{aligned} Apa + Bqb + Crc &= \alpha \\ Apa_1 + Bqb_1 + Crc_1 &= \beta \\ Apa_2 + Bqb_2 + Crc_2 &= \gamma \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Quadratsumme der Linken ist $= h^2$, daher sind

$$\frac{\alpha}{h}, \quad \frac{\beta}{h}, \quad \frac{\gamma}{h}$$

die Richtungscosinus einer Geraden, der Flächenaxe, gegen die x, y, z. Nimmt man diese zur Axe der x, so wird

$$\alpha = h; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0$$

und die Gl. (6) aufgelöst nach p, q, r geben:

$$a = \frac{Ap}{h}; \quad b = \frac{Bq}{h}; \quad c = \frac{Cr}{h} \tag{7}$$

Nachdem diese 3 Grössen bekannt sind, sind es auch die 3 unter sich analogen Grössen:

$$a_1\partial a_2 - a_2\partial a_1 = \{a_1(b_2 r - c_2 q) - a_2(b_1 r - c_1 q)\}\partial t = (bq + cr)\partial t$$

etc. Dies dividirt durch

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 - b^2; \quad \text{etc.}$$

ation:

Die Axe des grössten Trägheitsmoments ist dann dauernde Rotationsaxe, die Rotationsgeschwindigkeit

$$\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \sqrt{\frac{k}{A}}$$

Ebenso ergiebt sich im letztern Falle:

$$p = 0; \quad q = 0; \quad r = \sqrt{\frac{k}{C}}$$

$$a = 0; \quad b = 0; \quad c = 1$$

und die Rotationsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{k}{C}}$. Demnach können auch die 2 Lagen $a = 1$ und $c = 1$ nie momentan eintreten; d. h. die Axen des grössten und kleinsten Trägheitsmoments können nie durch die Flächenaxe gehen.

XXXIV.

Elementarer Beweis für die Existenz eines Mittelpunkts gleich gerichteter Kräfte.

Von

R. Hoppe.

In sorgfältig und mit Einsicht bearbeiteten Lehrbüchern der Mechanik, oder der Physik einschliesslich der Mechanik, welche die Anwendung höherer Rechnungen, auch selbst der Trigonometrie ausschliessen, findet sich der Satz, dass jeder Körper einen Schwerpunkt hat, ohne Beweis aufgestellt — von der grössern Zahl minder exacter nicht zu reden, welche teils den Satz für selbstverständlich erklären, teils Betrachtungen für dessen Beweis ausgeben, die noch nicht einmal bis zur eigentlichen Thesis, bis zur Auffassung des Punktes, der bewiesen werden muss, gelangen.

Da der analytische Beweis im Grunde nur algebraische Elemente enthält, so ist die Möglichkeit eines elementaren Beweises von vorn herein gewährleistet, und es kann nur die Besorgniss, ein solcher möchte zu lang oder zu complicirt ausfallen, der Grund sein, warum man bisher geglaubt hat im Schulunterricht darauf verzichten zu müssen.

Nun wird aber in den Lehrbüchern die Lehre von den statischen Momenten, wenn auch gewöhnlich nur kurz, doch ohne wesentliche Deductionslücke vorgetragen, und zwar wird auch darin die Bestimmung des Schwerpunkts, unter Voraussetzung seiner Existenz, mit aufgenommen. Dieser Umstand kann als Beleg dafür dienen, dass der fragliche Beweis das Mass der Fassungskraft nicht übersteigt, welches man sonst den Schülern zutraut. Es zeigt sich nämlich

dass, wenn man alles ausführlich darlegen will, der bereits bearbeitete Teil der Gegenstände weit mehr Umständlichkeit verursacht, als der, welcher noch fehlt.

Im folgenden habe ich beide Teile in 2 gesonderten Abschnitten behandelt. Der erstere musste noch einmal, und zwar in grösserer Ausführlichkeit entwickelt werden, weil es einer genauen Formulirung der Begriffe bedurfte, auf welche sich der letztere stützt. Ich betrachte ihn aber als bereits bekannte Grundlage, und nur den letztern als mein eigentliches Thema. Vorausgesetzt wird das Gesetz des einfachen (mathematischen) Hebels, und in der Geometrie namentlich die Lehre von der algebraischen Addition der Strecken, letztere stets in dem Sinne benannt, dass $AB = -BA$.

§. 1.

Von den statischen Momenten.

Ein zusammengesetzter (körperlicher) Hebel ist ein, um eine feste Gerade, die Hebelaxe, drehbarer starrer Körper, in beliebigen Punkten von parallelen Kräften normal zur Axe angegriffen.

Jeder Angriffspunkt lässt sich sowol in der Richtung der Kraft als auch in der Richtung der Axe beliebig verschieben, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern. Ersteres ist Grundsatz der Statik starrer Körper, letzteres identisch mit der Parallelverschiebung der Kräftepare, und lässt sich nach deren Muster leicht beweisen.

Wir ziehen durch einen beliebigen Punkt A auf der Axe normal zu dieser und zur Kraftrichtung eine Gerade $X'AX$ und legen durch den Angriffspunkt P der Kraft p normal zu der Geraden, also parallel der Axe und der Kraft die Ebene L, welche AX in N schneide. Dann lässt sich der Angriffspunkt von p längs L überallhin verschieben.

Wir verlegen ihn nach N und betrachten $AN = x$ als einen Hebelarm, $AB = a$, nach X' hin abgeschnitten, als den andern. Eine Kraft q in gleicher Richtung wie p auf B wirkend wird mit p im Gleichgewicht sein, wenn

$$aq = px$$

Durch die Axe und parallel den Kräften gehe die Ebene E; rechts von A liege X, links X'.

Sei angenommen, dass alle Kräfte in einer Richtung wirken; auf Punkte P rechts von E wirken Kräfte p mit den Hebelarmen x aufgehoben durch Kräfte q zur Linken, auf Punkte P' links von E

Kräfte p' mit den Hebelarmen x' aufgehoben durch Kräfte q' zur Rechten, alle q und q' an den 2 absolut gleichen Hebelarmen a.

Erfüllen nun alle q und q' die Gleichungen

$$aq = px; \quad aq' = p'x' \tag{1}$$

so ist das System aller Kräfte im Gleichgewicht, weil sie sich parweise aufheben. Die Kräfte q setzen sich zusammen zu einer Kraft gleich ihrer Summe Σq; ebenso resultirt aus den q' eine Kraft $\Sigma q'$. Folglich kann das System der p durch eine Kraft Σq, und das System der p' durch eine Kraft $\Sigma q'$ im Gleichgewicht gehalten werden, und beide Systeme werden im Gleichgewicht sein, wenn zwischen Σq und $\Sigma q'$ Gleichgewicht besteht. Da nun letztere am gleicharmigen Hebel wirken, so ist die Bedingung erfüllt, wenn

$$\Sigma q = \Sigma q'$$

oder nach Einsetzung der Werte (1), wenn

$$\Sigma px = \Sigma p'x'$$

ist.

Betrachtet man jede Strecke x' nach links als negative Strecke nach rechts, so geht die Differenz $\Sigma px - \Sigma p'x'$ in die Summe Σpx ausgedehnt auf alle Terme beider Summen über, und die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\Sigma px = 0$$

Das Product der Kraft p und des Abstands x ihres Angriffspunkts von der ihr parallelen Ebene E, positiv oder negativ genommen, jenachdem p auf der einen oder andern Seite der Ebene wirkt, heisst das statische Moment der Kraft p in Bezug auf die Ebene E.

Verändert man die Lage der Axe in der Ebene E, also nach anfänglicher Bestimmung gleichzeitig die Richtung der Kräfte längs der Ebene L, so bleiben alle statischen Momente unverändert.

Steht das System der p bei irgend einer festen Axe in der Ebene E im Gleichgewicht, so heisst E eine Gleichgewichtsebene.

Der Begriff der Gleichgewichtsebene ist demnach allein abhängig von den Intensitäten und Angriffspunkten der gegebenen gleich, aber beliebig gerichteten Kräfte. Wir können nun das Ergebniss unserer Betrachtung in den 2 Sätzen aussprechen:

1) Jede Ebene, in Bezug auf welche ein System gleich gerichteter Kräfte, mit allein gegebenen Intensitäten und Angriffspunkten, die algebraische Summe der statischen Momente null ist, ist eine Gleichgewichtsebene dieses Kräftesystems.

2) Hat man eine Gleichgewichtsebene E für ein gegebenes System von Punkten P und Kraftgrössen p, so steht jedes System von Kräften p, welches in gemeinsamer der Ebene E paralleler Richtung auf die respectiven Punkte P eines starren Körpers mit fester Axe in E wirkt, im Gleichgewicht.

Es ist zu zeigen, dass es für jede gegebene Stellung eine Gleichgewichtsebene giebt, und wie diese gefunden werden kann.

Sei E_0 eine beliebige, E eine ihr parallele Ebene rechts von jener im Abstande c, ferner x_0 der positive oder negative Abstand des Punktes P von E_0, jenachdem P rechts oder links von E_0 liegt. Dann ist in gleichem Sinne $x = x_0 - c$ der Abstand desselben Punktes von E, folglich die Summe der statischen Momente der unter sich und E parallelen auf die Punkte P wirkenden Kräfte p in Bezug auf E

$$\Sigma px = \Sigma px_0 - c\Sigma p$$

Diese Grösse ist null, wenn

$$c = \frac{\Sigma px_0}{\Sigma p}$$

ist. Dieser Quotient existirt stets, weil alle p nach Voraussetzung positiv sind, und drückt den Abstand der gesuchten Ebene von der beliebigen, mithin ihre Lage bei gegebener Stellung aus.

§. 2.

Vom Mittelpunkt gleich gerichteter Kräfte.

Seien E, E_1, E_2 Gleichgewichtsebenen, welche sich im Punkte M unter rechten Winkeln schneiden. Es wird behauptet, dass alle durch M gehenden Ebenen Gleichgewichtsebenen sind.

Wir legen durch M die beliebige Ebene N und errichten auf ihr das Lot MU. Dann ergänzen wir das rechtwinklige Parallelepipedon

$$MAA_1A_2B_2B_1BP$$

wo die Seite

$$MA_1BA_2 \text{ in } E$$
$$MA_2B_1A \text{ in } E_1$$
$$MAB_2A_1 \text{ in } E_2$$

fällt, und

$$MA = \text{und parallel } BP$$
$$MA_1 = \text{und parallel } B_1P = \text{und parallel } A_2B$$
$$MA_2 = \text{und parallel } B_2P$$

allel N legen wir durch die Eckpunkte in oben stehender Reihen-
e die Ebenen

$$N,\ F,\ F_1,\ F_2,\ G_2,\ G_1,\ G,\ K,$$

he MU in

$$M,\ C,\ C_1,\ C_2,\ D_2,\ D_1,\ D,\ Q$$

eiden. Dann sind

F äquidistant mit G, K, weil zwischen ihnen MA = u. par. BP
F_1 äquidistant mit F_2, G, weil zwischen ihnen MA_1 = u. par. A_2B

e gleichen Abstände werden direct gemessen durch

$$MC = DQ, \quad MC_1 = C_2D$$

r ist

$$MC + MC_1 + MC_2 = MC_2 + C_2D + DQ = MQ \qquad (2)$$

Diese Gleichung gilt für einen beliebigen Punkt P. Wir wenden
an auf den Angriffspunkt P der Kraft p und denken die gleiche
struction vollzogen mit irgend einem andern Punkte P_0, für
hen den A, C entspreche A_0, C_0. Dann ist

Dreieck AMC ähnlich A_0MC_0

beide sind rechtwinklig und haben einen andern Winkel gemein.
t man also

$$MA_0 = a; \quad MC_0 = c$$

erhält sich

$$MA : MC = a : c$$

analog hat man, wenn

$$MA = x; \quad MA_1 = x_1; \quad MA_2 = x_2; \quad MQ = u$$

tzt wird:

$$MC = \frac{cx}{a}; \quad MC_1 = \frac{c_1x_1}{a_1}; \quad MC_2 = \frac{c_2x_2}{a_2}$$

er nach Gl. (2):

$$u = \frac{cx}{a} + \frac{c_1x_1}{a_1} + \frac{c_2x_2}{a_2}$$

ltiplicirt man mit p, bildet die analogen Gleichungen für alle Kräfte
l addirt sie, so kommt:

$$\Sigma pu = \frac{c}{a}\Sigma px + \frac{c_1}{a_1}\Sigma px_1 + \frac{c_2}{a_2}\Sigma px_2$$

Summen zur Rechten sind null, weil E, E_1, E_2 Gleichgewichts-
nen. Die Summe zur Linken ist die Summe der statischen Mo-
nte aller Kräfte in Bezug auf F, folglich ist auch diese null, und
Gleichgewichtsebene, w. z. b. w.

Der Punkt M heisst der **Mittelpunkt** der parallelen Kräfte p.

Es ist eine leichte Folgerung aus dem Gesetz des einfachen Hebels, dass jedes System gleich gerichteter Kräfte am starren Körper eine Resultante hat, welche gleich der Summe aller Kräfte und von gleicher Richtung ist. In unserm Falle muss diese Resultante stets durch M gehen; denn sonst könnte man eine durch M gehende feste Axe normal zu den Kräften annehmen, welche sich mit der Resultante nicht träfe, und dann wäre kein Gleichgewicht.

Hieraus folgt weiter, dass ein System gleich gerichteter Kräfte sich stets im Gleichgewicht befindet, wenn der Mittelpunkt fest ist.

Das Vorstehende ist auf den Fall, wo einige der Kräfte entgegengesetzte Richtung haben, anwendbar, indem man deren Intensitäten als negative Grössen in Rechnung bringt, mit der einzigen Einschränkung, dass Σp nicht null sein darf, in welchem Falle sich keine Gleichgewichtsebene, mithin auch kein Mittelpunkt ergeben würde.

XXXV.

Ueber die zweite Speciallösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

R. Hoppe.

Aus einer Speciallösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ergiebt sich bekanntermassen die zweite, oder vielmehr die vollständige Lösung, in Form eines Integrals. In zwei Arbeiten, Crelle J. LXIII. 122. und Schlömilch Zschr. IX. 56., kam mir aber der Fall zu statten, dass die zweite Lösung durch Differentiation aus der ersten gewonnen ward. Ich will nun untersuchen, in welchem Umfange eine solche Ableitung Geltung hat. Im ersten jener zwei Fälle war ein Coefficient rein imaginär, der andere constant und reell, und die unmittelbare Ableitung befriedigte die conjugirte Gleichung, ihr conjugirter Wert war also die Lösung; im zweiten Falle Falle waren beide Coefficienten reell. Die umfassende Form wird daher die sein, in der beide Coefficienten complex und variabel sind, und die zweite Lösung der conjugirte Wert derjenigen ist, welche durch Differentiation aus der ersten hervorgeht. Sie begreift auch den Fall in sich, wo jene Ableitung der Gleichung selbst, nicht der conjugirten, genügt; man braucht nur beide Factoren von i null zu setzen, und für die reellen Teile complexe Substitutionen zu machen.

§. 1. Allgemeine Bedingung.

Die Differentialgleichung sei

$$y'' + (p + iq)y' + re^{iu}y = 0 \tag{1}$$

wo p, q, r, u eelle Functionen von x, die Striche die Differentiation nach x bezeich en. Betrachten wir y als eine beliebige die Gleichung befriedigende Function, so handelt es sich darum, unter welchen Bedingungen

$$z = \varrho y' \tag{2}$$

die Gleichung

$$z'' + (p - iq)z' + re^{-iu}z = 0 \tag{3}$$

erfüllt.

Gl. (1) differentiirt giebt:

$$y''' + (p- \quad \ldots \quad y' + (r' + iru')e^{iu}y = 0$$

Nach Einsetzu ... (3) erhält man:

$$y''' + \left(\frac{2\varrho'}{\varrho} \quad \ldots \quad -iq)\frac{\varrho'}{\varrho} + re^{-iu}\right]y' = 0$$

woraus nach Subtra...

$$\left(2iq - \frac{2\varrho'}{\varrho}\right)y'' + \left[p' \quad \ldots \quad -(\quad \ldots \quad \frac{\varrho'}{\varrho} + 2ir\sin u\right]y'$$
$$\ldots = 0 \tag{4}$$

Eliminirt man noch y'' mittelst Gl. (1), so kommt:

$$\left[p' + iq' - \frac{\varrho''}{\varrho} - 2ipq + 2q^2 + (p + 3iq)\frac{\varrho'}{\varrho} + 2ir\sin u\right]y'$$
$$+ \left[r' + iru' + 2r\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - iq\right)\right]e^{iu}y = 0$$

Diese Gleichung muss unabhängig von y, y' erfüllt sein; daher hat man gleichzeitig:

$$p' + iq' - 2ipq + 2q^2 + 2ir\sin u + (p + 3iq)\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{\varrho''}{\varrho} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = iq - \frac{r'}{2r} - \frac{iu'}{2} \tag{6}$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = iq' - \frac{r''}{2r} + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{iu''}{2} + \left(iq - \frac{r'}{2r} - \frac{iu'}{2}\right)^2$$
$$= iq' - q^2 - iq\frac{r'}{r} - \frac{r''}{2r} + \frac{3}{4}\frac{r'^2}{r^2} + qu' + \frac{iu'}{2}\frac{r'}{r} - \frac{iu''}{2} - \frac{u'^2}{4}$$

Dies nebst (6) eingeführt in Gl. (5) giebt:

$$p' - ipq + 2ir\sin u - (p + iq)\left(\frac{r'}{2r} + \frac{iu'}{2}\right) + \frac{r''}{2r} - \frac{3}{4}\frac{r'^2}{r^2}$$
$$- \frac{iu'}{2}\frac{r'}{r} + \frac{iu''}{2} + \frac{u'^2}{4} = 0$$

woraus, sofern p, q, r, u reell sind, gleichzeitig hervorgeht:

$$4p' - 2p\frac{r'}{r} + \frac{2r''}{r} - \frac{3r'^2}{r^2} + 2qu' + u'^2 = 0 \tag{7}$$

$$4r\sin u - 2pq - q\frac{r'}{r} - pu' - u'\frac{r'}{r} + u'' = 0 \tag{8}$$

Eliminirt man q, so kommt:

$$2\left(2p + \frac{r'}{r}\right)\left(2p' + \frac{r''}{r}\right) - \left(8p + \frac{3r'}{r}\right)\frac{r'^2}{r^2} - (4p^2 + u'^2)\frac{r'}{r} + 2u'u'' + 8ru'\sin u = 0 \tag{9}$$

Nachdem diese Relationen zwischen p, r, u und x erfüllt ist, bestimmt Gl. (7) den Wert von q. Es bleiben demnach 2 Functionen von x willkürlich.

§. 2. Darstellung der Differentialgleichung.

Die Gl. (9) wird sichtlich integrabel, sobald man substituirt:

$$p = \sqrt{nr} - \frac{r'}{2r} \tag{10}$$

Dann reducirt sie sich nämlich auf

$$4n' - u'^2\frac{r'}{r^2} + \frac{2u'u''}{r} + 8u'\sin u = 0$$

und giebt nach Integration:

$$4n + \frac{u'^2}{r} - 8\cos u = 4c \tag{11}$$

Wir betrachten nun n und u als willkürlich; aus ihnen geht hervor

$$r = \frac{1}{4}\frac{u'^2}{2\cos u + c - n}$$

Gl. (7) geht nach Einführung des Wertes (10) über in

$$2\sqrt{\frac{r}{n}}\,n' + 2qu' + u'^2 = 0 \tag{12}$$

woraus:

$$q = -\frac{n'}{u'}\sqrt{\frac{r}{n}} - \frac{u'}{2} \tag{13}$$

D in n, u aus, so wird

$$p = \frac{u'}{2}\sqrt{\frac{n}{2\cos u + c - n}} - \frac{u''}{u'} - \frac{1}{2}\,\frac{2u'\sin u + n'}{2\cos u + c - n} \tag{14}$$

$$q = -\frac{n'}{2\sqrt{n(2\cos u + c - n)}} - \frac{u'}{2} \tag{15}$$

Die Differentialgleichung lautet nun, wenn man r als Abkürzung gebraucht:

$$y'' + \left\{\sqrt{nr} - \frac{r'}{2r} - i\left(\frac{\partial n}{\partial u}\sqrt{\frac{r}{n}} + \frac{u'}{2}\right)\right\} y' + r e^{iu} y = 0 \tag{16}$$

Zur Darstellung der zweiten Lösung findet man aus Gl. (6):

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{r}}\, e^{i\int (q - \frac{1}{2}u')\partial x}$$

das ist

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{r}}\, e^{-iu - \frac{i}{2}\int \frac{\partial n}{\sqrt{n(2\cos u + c - n)}}}$$

Bezeichnen also y_1, z_1 die conjugirten Werte von y, z, so ist die zweite Lösung:

$$z_1 = \frac{2A}{u'}\, y_1' \sqrt{2\cos u + c - n}\; e^{iu + \frac{i}{2}\int \frac{\partial n}{\sqrt{n(2\cos u + c - n)}}} \tag{17}$$

§. 3. Constanter Coefficient von y.

Der Gang der Rechnung ändert sich in 2 Fällen, zunächst wenn der Coefficient von y constant ist, d. h. wenn es r und u sind. Hier verschwindet nämlich der letzte Term in Gl. (4), daher müssen die Coefficienten von y'' und y' einzeln verschwinden, und man hat sogleich:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = iq; \quad p' + iq' - \frac{\varrho''}{\varrho} - (p - iq)\frac{\varrho'}{\varrho} + 2ir\sin u = 0$$

woraus nach Elimination von ϱ:

$$p' - ipq + 2ir\sin u = 0$$

oder gleichzeitig:

$$p' = 0; \quad pq = 2r\sin u$$

Hiernach würden auch p und q constant sein, ein Fall den wir natürlich ausser Betracht lassen, wenn nicht zugleich

$$p = 0; \quad \sin u = 0$$

ist. Dies angenommen lautet nun die Gleichung:

$$y'' + iqy' + ry = 0 \tag{18}$$

ihre zweite Lösung:

$$z_1 = Ae^{-i\int q\partial x} y_1' \tag{19}$$

Die Gleichung am angef. O. unterschied sich nur durch den besondern Wert $r = \frac{1}{4}$ von der gegenwärtigen, was von keinem Einfluss ist. Es hat sich gezeigt, dass ein constanter Coefficient von y keiner allgemeinern Form entsprechen kann.

§. 4. Reeller Coefficient von y'.

Der zweite Fall, welcher den Gang der Rechnung ändert, ist der, wo q einen vorgeschriebenen Wert, z. B. den Wert 0 hat. Hier können die Gl. (7) (8), welche nun lauten

$$4p' - 2p\frac{r'}{r} + \frac{2r''}{r} - \frac{3r'^2}{r^2} + u'^2 = 0$$

$$4r\sin u - pu' - u'\frac{r'}{r} + u'' = 0$$

nicht mehr durch Elimination von q auf eine reducirt werden. Das Resultat der Elimination (9) und dessen Integral (11) bleiben gültig, müssen aber mit einer der beiden Gleichungen verbunden werden. Die erste, welche sich auf (12) reducirte, lautet hier:

$$2n'\sqrt{\frac{r}{n}} + u'^2 = 0 \tag{20}$$

und lässt sich schreiben:

$$u' = -2\frac{\partial n}{\partial u}\sqrt{\frac{r}{n}}$$

Dies in Gl. (11) eingeführt giebt:

$$n^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2 = n(2\cos u + c) \tag{21}$$

Mit x ist also zugleich r eliminirt, und eine Gleichung ohne willkürliche Function hervorgegangen, deren allgemeine Integration nicht ersichtlich ist.

Für constantes u werden beide Gleichungen (20) und (11) durch beliebiges constantes n erfüllt. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$y'' + \left(\sqrt{nr} - \frac{r'}{2r}\right)y' + re^{iu}y = 0 \tag{22}$$

Nach Gl. (6) wird hier

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{r'}{2r}$$

das giebt:

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{r}}$$

Die zweite Lösung ist also:

$$z_1 = \frac{A}{\sqrt{r}} y_1' \tag{23}$$

Die Gl. (22) umfasst den Fall der ganz reellen Form

$$y'' + \left(\sqrt{nr} - \frac{r'}{2r}\right)y' + ry = 0 \tag{24}$$

mit der zweiten Lösung

$$z = \frac{A}{\sqrt{r}} y' \tag{25}$$

§. 5. Andere Specialfälle.

Sei bloss u, nicht aber r constant; dann wird Gl. (11) durch ein beliebiges constantes n, und Gl. (12) ohne Bestimmung von q erfüllt. Die Differentialgleichung wird:

$$y'' + \left(\sqrt{nr} - \frac{r'}{2r} + iq\right)y' + re^{iu}y = 0 \tag{25}$$

und nach (6) die zweite Lösung:

$$z_1 = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{-i\int q\partial x} y_1' \tag{26}$$

Sei statt dessen r constant, u variabel. Die Gl. (7) (8) reduciren sich auf

$$8pp' + 2u'u'' + 8ru'\sin u = 0$$

$$4p' + 2qu' + u'^2 = 0$$

Erstere integrirt giebt:

$$4p^2 + u'^2 - 8r\cos u = 4c$$

Hieraus findet man:

$$p = \tfrac{1}{2}\sqrt{8r\cos u + 4c - u'^2}$$

$$q = -\frac{4r\sin u + u''}{\sqrt{8r\cos u + 4c - u'^2}} - \frac{u'}{2}$$

mithin die Differentialgleichung

$$y'' + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{8r\cos u + 4c - u'^2} - i\frac{4r\sin u + u''}{\sqrt{8r\cos u + 4c - u'^2}} - \frac{iu'}{2}\right)y' \tag{27}$$

mit der zweiten Lösung:

$$z_1 = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{iu + i\int \frac{4r\sin u + u''}{\sqrt{8r\cos u + 4c - u'^2}} \partial x} y_1' \tag{28}$$

Sei endlich $p = 0$ die einzige Specialisirung; dann wird nach Gl. (10)

$$n = \frac{r'^2}{4r^3} = \frac{\partial r^2}{4r^3 \partial u^2} u'^2$$

Dies eingeführt in Gl. (11) giebt:

$$\left\{ \left(\frac{\partial r}{r \partial u} \right)^2 + 1 \right\} u'^2 = 4r(2\cos u + c)$$

also nach Elimination von u'^2

$$n = \frac{2\cos u + c}{1 + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^{-2}}$$

Differentiirt man so kommt:

$$\frac{\partial n}{\partial u} = -\left[1 + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^{-2} \right]^{-2} \left\{ 2\sin u \left[1 + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^{-2} \right] \right.$$

$$\left. + 2(2\cos u + c) r \left[1 - r \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^{-2} \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \right] \frac{\partial u}{\partial r} \right\}$$

daher ist

$$\frac{\partial n}{\sqrt{n}\, \partial u} = -\frac{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\cos u + c}} \left\{ 2\sin u \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 \right] \frac{\partial r}{\partial u} \right.$$

$$\left. + 2(2\cos u + c) r \left[\left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \right] \right\}$$

Nach Gl. (12) ist nun

$$q = -\sqrt{\frac{r}{n}} \frac{\partial n}{\partial u} - \frac{u'}{2}$$

also nach Einführung obiger Werte

$$q = \frac{\sqrt{r} \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\cos u + c}} \left\{ 2\sin u \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 \right] \frac{\partial r}{\partial u} \right.$$

$$\left. - c) r \left[\left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 - 1 - 2r \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \right] \right\} \tag{29}$$

Diesen We muss also q in der Gleichung

$$y'' + iqy' + re^{iu}y = 0$$

haben, damit ihr als zweite Lösung

$$z_1 = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{\frac{iu}{2} - i\int q\partial x} y_1'$$

genügt.

XXXVI.

Sur les séries divergentes à termes positifs.

Par

P. Appell.

I.

Soit une série

(A) $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots;$$

je désigne par $A_n^{n'}$ la somme des termes compris entre le terme de rang n exclusivement et celui de rang n' inclusivement

$$A_n^{n'} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n'}$$

On voit immédiatement que l'on a

$$A_n^{n'} + A_{n'}^{n''} = A_n^{n''}$$

Soit une deuxième série

(B) $$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots;$$

je fais de même

$$B_n^{n'} = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n'}$$

Cela posé, supposons que les séries (A) et (B) soient divergentes et que leurs termes soient tous positifs à partir d'un certain rang. Alors les deux sommes A_0^n, B_0^m croissent indéfiniment en même temps que n et m; or il peut arriver que l'on puisse etablir entre les deux nombres n et m une relation telle que la différence $A_0^n - B_0^m$ ou le rapport $\frac{A_0^n}{B_0^m}$ tende vers une limite quand n et m croissent indéfinim[illegible] me propose d'examiner ici quelques unes de ces cas.

Relativement à la différence $A_0^n - B_0^m$ je ne ferai que citer un théorème de Dirichlet dont on trouve une démonstration dans le mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques. Ce théorème est le suivant:

„Soient (A) et (B) deux séries divergentes à termes positifs dans lesquelles a_n et b_n tendent vers zéro quand n croit indéfiniment, on peut toujours établir entre n et m une relation telle que la différence $A_0^n - B_0^m$ tende vers un nombre quelconque donné d'avance lorsque n et m augmentent à l'infini."

On obtient un cas particulier remarquable en supposant la série (B) identique à la série (A). J'arrive maintenant au rapport $\frac{A_0^n}{B_0^m}$. Voici un premier théorème analogue à celui de Dirichlet:

„Soient (A) et (B) deux séries divergentes à termes positifs dans lesquelles a_n et b_n restent finis quand n croit indéfiniment, on peut toujours établir entre n et m une relation telle que le rapport $\frac{A_0^n}{B_0^m}$ tende vers un nombre quelconque donné d'avance quand n et m croissent indéfiniment."

La démonstration de ce théorème est en tous points semblable à celle du théorème de Dirichlet. Soit λ le nombre donné d'avance; on commence par prendre un nombre n_1 juste assez grand pour que $A_0^{n_1} > \lambda$; puis un nombre m_1 juste assez grand pour que $\frac{A_0^{n_1}}{B_0^{m_1}} < \lambda$; puis n_2 pour que $\frac{A_0^{n_2}}{B_0^{m_1}} > \lambda$, puis m_2 pour que $\frac{A_0^{n_2}}{B_0^{m_2}} < \lambda$; et ainsi de suite. On aura de cette façon une suite de nombres successivement plus grands et plus petits que λ; ces nombres ont pour limite λ, car, par exemple, la différence entre $\frac{A_0^{n_{r+1}}}{B_0^{m_r}}$ et λ est plus petite que $\frac{a_{n_{r+1}}}{B_0^{m_r}}$; elle tend donc vers zéro quand r croit indéfiniment.

Voici encore un autre théorème concernant le rapport $\frac{A_0^n}{B_0^m}$.

„Si dans deux séries divergentes à termes positifs (A) et (B), le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ des termes de même rang tend vers une limite k quand n croît indéfiniment, le rapport $\frac{A_0^n}{B_0^n}$ tend vers cette même limite."

Pour démontrer ce théorème je remarque d'abord que je puis négliger au commencement de chaque série un nombre quelconque fini de termes, c'est à dire que, p désignant un nombre fini quelconque, le rapport $\frac{A_p^n}{B_p^n}$ tend vers la même limite que $\frac{A_0^n}{B_0^n}$. On a en effet

$$\frac{A_0^n}{B_0^n} = \frac{A_0^p + A_p^n}{B_0^p + B_p^n} = \frac{\frac{A_0^p}{B_p^n} + \frac{A_p^n}{B_p^n}}{\frac{B_0^p}{B_p^n} + 1}$$

d'ou il résulte

$$\lim \frac{A_0^n}{B_0^n} = \lim \frac{A_p^n}{B_p^n}$$

car $\frac{A_0^p}{B_p^n}$ et $\frac{B_0^p}{B_p^n}$ tendent vers zéro quand n augmente à l'infini. Cela posé, puisque $\frac{a_n}{b_n}$ a pour limite k, si l'on désigne par l un nombre quelconque plus grand que k, il existe un entier p tel que pour $n \geqq p$ on ait constamment $\frac{a_n}{b_n} < l$ et par suite

$$\frac{A_p^n}{B_p^n} < l;$$

de même si l'on désigne par h un nombre plus petit que la limite k, il existe un entier q tel que

$$\frac{A_q^n}{B_q^n} > h;$$

faisons croître n indéfiniment, les rapports $\frac{A_p^n}{B_p^n}$, $\frac{A_q^n}{B_q^n}$ ont la même limite que le rapport $\frac{A_0^n}{B_0^n}$; ce dernier rapport a donc une limite comprise entre l et h; comme l et h diffèrent de k aussi peu qu'on le veut, le rapport $\frac{A_0^n}{B_0^n}$ a pour limite k.

Exemples. Faisons

$$a_n = \frac{1}{2n-1}, \qquad b_n = \frac{1}{2n}$$

$$A_0^n = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$B_0^n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2m}$$

et remarquons que l'on a

$$(1)\qquad \begin{aligned}\lim[A_0{}^n - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} n]_{n=\infty} &= \alpha\\ \lim[B_0{}^m - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} m]_{m=\infty} &= \beta\end{aligned}$$

α et β étant deux constantes dont les valeurs numériques sont

$$\alpha = \frac{C + \operatorname{Log} 2}{2}, \qquad \beta = \frac{C - \operatorname{Log} 2}{2}$$

C désignant la constante d'Euler.

Cela posé on a d'abord en retranchant membre à membre les égalités (1):

$$(2)\qquad \lim(A_0{}^n - B_0{}^m) = \tfrac{1}{2}\lim \operatorname{Log}\frac{n}{m} + \operatorname{Log} 2$$

donc si l'on veut que la différence $A_0{}^n - B_0{}^m$ tende vers une limite λ donnée, il suffit de faire croître n et m de façon que

$$\lim \operatorname{Log}\frac{n}{m} = 2\lambda - 2\operatorname{Log} 2$$

ou

$$\lim\frac{n}{m} = \tfrac{1}{4}e^{2\lambda}$$

Si nous considérons maintenant le rapport $\frac{A_0{}^n}{B_0{}^m}$, nous voyons en vertu des égalités (1) que l'on a

$$\lim\frac{A_0{}^n}{B_0{}^m} = \lim\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} m}$$

En effet

$$\begin{aligned}A_0{}^n &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} n + \alpha + \varepsilon\\ B_0{}^m &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} m + \beta + \eta\end{aligned}$$

ε et η tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{m}$; donc

$$\frac{A_0{}^n}{B_0{}^m} = \frac{\operatorname{Log} n + 2(\alpha+\varepsilon)}{\operatorname{Log} m + 2(\beta+\eta)}$$

et

$$\lim\frac{A_0{}^n}{B_0{}^m} = \lim\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} m}$$

Donc si l'on veut que le rapport $\frac{A_0{}^n}{B_0{}^m}$ tende vers une limite λ donnée d'avance, il suffit de faire croître m et n de façon que

$$\lim\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} m} = \lambda$$

ou

$$\lim \frac{n}{m^\lambda} = \mu$$

μ étant un nombre entièrement arbitraire.

II.

Soient maintenant deux séries

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots$$
$$\varphi(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_n x^n + \ldots$$

ordonnées par rapport aux puissances d'une variable x; je suppose que les coefficients $u_0, u_1, \ldots u_n \ldots, v_0, v_1, \ldots v_n \ldots$ restent positifs à partir d'un certain rang, et que les deux séries soient convergentes lorsque x est plus petit que l'unité mais soient divergentes pour $x = 1$. Les deux séries définissent alors des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ de la variable x qui sont finies et continues quand x est plus petit que l'unité, mais qui croissent au delà de toute limite quand x tend vers l'unité par des valeurs inférieures à l'unité. Cela posé:

„Si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers une limite k quand n croît indéfiniment, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers cette même limite k quand x tend vers l'unité par des valeurs inférieures à l'unité."

J'ai déja indiqué un cas particulier de ce théorème dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences, novembre 1878, en prenant, au lieu de la série $\varphi(x)$, la série particulière

$$\frac{1}{(1-x)^p} = 1 + \frac{p}{1} x + \frac{p.(p+1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

Mais comme la démonstration de ce cas particulier s'applique au théorème général, il est inutile de la reproduire ici.

Je me bornerai à donner un autre cas particulier du théorème général:

Si, dans une série à termes positifs,

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots$$

le rapport $\frac{u_n}{\log n}$ tend vers une limite k quand n croît indéfiniment, le rapport $\frac{(x-1)f(x)}{\log(1-x)}$ tend vers cette même limite k quand x tend vers l'unité par des valeurs inférieures à l'unité.

En effet on a

$$-\log(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

d'où en multipliant membre à membre

$$\frac{\log(1-x)}{x-1} = \frac{x}{1} + (1+\tfrac{1}{2})x^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^3 + \dots$$
$$+ \left(1+\tfrac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n + \dots$$

Prenons cette dernière série pour la série

$$\varphi(x) = v_0 + v_1 x + \dots + v_n x^n + \dots$$

de façon que

$$v_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

On sait que

$$\lim \frac{v_n}{\log n} = 1 \text{ pour } n = \infty;$$

d'autre part on suppose

$$\lim \frac{u_n}{\log n} = k,$$

donc

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = k \text{ pour } n = \infty;$$

donc, d'après le théorème général

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \text{ pour } x = 1$$

et comme

$$\varphi(x) = \frac{\log(1-x)}{x-1},$$

on a

$$\lim \frac{(x-1)f(x)}{\log(1-x)} = k \text{ pour } x = 1.$$

Strasbourg 16 septembre 1879.

XXXVII.

Integration zweier Differentialgleichungen.

Von

Simon Spitzer.

1.

Gegeben sei die Gleichung:

$$(a_1x+b_1y+c_1)^n dx+(a_2x+b_2y+c_2)^n dy = 0 \tag{1}$$

unter $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ und n constante Zahlen verstanden.

Um sie zu integriren, führe ich in dieselbe für x und y neue Variable ξ und η ein mittelst folgender Substitutionen:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1 &= \xi \\ a_2x+b_2y+c_2 &= \eta \end{aligned} \tag{2}$$

hieraus folgt zunächst:

$$\begin{aligned} a_1\partial x+b_1\partial y &= \partial\xi \\ a_2\partial x+b_2\partial y &= \partial\eta \end{aligned} \tag{2}$$

und sodann:

$$\begin{aligned} \partial x &= \frac{b_1\partial\eta - b_2\partial\xi}{a_2b_1 - a_1b_2} \\ \partial y &= \frac{a_2\partial\xi - a_1\partial\eta}{a_2b_1 - a_1b_2} \end{aligned} \tag{3}$$

Man erhält daher

$$\xi^n(b_1\partial\eta - b_2 d\xi)+\eta^n(a_2\partial\xi - a_1\partial\eta) = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung ist eine homogene Differentialgleichung, behufs Integration derselben setze ich

$$\eta = u\xi \tag{5}$$

unter u eine neue Variable verstanden, und erhalte hierdurch

$$b_1(u\partial\xi + \xi du) - b_2 d\xi + u^n[a_2 d\xi - a_1 u\partial\xi - a_1 \xi du] = 0$$

oder geordnet:

$$(b_1 u - b_2 + a_2 u^n - a_1 u^{n+1})d\xi + (b_1\xi - a_1 u^n \xi)du = 0$$

Trennt man bei dieser Gleichung die Variablen, so erhält man:

$$\frac{\partial\xi}{\xi} = \frac{(b_1 - a_1 u^n)du}{b_2 - b_1 u - a_2 u^n + a_1 u^{n+1}} \tag{5}$$

und diese Gleichung ist nun leicht zu integriren. Integrirt man dieselbe, so erhält man u als Function von ξ, setzt man sodann für u seinen Wert $\frac{\eta}{\xi}$, und schliesslich für ξ und η die in (2) aufgestellten Werte, so erhält man das Integrale der vorgelegten Differentialgleichung.

In dem speciellen Falle, in welchem

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0 \tag{6}$$

ist, ist die so eben gelehrte Integrationsmethode nicht anwendbar. In diesem Falle geht nämlich die vorgelegte Gleichung, wenn man in selbe

$$a_2 = \frac{a_1 b_2}{b_1}$$

setzt, über in:

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)^n dx + \left(\frac{a_1 b_2}{b_1} x + b_2 y + c_2\right)^n dy = 0$$

oder wenn man dieselbe von Brüchen befreit, in:

$$b_1{}^n(a_1 x + b_1 y + c_1)^n dx + (a_1 b_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2)^n dy = 0 \tag{7}$$

Führt man nun in diese Gleichung für die Variable y eine neue Variable η ein, mittelst der Substitution

$$a_1 x + b_1 y = \eta \tag{8}$$

so erhält man durch Differentiiren:

$$a_1\partial x + b_1\partial y = \partial\eta$$

und wenn man hieraus ∂y sucht, so erhält man:

$$\partial y = \frac{\partial\eta - a_1\partial x}{b_1}$$

folglich ist:



$$b_1{}^n(\eta+c_1)^n dx+(b_2\eta+b_1c_2)^n.\frac{\partial\eta-a_1\partial x}{b_1}=0$$

und diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$dx=\frac{(b_2\eta+b_1c_2)^n d\eta}{a_1(b_2\eta+b_1c_2)^n-b_1{}^{n+1}(\eta+c_1)^n} \tag{9}$$

In dieser Gleichung sind nun die Variablen gesondert. Integrirt man dieselbe, so erhält man x als Function von η, setzt man sodann für η seinen in (8) stehenden Wert, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, und diese ist das Integrale der vorgelegten Gleichung.

2.

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$xy''' = A(xy'-\mu y) \tag{1}$$

in welcher A eine beliebige Constante, und μ eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Differentiirt man die Gleichung (1) μ mal nach x, so erhält man:

$$xy^{(\mu+3)}+\mu y^{(\mu+2)}=Axy^{(\mu+1)} \tag{2}$$

Die beiden Differentialgleichungen (1) und (2) haben gewiss 3 particuläre Integrale gemeinschaftlich, denn dieselben 3 particulären Integrale, welche der Gleichung (1) genügen, genügen auch der Gleichung (2), weil diese eine blosse Folge der Gleichung (1) ist.

Die Gleichung (2) hat aber ausser den genannten 3 particulären Integralen noch μ particuläre Integrale, die nicht der Gleichung (1) genügen, und die blos in Rechnung eingeführt worden sind durch das μ malige Differentiiren der Gleichung (1).

Es folgt aber aus (2)

$$y=C_\mu x^\mu+C_{\mu-1}x^{\mu-1}+C_{\mu-2}x^{\mu-2}+\ldots+C_2x^2+C_1x+C_0 \tag{3}$$

unter C_μ, $C_{\mu-1}$, $C_{\mu-2}$, ... C_2, C_1, C_0 willkürliche Constanten verstanden. Da dieser Ausdruck $\mu+1$ willkürliche Constanten enthält, so repräsentirt er $\mu+1$ particuläre Integrale der Gleichung (2); eines dieser particulären Integrale gehört daher der Gleichung (1) an. Um dieses zu finden, setzen wir den in (3) aufgestellten Wert von y in (1) und bestimmen die Constanten C_μ, $C_{\mu-1}$, $C_{\mu-2}$, ... C_2, C_1, C_0 so, dass der Gleichung (1) identisch Genüge geschieht.

Aus der Glei[illegible] folgen:

XXXVIII.

Zur Construction symmetrischer Punktsysteme.

Von

Emil Hain.

Vorbemerkungen.

In Folgendem werden mit a, α, F Seiten, Winkel und Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichnet. $X(a)$, $X(b)$, $X(c)$ seien die normalen Abstände eines Punktes X in der Ebene dieses Dreiecks von den Seiten desselben; ferner sei:

$$X(a) = \lambda x_a$$

$$X(b) = \lambda x_b, \quad \lambda = \frac{2F}{\Sigma a x_a}$$

$$X(c) = \lambda x_c$$

Die x_a sind also die den Seitennormalen proportionalen trimetrischen Punktcoordinaten von X. Wir schreiben dies:

$$X \equiv x_a x_b x_c$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte

$$P \equiv p_a p_b p_c, \quad Q \equiv q_a q_b q_c$$

hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_b & p_c \\ q_b & q_c \end{vmatrix} x_a + \begin{vmatrix} p_c & p_a \\ q_c & q_a \end{vmatrix} x_b + \begin{vmatrix} p_a & p_b \\ q_a & q_b \end{vmatrix} x_c = 0$$

Ist

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

die Gleichung einer Geraden $\mathfrak{G}$, so werde dies angedeutet durch:



$$\mathfrak{G} \equiv a_1 b_1 c_1$$

Der Schnittpunkt zweier Geraden

$$\mathfrak{G}_1 \equiv a_1 b_1 c_1, \quad \mathfrak{G}_2 \equiv a_2 b_2 c_2$$

hat die Coordinaten:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Für die Ecken und Seiten des Fundamentaldreiecks haben wir:

$$\begin{array}{llll} A \equiv 1 & 0 & 0 & \equiv BC \\ B \equiv 0 & 1 & 0 & \equiv CA \\ C \equiv 0 & 0 & 1 & \equiv AB \end{array}$$

Die unendlich ferne Gerade der Dreieckebene hat in diesem Coordinatensysteme die Form: a, b, c. Die unendlich fernen Punkte der Dreieckseiten sind:

$$0 \; c - b, \quad -c \; 0 \; a, \quad b - a \; 0$$

Ist $P \equiv p_a$, p_b, p_c ein beliebiger Punkt in der Dreieckebene und treffen seine Ecktransversalen AP die BC in P_a, so haben wir:

$$\begin{array}{llllll} P_a \equiv 0 \; p_b \, p_c & AP \equiv & 0 & p_c & -p_b \\ P_b \equiv p_a \, 0 \; p_c, & BP \equiv & -p_c & 0 & p_a \\ P_c \equiv p_a \, p_b \, 0 & CP \equiv & p_b & -p_a & 0 \end{array}$$

Es sei A' ein solcher Punkt der Dreieckebene, dass

$$A' \equiv \varphi(a) \; \psi(b) \; \psi(c)$$

$\varphi(a)$, $\psi(a)$ seien nach b und c symmetrische Functionen der Seiten a; $\psi(b)$ ist dann nach c und a, $\psi(c)$ nach a und b symmetrisch. Nun ist

$$\begin{array}{llll} A \equiv 1 & 0 & 0 \\ A' \equiv \varphi(a) & \psi(b) & \psi(c) \\ AA' \equiv 0 & \psi(c) & -\psi(b) \end{array}$$

Die Gleichungen der AA', BB', CC' sind also:

$$\frac{x_b}{x_c} = \frac{\psi(b)}{\psi(c)}, \quad \frac{x_c}{x_a} = \frac{\psi(c)}{\psi(a)}, \quad \frac{x_a}{x_b} = \frac{\psi(a)}{\psi(b)}$$

Diesen Gleichungen genügen die Werte:

$$x_a = \psi(a), \quad x_b = \psi(b), \quad x_c = \psi(c)$$

Die AA' treffen sich somit in dem Punkte:

$$Z \equiv \psi(a) \; \psi(b) \; \psi(c).$$

I.

Die Gleichung einer Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene des Dreiecks sei:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Die Gleichung der Normalen von einem Punkte ξ_a auf $\mathfrak{G}$ ist:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & u_a \\ x_b & \xi_b & u_b \\ x_c & \xi_c & u_c \end{vmatrix} = 0$$

$$u_a = a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta$$

$\mathfrak{G}$ treffe BC in A_1. Wir errichten in A_1 auf BC ein Lot. Für BC haben die u_a die Werte:

$$1 \quad -\cos\gamma \quad -\cos\beta$$

Die Normale in A_1 auf BC ist die Gerade:

$$b_1 \cos\gamma + c_1 \cos\beta \quad b_1 \quad c_1$$

Die Normale in B_1 auf CA schneidet die, welche in C_1 auf AB gefällt wird, in

$$A' \equiv \varphi(a) \; \psi(b) \; \psi(c)$$

$$\psi(a) = (b_1 - c_1 \cos\alpha - a_1 \cos\gamma)(c_1 - a_1 \cos\beta - b_1 \cos\alpha)$$

Die AA' treffen sich im Punkte $Z \equiv \psi(a)$. Derselbe wird also auf folgende Weise construirt:

Die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft BC in A_1. Die Normalen in A_1 auf BC bilden ein Dreieck $A'B'C'$. Die AA' schneiden sich in Z.

Denselben Punkt Z findet man auch, wenn man zu demjenigen Punkte der unendlich fernen Geraden, nach welchem die Normalen von den Ecken A auf die Gerade $\mathfrak{G}$ hinzielen, den reciproken Punkt construirt.

II.

H sei der Höhenschnitt des Dreiecks ABC. Wir verlängern AH über A bis A' hinaus so, dass $AA' = a'$ ist. Die durch A' zu den Gegenseiten gezogenen Parallelen bilden ein dem Urdreiecke ähnliches Dreieck. Die Normalen von A' auf die Seiten BC sind:

$$\frac{2F}{a} + a' \quad -a'\cos\gamma \quad -a'\cos\beta$$

Sonach ist:

$$A' \equiv 2F + aa' \quad -aa'\cos\gamma \quad -aa'\cos\beta$$

Die durch A' zu BC gezogene Parallele hat die Form:

$$a^2a' \quad b(2F+aa') \quad c(2F+aa')$$

Die durch B', C' zu CA, AB gezogenen Parallelen treffen sich in

$$A'' \equiv -bc(2F+bb'+cc') \quad ca(2F+bb') \quad ab(2F+cc')$$

Die Coordinaten von A'' entsprechen also den Bedingungen der Functionen φ, ψ. Die AA'' treffen sich in

$$Z \equiv bc(2F+aa')$$

Für

$$a' = \frac{2\varphi F}{a},$$

wo φ eine numerische Constante bezeichnet, wird $Z \equiv bc$, der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke ist der Schwerpunkt des Urdreiecks. Setzt man

$$a' = b' = c' = \frac{2(\varphi-1)F}{a+b+c} = (\varphi-1)\varrho,$$

so erhält man:

$$Z \equiv bc(\varphi a+b+c)$$

$\varphi = 0$ gibt den Spieker'schen Punkt, das Inkreiscentrum des Mittendreiecks.

Ist $P \equiv p_a$ ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks, so treffen sich die Geraden, welche die Mitten der Strecken AP und BC verbinden, in einem Punkte. Die Form desselben ist:

$$bc(2ap_a+bp_b+cp_c)$$

Derselbe Punkt wird erhalten, wenn wir die AH über A nach Aussen um die $P(a)$ verlängern; dann ist

$$a' = \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a}$$

Tragen wir jedoch die a' von A nach Innen auf, so erhalten wir:

$$Z \equiv bc(bp_b+cp_c).$$

III.

J sei das Inkreiscentrum des Dreiecks ABC. AJ werde über A bis A' verlängert, so dass $AA' = a'$ ist. Die Figur gibt:

$$A'(a) = \frac{2F+a'(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}{a}$$

$$A'(b) = A'(c) = -a'\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$-a_1 p_b p_c \quad c_1 p_c^2 \quad b_1 p_b^2$$
$$-a_2 p_b p_c \quad c_2 p_c^2 \quad b_2 p_b^2$$

die Form:

$$-p_b p_c(b_1 c_2 - b_2 c_1) \quad p_b^2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad p_c^2(c_1 a_2 - c_2 a_1)$$

Die AA' treffen sich in

$$Z \equiv p_a^2(c_1 a_2 - c_2 a_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Bestimmen wir statt für eine zweite Gerade für einen zweiten Punkt $Q \equiv q_a$ die $A_b A_c$, so ist der Schnittpunkt A' der beiden Geraden

$$-a_1 p_b p_c \quad c_1 p_c^2 \quad b_1 p_b^2$$
$$-a_1 q_b q_c \quad c_1 q_c^2 \quad b_1 q_b^2$$

von der Form:

$$b_1 c_1(p_b q_c + p_c q_b) \quad a_1 b_1 p_b q_b \quad c_1 a_1 p_c q_c$$

Die AA' treffen sich im Punkte $a_1 p_a q_a$.

Sind die Punkte $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$ und die Gerade $\mathfrak{G} \equiv a_1$ gegeben; so wird die Construction des Punktes $Z \equiv a_1 p_a q_a$ lineal auf folgende Weise ausgeführt:

$\mathfrak{G}$ trifft BC in A_1. Die Schnittpunkte von $P_a B_1$ mit AB, von $P_a C_1$ mit AC seien P_{ac}, P_{ab}. Ebenso construire man für Q die Punkte Q_{ac}, Q_{ab}. Die Gerade $P_{ab} P_{ac}$ schneidet die Q_{ab} in A'. Die AA' begegnen sich in Z.

Wien, August 1879.



XXXIX.

Surface des triangles dont les sommets sont les pieds des bissectrices d'un triangle donné.

Par

Georges Dostor.

---

1. Définitions. Soient (Fig. 1.)

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

les trois côtés d'un triangle ABC, dans lequel nous supposons le côté

$$a > b > c,$$

de sorte que l'angle

$$A > B > C.$$

Menons les bissectrices AA', BB', CC' de ces angles; elles rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB aux points

$$A', \ B', \ C',$$

que nous appellerons les pieds des bissectrices intérieures du triangle.

Tirons aussi les bissectrices AA'', BB'', CC'' des angles extérieurs $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ du triangle; elles coupent les côtés opposés BC, CA, AB aux points

$$A'', \ B'', \ C'',$$

que nous nommerons les pieds des bissectrices extérieures triangle.

Nous nous proposons de calculer, en fonction des côtés a, b, c du triangle ABC, principalement

1° la surface du triangle $A'B'C'$, dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures du triangle ABC (n° 18);

2° les surfaces des trois triangles $A'B''C''$, $B'C''A''$, $C'A''B''$, dont les sommets sont les pieds d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures (n° 17);

3° quelques relations, auxquelles donne lieu la nature de ces bissectrices (n°s 5 et 8).

Afin de simplifier le langage, nous poserons les bissectrices intérieures

$$AA' = \alpha', \quad BB' = \beta', \quad CC' = \gamma';$$

les bissectrices extérieures

$$AA'' = \alpha'', \quad BB'' = \beta'', \quad CC'' = \gamma'';$$

et les distances entre les pieds des bissectrices issues du même sommet

$$A'A'' = \alpha, \quad B'B'' = \beta, \quad C'C'' = \gamma.$$

Afin de donner plus de clarté à notre rédaction, nous établirons d'abord quelques propositions fort simples, connues, mais indispensables pour notre sujet.

2. Déterminons la position du point de rencontre de chaque bissectrice extérieure avec le côté opposé.

Nous disons que

Chaque bissectrice extérieure rencontre le prolongement du côté opposé en un point, qui est situé du côté du plus grand des deux angles, qui, dans le triangle, sont adjacents à ce côté prolongé.

En effet, considérons la bissectrice AA'' de l'angle extérieur $\pi - A$.

Puisque nous avons l'angle $B > C$, il nous vient

$$\frac{B}{2} > \frac{C}{2},$$

et, par l'addition de $\pi + \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ aux deux membres

$$\pi + \frac{A}{2} + B > \pi + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2},$$

ou

$$\pi+\frac{A}{2}+B>\pi+\frac{\pi}{2}.$$

Nous en déduisons

$$\pi>(\pi-B)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right).$$

Il s'ensuit que

La somme des deux angles, que forment, avec le côté AB, le prolongement du côté BC et la bissectrice AA'' de l'angle $\pi-A$, est moindre que deux angles droits; donc la bissectrice extérieure AA'' rencontre le côté BC prolongé en un point, qui est plus rapproché du sommet B que du sommet C.

3. **Segments déterminés par les bissectrices intérieures sur les côtés opposés.** La bissectrice AA' détermine sur le côté opposé BC les deux segments CA' et BA'. Or la propriété connue des bissectrices donne

$$\frac{CA'}{CA}=\frac{BA'}{BA},$$

d'où il vient

$$\frac{CA'}{b}=\frac{BA'}{c}=\frac{CA'+BA'}{b+c}=\frac{a}{b+c}.$$

On en tire

(I) $$CA'=\frac{ab}{b+c},\quad BA'=\frac{ca}{b+c}.$$

On trouve de même, pour les segments déterminés par les pieds des deux autres bissectrices sur les côtés opposés,

(II) $$AB'=\frac{bc}{c+a},\quad CB'=\frac{ab}{c+a};$$

(III) $$BC'=\frac{ca}{a+b},\quad AC'=\frac{bc}{a+b}.$$

4. **Segments déterminés par les bissectrices extérieures sur les côtés opposés.** Puisque l'on a, pour la bissectrice extérieure AA'',

$$\frac{CA''}{CA}=\frac{BA''}{BA},$$

il vient

$$\frac{CA''}{b}=\frac{BA''}{c}=\frac{CA''-BA''}{b-c}=\frac{a}{b-c};$$

d'où on tire

(IV) $$CA''=\frac{ab}{b-c},\quad BA''=\frac{ca}{b-c}.$$

ne que

(V) $$AB'' = \frac{bc}{a-c}, \quad CB'' = \frac{ab}{a-c};$$
et

(VI) $$BC'' = \frac{ca}{a-b}, \quad AC'' = \frac{bc}{a-b}.$$

5. **Distance entre les pieds des bissectrices issues du même sommet.** Nous avons

$$A'A'' = BA' + BA'' = CA'' - CA';$$

remplaçons BA' et BA'' par leurs valeurs (I) et (IV), ou CA'' et CA' par leurs valeurs (IV) et (I); il nous vient l'expression

$$A'A'' = \frac{ca}{b+c} + \frac{ca}{b-c} = \frac{ab}{b-c} - \frac{ab}{b+c} = \frac{2abc}{b^2-c^2}.$$

Nous obtenons donc les valeurs

(VII) $$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{2abc}{b^2-c^2}, \\ \beta &= \frac{2abc}{a^2-c^2}, \\ \gamma &= \frac{2abc}{a^2-b^2}. \end{aligned} \right.$$

6. **Relation remarquable entre ces distances.** Prenons les inverses des valeurs précédentes (VII); nous avons les égalités

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{b^2-c^2}{2abc},$$

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{c^2-a^2}{2abc},$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{a^2-b^2}{2abc},$$

qu'il suffit d'ajouter, pour voir que

(VIII) $$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

7. **Longueurs des bissectrices.** Les deux triangles ABA' et ABA'' nous donnent

$$\frac{AA'}{BA'} = \frac{\sin B}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \frac{AA''}{BA''} = \frac{\sin B}{\cos \frac{A}{2}},$$

ou, en ayant égard aux valeurs (I) et (IV),

$$AA' = \frac{ca \sin B}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}, \quad AA'' = \frac{ca \sin B}{(b-c) \cos \frac{A}{2}};$$

is, puisque

$$a \sin B = b \sin A = 2b \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

expressions deviennent

$$AA' = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}, \quad AA'' = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c}.$$

Les longueurs des bissectrices intérieures sont donc

$$(\text{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}, \\ \beta' &= \frac{2ca \cos \frac{B}{2}}{c+a}, \\ \gamma' &= \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}; \end{aligned} \right.$$

celles des bissectrices extérieures sont

$$) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha'' &= \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c}, \\ \beta'' &= \frac{2ca \sin \frac{B}{2}}{a-c}, \\ \gamma'' &= \frac{2ab \sin \frac{C}{2}}{a-b}. \end{aligned} \right.$$

Ces valeurs peuvent encore s'écrire

$$\text{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, & \alpha'' &= \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{b-c}, \\ \beta' &= \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}, & \beta'' &= \frac{2\sqrt{ca(p-c)(p-a)}}{a-c}, \\ \gamma' &= \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}, & \gamma'' &= \frac{2\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}{a-b}; \end{aligned} \right.$$

où $2p$ représente le périmètre $a+b+c$ du triangle ABC.

8. **Produit des deux bissectrices issues d'un même sommet.** Les premières des formules (IX) et (X), étant multipliées entre elles, nous donnent

$$\alpha'\alpha'' = \frac{4b^2c^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{b^2-c^2} = \frac{2b^2c^2\sin A}{b^2-c^2};$$

nous en tirons, en représentant par S la surface du triangle ABC,

$$\text{(XII)} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha'\alpha'' &= \frac{4bcS}{b^2-c^2}, \\ \beta'\beta'' &= \frac{4caS}{a^2-c^2}, \\ \gamma'\gamma'' &= \frac{4abS}{a^2-b^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces produits expriment les doubles surfaces des triangles $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, qui ont leurs sommets à un sommet du triangle donné et aux deux pieds des bissectrices issues de ce sommet.

Nous avons donc

$$\text{(XIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{AA'A''}{ABC} &= \frac{2bc}{(b+c)(b-c)}, \\ \frac{BB'B''}{ABC} &= \frac{2ca}{(c+a)(a-c)}, \\ \frac{CC'C''}{ABC} &= \frac{2ab}{(a+b)(a-b)}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions les trois expressions (XII) respectivement par a, $-b$ c et prenons les inverses des produits; nous obtenons les égalités

$$\frac{1}{a\alpha'\alpha''} = \frac{b^2-c^2}{4abcS},$$

$$-\frac{1}{b\beta'\beta''} = \frac{c^2-a^2}{4abcS},$$

$$\frac{1}{c\gamma'\gamma''} = \frac{a^2-b^2}{4abcS},$$

qui, étant ajoutées, fournissent la relation

$$\text{(XIV)} \quad \frac{1}{a\alpha'\alpha''} - \frac{1}{b\beta'\beta''} + \frac{1}{c\gamma'\gamma''} = 0.$$

9. **Produit des** [illegible]
elles les premières [illegible]

$$\alpha\beta\gamma = \text{[illegible]}$$

qui revient à

(XV) $\alpha\beta\gamma =$ [illegible]

10. **Produit des trois bissectrices extérieures.** [illegible]
entre elles les deuxièmes [illegible]

$$\alpha''\beta''\gamma'' = \text{[illegible]}$$

qui revient à

(XVI) $\alpha''\beta''\gamma'' =$ [illegible]

Nous avons donc, en divisant (XV) par (XVI),

(XVII) $$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha''\beta''\gamma''} = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \cdot \frac{r}{2},$$

où r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

11. **Nombre des triangles, ayant pour sommets les pieds des bissectrices.** Les pieds des six bissectrices d'un triangle ABC peuvent être pris, trois par trois, comme sommets de triangles. Or les combinaisons, trois à trois, de six points différents sont au nombre de $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ ou de 20; par suite il existe 20 triangles ayant les pieds des six bissectrices pour sommets.

12. **Quatre des triangles, ayant pour sommets les pieds des bissectrices, se réduisent à une droite et ont une surface nulle.**

En effet on sait que 1° les pieds de deux bissectrices intérieures et celui de la bissectrice extérieure, qui est issue du troisième sommet, sont en ligne droite; et que 2° les pieds des trois bissectrices extérieures sont aussi en ligne droite *).

Ainsi les quatre triangles

$$B'C'A'', \quad C'A'B'', \quad A'B'C'', \quad A''B''C''$$

se réduisent chacun à une ligne droite.

*) C. Adams. D[illegible] L[illegible] Trans[illegible] [illegible] Winter[illegible] 1843, pages 30 et 31

13. Il est d'ailleurs facile de démontrer directement que

Les pieds de deux bissectrices intérieures et le pied de la bissectrice extérieure, qui est issue du troisième sommet, sont situés en ligne droite.

Pour prouver, par exemple, que les trois points B', C', A'' appartiennent à une même droite, calculons, en fonction des côtés a, b, c, les valeurs des deux produits

$$AB'.CA''.BC' \quad \text{et} \quad AC'.BA''.CB'.$$

Les valeurs (II), (IV) et (III) nous donnent

$$AB'.CA''.BC' = \frac{bc}{c+a} \cdot \frac{ab}{b-c} \cdot \frac{ca}{a+b},$$

ou

$$AB'.CA''.BC' = \frac{a^2b^2c^2}{(b-c)(c+a)(a+b)}.$$

On trouvera de même, au moyen des valeurs (III), (IV) et (II), que

$$AC'.BA''.CB' = \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ca}{b-c} \cdot \frac{ab}{c+a} = \frac{a^2b^2c^2}{(b-c)(c+a)(a+b)}.$$

Nos deux produits sont donc égaux; par suite les points B', C', A'' sont sur une méme droite.

14. Il est aussi aisé de prouver que

Les pieds des trois bissectrices extérieures appartiennent à une même droite.

Car, si, dans les deux produits

$$AB''.CA''.BC'' \quad \text{et} \quad AC''.BA''.CB''$$

on remplace les facteurs par leurs valeurs (IV), (V) et (VI), on trouvera qu'ils se changent tous les deux dans la même expression

$$\frac{a^2b^2c^2}{(b-c)(a-c)(a-b)},$$

ce qui démontre que les trois points A'', B'', C'' sont situés en ligne droite.

15. **Surface des six triangles tels que $B'C'C''$, dont les sommets sont les pieds B' et C' de deux bissectrices intérieures BB' et CC' et le pied C'' d'une bissectrice extérieure CC''.** Nous avons le triangle

$$B'C'C'' = AB'C' + AB'C'',$$

d'où nous tirons, en divisant par $S = ABC$,

$$\frac{B'C'C''}{S} = \frac{AB'C'}{ABC} + \frac{AB'C''}{ABC}.$$

Mais les deux triangles $AB'C'$ et ABC, ayant un angle commun A sont entre eux comme les produits

$$AC'.AB' = \frac{b^2c^2}{(c+a)(a+b)} \quad \text{et} \quad AC.AB = bc$$

des côtés, qui comprennent l'angle commun, c'est-à-dire que

$$\frac{AB'C'}{ABC} = \frac{bc}{(c+a)(a+b)}.$$

Les deux triangles $AB'C''$ et ABC, ayant deux angles supplémentaires $C''AC'$ et CAB, sont entre eux comme les produits

$$AC''.AB' = \frac{b^2c^2}{(c+a)(a-b)} \quad \text{et} \quad AC.AB = bc$$

des côtés, qui comprennent ces angles, c'est-à-dire que

$$\frac{AB'C''}{ABC} = \frac{bc}{(c+a)(a-b)}.$$

Nous avons donc

$$\frac{B'C'C''}{S} = \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{bc}{(c+a)(a-b)} = \frac{2abc}{(c-a)(a^2-b^2)}.$$

Nous obtenons ainsi, pour les surface de nos six triangles, les expressions suivantes:

$$\text{(XVIII)} \left\{ \begin{array}{ll} B'C'C'' = \dfrac{2abcS}{(c-a)(a^2-b^2)}, & C'B'B'' = \dfrac{2abcS}{(a-b)(a^2-c^2)}, \\[2ex] C'A'A'' = \dfrac{2abcS}{(a-b)(b^2-c^2)}, & A'C'C'' = \dfrac{2abcS}{(b-c)(b^2-a^2)}, \\[2ex] A'B'B'' = \dfrac{2abcS}{(b-c)(c^2-a^2)}, & B'A'A'' = \dfrac{2abcS}{(c-a)(c^2-b^2)}. \end{array} \right.$$

C'est triangles ont pour sommets les pieds de deux bissectrices rectangulaires et le pied de l'une des deux autres bissectrices intérieures.

16. **Surface des six triangles, tels que $B'B''C''$, qui ont pour sommets le pied B' d'une bissectrice intérieure, et les pieds B'' et C'' de deux bissectrices extérieures BB'' et CC''.** La figure nous donne

$$\frac{B'B''C''}{S} = \frac{AB'C''}{ABC} + \frac{AB''C''}{ABC}.$$

Nous venons de trouver que le premier rapport du second membre est égal à

$$\frac{bc}{(c+a)(a-b)};$$

d'ailleurs il est évident que

$$\frac{AB''C''}{ABC} = \frac{AC''.AB''}{AC.AB} = \frac{bc}{(a-b)(a-c)};$$

donc il nous vient

$$\frac{B'B''C''}{S} = \frac{bc}{(a+c)(a-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} = \frac{2abc}{(a-b)(a^2-c^2)}.$$

Nous obtenons ainsi les expressions suivantes:

$$\text{(XIX)} \left\{ \begin{array}{ll} B'B''C'' = \dfrac{2abcS}{(a-b)(a^2-c^2)}, & C'C''B'' = \dfrac{2abcS}{(a-c)(a^2-b^2)}, \\[2ex] C'C''A'' = \dfrac{2abcS}{(b-c)(a^2-b^2)}, & A'A''C'' = \dfrac{2abcS}{(a-b)(b^2-c^2)}, \\[2ex] A'A''B'' = \dfrac{2abcS}{(a-c)(b^2-c^2)}, & B'B''A'' = \dfrac{2abcS}{(b-c)(a^2-c^2)}. \end{array} \right.$$

Ces six triangles ont chacun pour sommets les pieds de deux bissectrices rectangulaires et le pied de l'une des deux autres bissectrices extérieures

17. **Surface des trois triangles $A'B''C''$, $B'C''A''$, $C'A''B''$, qui ont pour sommets le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des deux bissectrices extérieures, non perpendiculaires à la première.** Proposons-nous de calculer la surface du triangle $A'B''C''$.

Nous avons évidemment le triangle

$$A'B''C'' = AB''C'' + BC''A' + CA'B'' - ABC,$$

et, en divisant par $S = ABC$,

$$(1) \qquad \frac{A'B''C''}{S} = \frac{AB''C''}{ABC} + \frac{BC''A'}{ABC} + \frac{CA'B''}{ABC} - 1.$$

Mais les deux triangles $AB''C''$ et ABC, ayant un angle égal A, sont entre eux comme les produits $AB''.AC''$ et $AC.AB$, qui comprennent cet angle égal. Il nous vient, par conséquent et en vertu des égalités (V) et (VI),

[illegible]

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

Les [illegible] par [illegible]

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

On [illegible] de même que

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

[illegible] nous obtenons l'équation

$$\frac{A'B''C''}{S} = [illegible] \quad (1),$$

ou

$$\frac{A'B''C''}{S} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

Mais il est [illegible] que le numérateur du second membre se réduit à [illegible]. Il nous vient donc

$$\frac{A'B''C''}{S} = \frac{2abc}{(b-c)(a-c)(a-b)}.$$

Nous obtenons ainsi l'expression

(XX) $$A'B''C'' = \frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)},$$

et, par analogie

(XXI) $$\begin{cases} B'C''A'' = \dfrac{2abcS}{(c+a)(a-b)(b-c)}, \\[2ex] C'A''B'' = \dfrac{2abcS}{(a+b)(b-c)(a-c)}. \end{cases}$$

18. **Surface du triangle $A'B'C'$, ayant pour sommets les pieds des trois bissectrices intérieures.** Nous avons

$$A'B'C' = ABC - (AB'C' + BC'A' + CA'B'),$$

et, en divisant par $S = ABC$,

(2) $$\frac{A'B'C'}{S} = 1 - \left(\frac{AB'C'}{ABC} + \frac{BC'A'}{ABC} + \frac{CA'B'}{ABC}\right).$$

Les deux triangles $AB'C'$ et ABC, ayant l'angle A commun

sont entre eux comme les produits $AB'.AC'$ et $AC.AB$, qui comprennent cet angle commun. Or, en vertu des égalités (I) et (II) nous avons

$$AB'.AC' = \frac{b^2c^2}{(c+a)(a+b)};$$

et, puisque $AC.AB = bc$, il nous vient

$$\frac{AB'C'}{ABC} = \frac{bc}{(c+a)(a+b)}.$$

On verrait de même que

$$\frac{BC'A'}{ABC} = \frac{ca}{(a+b)(b+c)},$$

$$\frac{CA'B'}{ABC} = \frac{ab}{(b+c)(c+a)}.$$

Nous obtenons ainsi l'égalité

$$\frac{AB'C'}{ABC} + \frac{BC'A'}{ABC} + \frac{CA'B'}{ABC} = \frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Retranchant ces deux quantités égales de l'unité et observant que

$$(b+c)(c+a)(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) - ab(a+b) = 2abc,$$

nous trouvons enfin, en vertu de l'équation (2), que

$$\frac{A'B'C'}{S} = \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

d'où nous tirons

(XXII) $$A'B'C' = \frac{2abcS}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

pour l'expression de la surface du triangle, dont les sommets sont les pieds des trois bissectrices intérieures.

19. L'inspection directe de la figure donne immédiatement

$$A'B''C'' - A'B'C' = B'C''A'' - C'A''B''.$$

Nous avons donc l'égalité

$$A'B'C' = A'B''C'' - B'C''A'' + C'A''B''.$$

Substituons à ces termes les expressions (XXII), (XX) et (XXI), nous obtenons l'identité

$$\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)} = \frac{1}{(b+c)(a-c)(a-b)} - \frac{1}{(c+a)(a-b)(b-c)}$$
$$+ \frac{1}{(a+b)(a-c)(b-c)}.$$

qui revient à

$$(b-c)(a-c)(a-b) = (c+a)(a+b)(b-c) - (b+c)(a+b)(a-c) + (c+a)(b+c)(a-b).$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\text{(XXIII)} \quad (b-c)(c-a)(a-b) + (b-c)(c+a)(a+b) + (c-a)(a+b)(b+c) + (a-b)(b+c)(c+a) = 0.$$

20. **Distances du centre du cercle inscrit aux centres des cercles ex-inscrits.** Soient O le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC; O', O'', O''' les centres des cercles ex-inscrits, qui sont compris respectivement dans les angles A, B, C. Les trois points A, O, O' sont situés en ligne droite.

Il est facile de voir que l'on a

$$p-a = AO\cos\frac{A}{2}, \quad p = AO'\cos\frac{A}{2},$$

d'où l'on tire, en prenant la différence,

$$p-(p-a) = (AO'-AO)\cos\frac{A}{2},$$

ou

$$a = OO'\cos\frac{A}{2}.$$

On a donc les relations

$$\text{(XXIV)} \quad OO' = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}, \quad OO'' = \frac{b}{\cos\frac{B}{2}}, \quad OO''' = \frac{c}{\cos\frac{C}{2}}.$$

21. **Surface des triangles, ayant pour sommets le centre du cercle inscrit et les centres de deux cercles ex-inscrits.** On a la surface du triangle

$$OO''O''' = \tfrac{1}{2}OO''.OO'''.\sin O''OO''',$$

ou, en vertu des égalités (XXIV),

$$OO''O''' = \tfrac{1}{2}bc.\frac{\sin O''OO'''}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Mais il est aisé de voir que

$$\text{l'angle } O''OO''' = BOC = \frac{\pi}{2}+\frac{A}{2},$$

d'où

$$\sin O''OO''' = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2};$$

par suite il vient

(XXV) $$OO''O''' = \tfrac{1}{2}bc \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

On sait que

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}, \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

ce qui donne

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = a\sqrt{\frac{p-a}{p(p-b)(p-c)}} = \frac{a(p-a)}{S}.$$

On trouve donc que

$$OO''O''' = \frac{abc(p-a)}{2S},$$

et, puisque

$$\frac{abc}{2S} = 2R,$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, il vient, en général,

(XXVI) $$\begin{cases} OO''O''' = \dfrac{abc(p-a)}{2S} = 2R(p-a), \\ OO'''O' = \dfrac{abc(p-b)}{2S} = 2R(p-b), \\ OO'O'' = \dfrac{abc(p-c)}{2S} = 2R(p-c). \end{cases}$$

22. **Surface du triangle, ayant pour sommets les centres de cercles ex-inscrits.** Le triangle $O'O''O'''$ est la somme des trois triangles

$$OO''O''', \quad OO'''O', \quad OO'O''.$$

On a, par suite, la surface du triangle

$$O'O''O''' = 2R(p-a+p-b+p-c),$$

ou

(XXVII) $$O'O''O''' = \frac{abcp}{2S} = 2Rp.$$

Ainsi l'aire du triangle, qui a ses sommets aux centres des cercles ex-inscrits, est égale au produit du périmètre du triangle donné ABC, multiplié par le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

23. Détermination directe de l'expression précédente. Nous avons

$$p-c = AO''\sin\frac{A}{2},\quad p-b = AO'''\sin\frac{A}{2}$$

d'ou

$$2p-b-c = (AO''+AO''')\sin\frac{A}{2},$$

ou

$$a = O''O'''\sin\frac{A}{2}.$$

On a donc, en général,

$$\text{(XXVIII)}\qquad O''O''' = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}},\quad O'''O' = \frac{b}{\sin\frac{B}{2}},\quad O'O'' = \frac{c}{\sin\frac{C}{2}}.$$

La surface du triangle

$$O'O''O''' = \tfrac{1}{2}O'O''.O'O'''.\sin O''O'O'''$$

est, en vertu des valeurs (XXVIII) et de

$$\sin O''O'O''' = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2},$$

$$\text{(XXIX)}\qquad O'O''O''' = \tfrac{1}{2}bc\,.\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Mais on sait que

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

d'où

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = a\sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{ap}{S}.$$

Donc il vient, par la substitution dans (XXIX),

$$O'O''O'' = \frac{abcp}{2S} = 2Rp,$$

comme plus haut.

24. **Rapport des triangles $A'B'C'$ et $O'O''O'''$.** Divisons, membre à membre, les égalités

$$A'B'C' = \frac{2abcS}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$O'O''O''' = \frac{abcp}{2S};$$

nous obtenons le rapport

$$\text{(XXX)} \qquad \frac{A'B'C'}{O'O''O'''} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

25. **Rapport des triangles $A'B''C''$ et $OO''O'''$.** Nous avons (n° 17)

$$A'B''C'' = \frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)},$$

et n° (21)

$$OO''O''' = \frac{abc(p-a)}{2S};$$

par suite, nous obtenons, en divisant,

$$\frac{A'B''C''}{OO''O'''} = \frac{4S^2}{(p-a)(b+c)(a-c)(a-b)},$$

ou

$$\text{(XXXI)} \qquad \frac{A'B''C''}{OO''O'''} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c)(a-c)(a-b)}.$$

On trouverait de même que

$$\text{(XXXII)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{B'C''A''}{OO'''O'} &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a)(a-b)(b-c)}, \\ \frac{C'A''B''}{OO'O''} &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)}{2(a+b)(a-c)(b-c)}. \end{aligned} \right.$$

26. **Surface des quadrilatères $OBO'C$, $OCO''A$, $OAO''B$.** Le quadrilatère $OBO'C$ est la somme des deux triangles OBC et $O'BC$, dont les surfaces ont pour mesure

$$\tfrac{1}{2}ar, \quad \tfrac{1}{2}ar',$$

r' étant le rayon du cercle ex-inscrit, qui est situé dans l'angle A.

Mais on sait que

$$S = pr = (p-a)r',$$

d'où on tire

$$r = \frac{S}{p}, \qquad r' = \frac{S}{p-a}.$$

Il vient par conséquent

$$OBO'C = \tfrac{1}{2} aS\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-a}\right) = \frac{a(b+c)S}{2p(p-a)}.$$

Nous avons donc

$$\text{(XXXIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} OBO'C &= \frac{2a(b+c)S}{(a+b+c)(b+c-a)}, \\ OCO''A'' &= \frac{2b(c+a)S}{(a+b+c)\,(c+a-b)}, \\ OAO'''B &= \frac{2c(a+b)S}{(a+b+c)\,(a+b-c)}. \end{aligned} \right.$$

Si nous faisons le produit de ces trois surfaces, nous verrons que

$$\text{(XXXIV)} \quad OBO'C.\,OCO''A\,.\,OAO'''B = \frac{abc(b+c)\,(c+a)(a+b)S}{2(a+b+c)^2}.$$

27. **Expression de la surface du triangle $A'B'C'$, dont les sommets sont les pieds A', B', C' des trois bissectrices intérieures, en valeur des longueurs α', β', γ' de ces bissectrices.** Nous avons trouvé (XXII) que la surface de ce triangle est

$$A'B'C' = \frac{2abcS}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)};$$

mais la formule (XV) nous donne

$$\frac{2abcS}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{4p};$$

il nous vient donc

$$\text{(XXXV)} \qquad A'B'C' = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{2p}.$$

Ainsi la surface du triangle $A'B'C'$ est égale au demi-produit des trois bissectrices intérieures, divisé par le périmètre du triangle donné ABC.

Puisque $S = pr$, cette formule revient à

$$\text{(XXXVI)} \qquad A'B'C' = \frac{\alpha'\beta'\gamma' r}{4S}.$$

28. **Expressions de la surface des triangles $A'B''C''$, $B'C''A''$, $C'A''B''$, dont les sommets sont les pieds A', B'', C''; B', C'', A''; C', A'', B'' [illegible] bissectrice intérieure et des deux bissectrices ex-**

térieures issues des deux autres sommets. La surface du triangle $A'B''C''$ est (XX)

$$A'B''C''=\frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)};$$

mais les valeurs (XI) nous donnent

$$\alpha'\beta''\gamma''=\frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)}\cdot 4(p-a);$$

il nous vient donc, en général

$$\text{(XXXVII)}\quad \begin{cases} A'B''C''=\dfrac{\alpha'\beta''\gamma''}{4(p-a)}, \\[2ex] B'C''A''=\dfrac{\beta'\gamma''\alpha''}{4(p-b)}, \\[2ex] C'A''B''=\dfrac{\gamma'\alpha''\beta''}{4(p-c)}. \end{cases}$$

Puisque $S=(p-a)r'=(p-b)r''=(p-c)r'''$, ces formules reviennent aux suivantes

$$\text{(XXXVIII)}\quad \begin{cases} A'B''C''=\dfrac{\alpha'\beta''\gamma''z'}{4S}, \\[2ex] B'C''A''=\dfrac{\beta'\gamma''\alpha''r''}{4S}, \\[2ex] C'A''B''=\dfrac{\gamma'\alpha''\beta''r'''}{4S}. \end{cases}$$

29. Les égalités (XXXVII) nous donnent

$$\frac{\alpha'\beta''\gamma''}{A'B''C''}+\frac{\beta'\gamma''\alpha''}{B'C''A''}+\frac{\gamma'\alpha''\beta''}{C'A''B''}=4p;$$

mais nous avons, par l'égalité (XXXV).

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{A'B'C'}=4p;$$

par suite nous trouvons que

$$\text{(XXXIX)}\quad \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{A'B'C'}=\frac{\alpha'\beta''\gamma''}{A'B''C''}+\frac{\beta'\gamma''\alpha''}{B'C''A''}+\frac{\gamma'\alpha''\beta''}{C'A''B''}.$$

30. Des formules (XXXVIII) nous tirons

$$r' + r'' + r''' = 4S\left(\frac{A'B''C''}{\alpha'\beta''\gamma''} + \frac{B'C''A''}{\beta'\gamma''\alpha''} + \frac{C'A''B''}{\gamma'\alpha''\beta''}\right);$$

et, comme la formule (XXXVII) nous donne

$$r = 4S \cdot \frac{A'B'C'}{\alpha'\beta'\gamma'},$$

il nous vient la relation

$$\text{(XL)} \qquad \frac{R}{S} = \frac{A'B''C''}{\alpha'\beta''\gamma''} + \frac{B'C''A''}{\beta'\gamma''\alpha''} + \frac{C'A''B''}{\gamma'\alpha''\beta''} - \frac{A'B'C''}{\alpha'\beta'\gamma'},$$

en observant que

$$r' + r'' + r''' - r = 4R.$$

XL.

Distances mutuelles entre les pieds des six bissectrices d'un triangle.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Distances entre les pieds des bissectrices intérieures.** Les pieds des trois bissectrices intérieures sont A', B', C' (Fig. 1.). Posons

$$B'C' = a', \quad C'A' = b', \quad A'B' = c'.$$

Nous nous proposons de calculer l'expression de a' en fonction des côtés

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

du triangle donné ABC.

Le triangle $AB'C'$ nous donne

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\overline{AB'} \,.\, \overline{AC'} \,.\cos A.$$

Mais nous avons trouvé que

$$AB' = \frac{bc}{c+a}, \quad AC' = \frac{bc}{a+b};$$

d'ailleurs on sait que

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

par suite notre égalité revient à

$$a'^2 = \frac{b^2c^2}{(c+a)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} + \frac{bc(a^2-b^2-c^2)}{(c+a)(a+b)},$$

qui peut s'écrire

$$a'^2 = \frac{bc}{(c+a)^2(a+b)^2}[bc(a+b)^2+bc(c+a)^2+(a^2-b^2-c^2)(c+a)(a+b)].$$

Mettons bc en évidence dans le facteur entre crochets; ce facteur devient

$$bc(a^2+2ab+b^2+c^2+2ca+a^2+a^2-b^2-c^2)$$
$$+(a^2-b^2-c^2)(a^2+ab+ac),$$

ou

$$bc(3a^2+2ab+2ca)+(a^2-b^2-c^2)(a^2+ab+ac),$$

c'est-à-dire

$$a^2bc+a(a+b+c)(2bc+a^2-b^2-c^2).$$

Puisque

$$2bc+a^2-b^2-c^2 = a^2-(b-c)^2$$
$$=(a+b-c)(c+a-b),$$

notre facteur entre crochets est donc égal à

$$a[abc+(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)]$$
$$= a[abc+8p(p-b)(p-c)].$$

Nous trouvons ainsi que

$$a'^2 = \frac{abc}{(c+a)^2(a+b)^2}[abc+8p(p-b)(p-c)].$$

On sait que

$$abc = 4RS, \quad p(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p-a} = Sr',$$

où S désigne la surface du triangle ABC, R le rayon du cercle circonscrit, r' le rayon du cercle ex-inscrit, qui est compris dans l'angle A.

Nous avons donc enfin

$$\text{(I)} \qquad a'^2 = \frac{4abcS}{(c+a)^2(a+b)^2}(R+2r'),$$

et, par permutation circulaire,

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} b'^2 = \dfrac{4abcS}{(a+b)^2(b+c)^2}(R+2r''), \\[2ex] c'^2 = \dfrac{4abcS}{(b+c)^2(c+a)^2}(R+2r'''), \end{cases}$$

où r'' et r''' sont les rayons des cercles ex-inscrits, qui se trouvent compris respectivement dans les angles B et C.

2. **Distances entre les pieds des bissectrices extérieures.** Les pieds de ces trois bissectrices sont A'', B'', C''; ils se trouvent situés en ligne droite; et, puisque le côté b est compris entre a et c, le point B'' est situé entre A'' et C''.

Nous poserons

$$B''C'' = a'', \quad C''A'' = b'', \quad A''B'' = c''.$$

Calculons la longueur de la droite $B''C''$.

Par le triangle $AB''C''$ nous avons

$$\overline{B''C''}^2 = \overline{AB''}^2 + \overline{AC''}^2 - 2\overline{AB''} \cdot \overline{AC''} . \cos A;$$

et comme

$$AB'' = \frac{bc}{a-c}, \quad AC'' = \frac{bc}{a-b}, \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

cette égalité revient à

$$a''^2 = \frac{b^2c^2}{(a-c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a-b)^2} + \frac{bc(a^2-b^2-c^2)}{(a-c)(a-b)},$$

ou à

$$a''^2 = \frac{bc}{(a-c)^2(a-b)^2}[bc(a-b)^2+bc(a-c)^2+(a^2-b^2-c^2)(a-c)(a-b)].$$

Le facteur entre crochets égale

$$bc(a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+a^2-b^2-c^2)+(a^2-b^2-c^2)(a^2-ab-ac)$$
$$= abc(3a-2b-2c)+a(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$$
$$= a^2bc-a(b+c-a)(2bc+a^2-b^2-c^2)$$

ou

$$a^2bc - 8a(p-a)(p-b)(p-c)$$

La valeur de a''^2 sera donc

$$a''^2 = \frac{abc}{(a-c)^2(a-b)^2}[abc - 8(p-a)(p-b)(p-c)].$$

Puisque

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} = Sr,$$

il nous vient enfin, et par permutation circulaire,

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} a''^2 &= \frac{4abcS}{(a-b)^2(a-c)^2}(R-2r), \\ b''^2 &= \frac{4abcS}{(b-c)^2(a-b)^2}(R-2r), \\ c''^2 &= \frac{4abcS}{(a-c)^2(b-c)^2}(R-2r). \end{aligned} \right.$$

On en tire

$$\frac{a''}{b-c} = \frac{b''}{a-c} = \frac{c''}{a-b}.$$

3. **Remarque.** Au moyen de ces valeurs, on peut reconnaitre que les trois points A'', B'', C'' sont situés en ligne droite, et que si l'on a $a > b > c$, le point B'' est situé entre A'' et C''.

En effet, posons

$$4abcS(R-2r) = P^2.$$

Nous avons, dans nos hypothèses,

$$a'' = \frac{P}{(a-b)(a-c)},$$

$$b'' = \frac{P}{(b-c)(a-b)},$$

$$c'' = \frac{P}{(a-c)(b-c)}.$$

Nous en tirons

$$\begin{aligned} -a''+b''-c'' &= \frac{P}{(c-a)(a-b)} + \frac{P}{(a-b)(b-c)} + \frac{P}{(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{P(b-c+c-a+a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0; \end{aligned}$$

par suite il vient

$$b'' = c''+a''$$

ou

$$A''C'' = A''B''+B''C'',$$

ce qui prouve que les trois points A'', B'', C'' sont situés en ligne droite, et que le point B'' se trouve placé entre A'' et C''.

4. **Distance entre les pieds et de deux bissectrices, l'une intérieure et l'autre extérieure.** Nous supposons que ces deux bissectri[illegible]tent pas du même sommet du triangle ABC.

$$A''B' = a_2'', \quad A''C' = a_3'';$$
$$B''C' = b_3'', \quad B''A' = b_1'';$$
$$C''A' = c_1'', \quad C''B' = c_2'';$$

et calculons la valeur de $A''B' = a_2''$.

Le triangle $A''B'C$ nous donne

$$\overline{A''B'}^2 = \overline{CA''}^2 + \overline{CB'}^2 - 2\,\overline{CA''}\,.\,\overline{CB'}\,.\cos C.$$

Puisque

$$CA'' = \frac{ab}{b-c}, \quad CB' = \frac{ab}{c+a}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

notre égalité devient

$$a_2''^2 = \frac{a^2b^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2b^2}{(c+a)^2} + \frac{ab(c^2-a^2-b^2)}{(b-c)(c+a)},$$

ou

$$a_2''^2 = \frac{ab}{(c+a)^2(b-c)^2}[ab(c+a)^2 + ab(b-c)^2 + (c^2-a^2-b^2)(c+a)(b-c)].$$

Si nous développons le facteur entre crochets, nous trouverons qu'il revient à

$$ab(c^2+2ca+a^2+b^2-2bc+c^2+c^2-a^2-b^2)+(c^2-a^2-b^2)(-c^2-ca+bc)$$
$$= ab(3c^2+2ca-2bc)+(a^2+b^2-c^2)(c^2+ca-bc)$$
$$= abc^2+2abc(c+a-b)+c(a^2+b^2-c^2)(c+a-b)$$
$$= abc^2+c(c+a-b)(a^2+2ab+b^2-c^2)$$
$$= abc^2+c(c+a-b)(a+b+c)(a+b-c),$$

ou à

$$c[abc + 8p(p-b)(p-c)].$$

Nous avons donc

$$a_2''^2 = \frac{abc}{(c+a)^2(b-c)^2}[abc + 8p(p-b)(p-c)].$$

Si l'on observe que

$$abc = 4RS, \quad p(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p-a} = Sr',$$

on verra enfin que

$$\text{(IV)} \qquad a_2''^2 = \frac{4abcS}{(c+a)^2(b-c)^2}(R+2r').$$

On trouverait de même que

$$(V) \qquad a_3''^2 = \frac{4abcS}{(a+b)^2(b-c)^2}(R+2r').$$

On en déduit, par permutation circulaire,

$$(VI) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_3''^2 &= \frac{4abcS}{(a+b)^2(a-c)^2}(R+2r''), \\ b_1''^2 &= \frac{4abcS}{(b+c)^2(a-c)^2}(R+2r''); \end{aligned} \right.$$

puis

$$(VII) \qquad \left\{ \begin{aligned} c_1''^2 &= \frac{4abcS}{(b+c)^2(a-b)^2}(R+2r'''), \\ c_2''^2 &= \frac{4abcS}{(c+a)^2(a-b)^2}(R+2r'''). \end{aligned} \right.$$

Faisons le produit des égalités (IV) et (V), et prenons la racine carrée des deux membres de l'égalité résultante; nous trouvons que

$$a_1''.a_3'' = \frac{4abcS}{(c+a)(a+b)(b-c)^2}(R+2r').$$

Divisons cette relation par l'égalité (I); nous obtenons l'équation

$$\frac{a_1''.a_3''}{a'^2} = \frac{(c+a)(a+b)}{(b-c)^2},$$

de laquelle nous tirons la relation remarquable

$$(VIII) \qquad \frac{a'^2}{(b-c)^2} = \frac{a_2''.a_3''}{(a+b)(a+c)}.$$

XLI.

Miscellen.

1.

Kurze Replik

an Herrn Dr. T. Żebrawski, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Krakau

von

Maximilian Curtze,
Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Thorn,
Correspondent der Akademie zu Padua.

Im neuesten Hefte des Bullettino Boncompagni (Maggio 1879, S. 135—137) hat Herr T. Zebrawski, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Krakau, einige Ausstellungen an einem Aufsatze gemacht, den ich im Februarheft desselben Bullettino vom Jahre 1871 unter dem Titel veröffentlicht habe: „Sur l'orthographe du nom et sur la patrie de Witelo (Vitellion)"; er hat also acht Jahre gebraucht um dieselben herauszufinden. Ich würde ihm an derselben Stelle antworten, an welcher seine Bemerkungen abgedruckt sind, wenn nicht inzwischen Verhältnisse eingetreten wären, welche eine Mitarbeiterschaft am Bullettino für mich zur Unmöglichkeit machen, und so erlaube ich mir denn, hier meine Gegenbemerkungen zu veröffentlichen, damit es nicht scheinen möge, qui tacet, consentire videtur.

Die erste Ausstellung des Herrn T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., dass ich den Anfang des Vaticanmanuscriptes Codex Urbinas 265 in folgender Weise habe abdrucken lassen:

„Veritatis amatori fratri Woilhelmo de morbeka voytelo"

obwohl nach einer in seinem Besitze befindlichen Photographie darin zu lesen sei „Wilhelmo" und „wytelo" fällt nicht auf mich, sondern auf denjenigen zurück, der mir die fragliche Lesart übermittelte, das ist auf den Fürsten Don Balthasar Boncompagni selbst, aus dessen an mich gerichteten Briefe vom 18. Februar 1869 dieselbe entnommen ist. Fürst Boncompagni steht als Handschriftenkenner und in Bezug auf Exactheit von Angaben in der wissenschaftlichen Welt so hoch, dass gewiss jeder andere als Herr T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., die auf seine Autorität hin begangenen Fehler entschuldigen würde.

Wenn aber Herr T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., weiter die Original-Lesarten des Namens nicht aus den Handschriften, sondern aus Conjecturen entnehmen will, ohne daran zu denken, vielmehr absichtlich verschweigend, dass Witelo sich ebensowohl — und zwar an erster Stelle — einen Thüringer nennt, als einen Polen, so muss ich ihm dafür die Verantwortung ganz allein überlassen. Mag der Name Witek in polnischen Urkunden noch so oft vorkommen, wir wissen bestimmt, dass Witelo als Priester im Kloster Vigogne im Hennegau gelebt hat, wo gewöhnlich polnische Urkunden sich nicht finden dürften, und wir haben als sichere Form des Namens aus den ältesten Handschriften Witelo. Wem soll man denn glauben, den vorhandenen Handschriften, welche naturgemäss sämmtlich auf die Originalhandschrift des Verfassers zurückgehen, von denen es aber Herrn T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., schwer werden sollte, nachzuweisen, dass z. B. eine, etwa die obige Vaticanhandschrift, die Quelle aller gewesen, der Lesefehler der ersten sich demgemäss auf alle übertragen hätte, und die sämmtlich das Witelo an entscheidender Stelle haben, oder Herrn T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., der genau weiss, dass in der Originalhandschrift Witek stand — wahrscheinlich hat sie ihm selbst vorgelegen — und dass also jene Verwechselung von k und lo wirklich stattfand. Freilich meint Herr T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., es habe dem Priester schlecht angestanden sich mit einem Diminutivnamen Witelo von Wito zu benennen, aber Witelo hängt zwar als Diminutivname mit Wito zusammen, kommt jedoch als eigener Taufname und selbst als Name von Priestern in Thüringer Urkunden oft genug vor.

Herr T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., zieht ferner aus den Worten des Witelo (De optica, lib. X. § 74) „in nostra terra, scilicet Poloniae" den Schluss, dass Jemand, der so sage, notwendig ein Pole habe sein müssen. Nötig ist das wohl, absolut genommen, nicht, besonders im Zusammenhange mit den wohlweislich verschwiegenen Worten „Witelo filius Thuringorum et Polonorum"; das habe ich von jeher zugestanden und ist wohl von niemand, am wenigsten von mir, jemals bezweifelt worden, dass Wi-

telo in Polen geboren ist, jedoch, und das sagen die absichtlich unterdrückten Worte deutlich genug, von einem **deutschen** Vater und einer **polnischen** Mutter; Polen musste er also als **terra nostra**, sein Geburtsland, nennen ohne deshalb seine Nationalität als Pole bestimmen zu wollen. Ebenso kann heute noch jeder deutsche Unterthan, der in Polen von deutschem Vater und polnischer Mutter, ja selbst von deutscher Mutter, geboren ist, und solcher giebt es tausendfach, von Polen, als seinem Geburtslande sagen „**terra nostra, scilicet Poloniae**“ und wenn ihn deshalb Herr T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., zu einem Polen machen will, so mag er es tun, der Betreffende würde aber heute wohl lebhaft protestiren.

Für den Nachweis **einer** Stelle, an welcher der Name **Boret**, **nicht Borek**, erwähnt wird, Herrn T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., meinen aufrichtigen Dank. Das sind also die **vielen Stellen**, von welchen die **Biographie universelle** sagt: „**il parle** (nämlich Witelo) **souvent de Borek, qui est encore aujourd'hui un petit village, situé près de Cracovie et précisément à la latitude déssignée de 50 degrés**“, und unglücklicher Weise liegt das von Witelo **ein einziges mal** erwähnte **Boret** nicht bei Krakau, sondern bei Breslau, denn Witelo sagt: „**et huius simile accidit iuxta civitatem Vratislaviae apud nemus villae Boret**“. Das Ganze heisst französische Gründlichkeit, oder hat der Originalcodex des Herrn T. Zebrawski, M. d. A. d. W. z. K., auch hier etwa **Cracoviae** gelesen?

Thorn, 3. September 1879. **M. Curtze.**

2.

Bemerkung über trigonometrische Reihen.

Auf S. 95 im 64. Teil dieser Zeitschrift versucht Herr Appell für einen von mir in Borchardts Journal Bd. 72 bewiesenen Satz einen einfacheren Beweis zu geben.

Es handelt sich darum zu zeigen, dass, wenn für jeden einzelnen Wert von x in einem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$:

$$\mathrm{Lim}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0 \text{ für } n = \infty,$$

alsdann a_n und b_n mit wachsendem n unendlich klein werden.

Herr Appell versteht unter B_n den absolut grössten Wert der Function $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ für die Werte von x im gedachten Inter-

valle und sagt: „cette valeur B_n tend également sur 0 quand n augmente indéfiniment".

Diese Behauptung jedoch, auf welche sich der ganze Beweis des Herrn Appell stützt, ist eine unzulässige und gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Function $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ für alle Werte von x im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ in gleichem Grade gegen 0 convergirt, wenn n in das Unendliche wächst.

Dass mit Hinzuziehung dieser Annahme der Beweis des Satzes leicht geführt werden kann, ist bereits von Herrn Heine in Borchardts Journal Bd. 71. pag. 357. gezeigt worden.

Uebrigens habe ich eine etwas vereinfachende Darstellung meines, auf die Annahme der Convergenz in gleichem Grade sich in keiner Weise stützenden Beweises in den Mathematischen Annalen Bd. 4. pag. 139. gegeben. Eine noch grössere Vereinfachung lässt sich, meines Erachtens, bei der Natur des Gegenstandes nicht erreichen.

Halle a/S., den 23. Sept. 1879. G. Cantor.

3.

Bemerkung über trigonometrische Reihen.

Den Gegenstand der vorigen Bemerkung nehme ich noch einmal auf aus Anlass der Aeusserung des Herrn Cantor, der Schluss, welchen Herr Appell aus dem Verschwinden der Function

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx = B_n \cos(nx + v_n)$$

für $n = \infty$ bei constantem x auf das Verschwinden von B_n macht, sei unzulässig; mit Bezugnahme auf die zuletzt ausgesprochene Ueberzeugung, dass eine grössere Vereinfachung des Beweises für das Verschwinden von a_n und b_n als die in der letzt citirten Arbeit von ihm gegebene nicht zu erreichen sei.

Eine leichte Betrachtung ergiebt, dass in Bezug auf eine beliebige Function $A_n(x)$, deren Maximum B_n, der Schluss nicht richtig sein würde, zugleich aber, dass nur besondere Eigentümlichkeiten der Function Ausnahmen von der gefolgerten Sache bewirken, während das Resultat des Schlusses im allgemeinen zutrifft. An diese Allgemeinheit war natürlich Appell nicht gebunden, indem er die Begründung als leicht zu durchschauen unterliess; er konnte sich an die vorliegende Function halten.

Vergegenwärtigt man sich letztere, so scheinen der Annahme, dass sie jene Eigentümlichkeit besitze, Widersprüche im Ueberfluss entgegen zu stehen, während die Abstraction von vielen Umständen, die nichts zur Sache beitragen, einige redactionelle Schwierigkeiten verursacht. Welcher dann der beste Weg ist, einen Widerspruch nachzuweisen, muss dahingestellt bleiben.

Der folgende Versuch macht daher keinen Anspruch auf irgend welchen Vorzug; jeder neue wird sich wahrscheinlich auf andre Punkte richten; ich habe einen Weg gewählt, welcher direct zur Behauptung von Appell führt.

Bezeichnet c eine beliebige positive Constante, und $c-d^2$ eine kleinere desgleichen, so muss es nach Voraussetzung für jedes x einen Wert $n = n_x$ geben, derart dass für $n > n_x$

$$A_n < c - d^2$$

wird. Für ein beliebiges n unterscheiden sich die x, jenachdem

$$n_x < n \quad \text{oder} \quad n_x \geqq n$$

ist. Beide Classen können nur in abwechselnden Intervallen existiren, und zwar gehören die Grenzpunkte stets zur letztern Classe; aus diesem Grunde ist ein Einzelwert ersterer Classe nicht möglich.

Die Summe der Intervalle letzterer Classe sei $= \omega_n$. Sie kann sich bei wachsendem n nur vermindern oder gleich bleiben, folglich muss sie für $n = \infty$ einen Grenzwert haben, der entweder null oder positiv ist. Der Fall $\lim. \omega_n = 0$ schliesst auch den Fall $\omega_n = 0$ für endliches n in sich, welcher dem Zutreffen unserer Thesis entspricht, den wir jedoch nicht ausschliessen wollen.

Der Fall $\lim. \omega_n = \gamma - \alpha > 0$ widerspricht der Voraussetzung. Sollte dies, sofern ω_n für $n = \infty$ aus unendlich vielen Teilen besteht, nicht sofort deutlich sein, so denke man für jedes n alle Bestandteile zusammengeschoben und die untere Grenze nach α gerückt. Diese eindeutige Bewegung muss auch *finaliter* ein eindeutiges Resultat haben, d. h. es muss jede Grösse zwischen α und γ Grenzwert eines oder mehrerer x sein, und allen diesen x entspricht kein n_x, gegen die Voraussetzung.

Es bleibt nur der Fall übrig:

$$\lim. \omega_n = 0 \tag{1}$$

Demgemäss kann man für hinreichend grosses n setzen:

$$\omega_n < \frac{\beta-\alpha}{R\sqrt{2}} D \quad (D \text{ const.})$$

unter R einen Rechten verstanden. Sei

$$x = \frac{4k}{n}R + \frac{\vartheta_n}{n} - \frac{v_n}{n} \quad \left(-2R \leqq \vartheta_n < 2R\right)$$

dann gehören zur Classe $n_x \geqq n$ alle x, für welche

$$A_n = B_n \cos\vartheta_n \geqq c - d^2 \tag{2}$$

daher ist die Länge des stetig zusammenhangenden Intervalls, wenn man

$$B_n \cos\eta_n = c - d^2 \tag{3}$$

setzt,

$$= \frac{2}{n}\eta_n$$

oder, wenn $B_n < c - d^2$ ist, $= 0$. Die Anzahl dieser gleichen Intervalle wird bestimmt durch

$$n\alpha \leqq 4kR + \vartheta_n - v_n \leqq n\beta$$

ist also bis auf einen echten Bruch

$$= n\frac{\beta-\alpha}{4R}$$

ihre Summe, welche nicht grösser als das Gesammtintervall sein kann,

$$\frac{\beta-\alpha}{2R}\eta_n \leqq \omega_n < \frac{\beta-\alpha}{R\sqrt{2}} D$$

woraus:

$$\vartheta_n \leqq \eta_n < D\sqrt{2} \tag{4}$$

also nach (2):

$$A_n > B_n \cos(D\sqrt{2})$$

Nachdem hiermit ersichtlich ist, dass B_n nicht ins unendliche wachsen kann, dass also zu setzen gestattet ist

$$B_n < e^2 \quad (e \text{ const.}) \tag{5}$$

bestimmen wir nun näher

$$D = \frac{d}{e}$$

dann ergiebt die Ungl. (4):

$$\eta_n < \frac{d\sqrt{2}}{e}$$

woraus folgt:

$$1-\cos\eta_n < \tfrac{1}{2}\eta_n^2 < \frac{d^2}{c^2}$$

und nach (5):

$$B_n(1-\cos\eta_n) < d^2$$

Dazu addirt, nach (3),

$$B_n\cos\eta_n = c - d^2$$

giebt:

$$B_n < c \tag{6}$$

Hiermit ist die Richtigkeit von Appell's Schluss bewiesen. Es folgt dann weiter, dass auch für jedes x

$$A_n < c \tag{7}$$

wird; auch ist umgekehrt (6) Folge von (7), weil B_n Specialwert von A_n ist, wie es von Cantor ausgesprochen ward.

Wir brauchen nun bloss n so gross zu nehmen, dass für irgend eine ganze Zahl k

$$\alpha < \frac{4k\mathrm{R}}{n} < \frac{(4k+1)\mathrm{R}}{n} < \beta$$

wird; dann folgt sofort:

$$a_n < c; \quad b_n < c$$

weil, nach Substitution der 2 Mittelglieder für x, A_n bzhw. in a_n und b_n übergeht.

In Betreff der von Herrn Cantor am Schlusse kund gegebenen Meinung will ich auf eine Vergleichung, welcher Beweis der einfachere sei, nicht eingehen, wol aber Gewicht darauf legen, dass der Appell'sche Weg überhaupt ein möglicher ist, was Herr Cantor offenbar bezweifelt, da er nur Vereinfachung in der von ihm eingeschlagenen Richtung in Betracht zieht. Die Menge der in den fraglichen Schluss eingeschalteten Zwischenglieder ist nur eine scheinbare. Die Vorbetrachtungen bis zur Aufstellung der Gl. (1) enthalten nur, was sich von Anfang überschauen liess; die dann folgende Rechnung ist eine blosse Ausführung des leicht ersichtlichen Umstandes, dass die B_n die kleinere Constante $c-d^2$ nur unendlich wenig, nämlich um die Höhe eines sich unendlich verengenden Segments, übersteigen können, und enthält nicht den geringsten Kunstgriff, so dass sich das Gesammte als Interpretation des angefochtenen Schlusses auffassen lässt.

R. Hoppe.

4.

Schwerpunkt eines Vielecks.

Die folgende constructive Auffindung des Schwerpunkts eines beliebig gegebenen Vielecks beruht auf einer einfachen Methode den Schwerpunkt des Vierecks zu finden, welche mir nicht so bekannt zu sein scheint, als ich früher glaubte annehmen zu dürfen, weil sie sich so leicht darbietet.

A. Schwerpunkt des Vierecks.

Seien A und B die Schwerpunkte der 2 Dreiecke, in welche eine Diagonale das gegebene Viereck teilt. Die Gerade AB schneide die Diagonale in C. Man trage CA auf AB nach BE; dann ist E der Schwerpunkt des Vierecks.

Den Beweis werden Schüler leicht finden.

B. Schwerpunkt des $n$ecks.

Man teile das gegebene $n$eck durch Diagonalen von einer Ecke aus in Dreiecke, nach der Folge des Angrenzens $A_1, A_2, \dots A_{n-2}$, mit den Schwerpunkten $M_1, M_2, \dots M_{n-2}$. Hieraus ergeben sich nach obiger Methode die Schwerpunkte $N_1, N_2, \dots N_{n-3}$ der Vierecke $B_1, B_2, \dots B_{n-3}$, welche durch Anfügung der successiven Dreiecke ($B_k = A_k + A_{k+1}$) entstehen. Zieht man nun die Geraden

$$M_1N_2, \quad M_2N_3, \quad \dots \quad M_{n-4}N_{n-3}$$
$$M_3N_1, \quad M_4N_2, \quad \dots \quad M_{n-2}N_{n-4}$$

und schneiden sich die über einander geschriebenen in $P_1, P_2, \dots P_{n-4}$, so sind letztere die Schwerpunkte der Fünfecke $C_1, C_2, \dots C_{n-4}$, wo $C_k = A_k + A_{k+1} + A_{k+2}$. Zieht man ferner die Geraden

$$M_1P_2, \quad M_2P_3, \quad \dots \quad M_{n-5}P_{n-4}$$
$$M_4P_1, \quad M_5P_2, \quad \dots \quad M_{n-2}P_{n-5}$$

so geben die Durchschnitte der über einander stehenden $Q_1, Q_2, \dots Q_{n-5}$ die Schwerpunkte der Sechsecke $D_1, D_2, \dots D_{n-5}$, wo $D_k = A_k + A_{k+1} + A_{k+2} + A_{k+3}$. So kann man fortfahren bis zum $n$eck.

Zur Construction sind erforderlich die Halbirung von $n-1$ Geraden, nämlich der Anfangs- und Endseite und den $n-3$ Diagonalen, ferner $2(n-2)$ Verbindungen für die Dreiecke, $n-3$ für die Vierecke, $2(n-4), 2(n-5), \dots 2.1$ bzhw. für die Fünfecke, Sechsecke, u. s. w., zusammen mit den Diagonalen $(n-1)(n-2)$ Verbindungen, ausserdem $n-3$ Abtragungen von Linien. R. Hoppe.

5.

Planimetrische Uebungsaufgabe.

Von 2 gegebenen Punkten ausserhalb eines gegebenen Kreises 2 gleiche Secanten zu ziehen, deren Endpunkte einen gegebenen Bogen begrenzen.

Die Formulirung der Aufgabe enthält 2 unnötige Beschränkungen, welche zur Fixirung der Vorstellungen dienen sollen, weil sonst die Anzahl der verschiedenen Lagen übermässig gross sein würde, die sich aber leicht heben lassen, wenn man die Aufgabe in voller Allgemeinheit auffassen will.

Die Aufgabe eignet sich besonders für trigonometrische Lösung mit nachfolgender Construction, namentlich da sich bei ersterer durch angemessene Einführung jede Irrationalität vermeiden lässt.

Seien A, B die 2 gegebenen Punkte, C der Mittelpunkt des Kreises, AM, BN die gesuchten Secanten. Bekannt sind

$$CM = CN = r, \quad CA = r_1, \quad CB = r_2,$$
$$\text{Wkl. } MCN = \alpha, \quad \text{Wkl. } ACB = \beta$$

Man setze, für den Fall wo sich die Secanten nicht schneiden,

$$\alpha + \beta = 2\gamma; \quad \text{Wkl. } ACM = x - \gamma$$
$$u \cos\gamma = (r_1 - r_2)\cos\lambda; \quad u \sin\gamma = (r_1 + r_2)\sin\lambda$$

dann wird x bestimmt durch

$$2r\cos(x - \lambda) = u \qquad (1)$$

Hierbei ist vorausgesetzt $r_1 > r_2$. Schneiden sich die Secanten, so ist α als negativ zu betrachten.

Zur Construction verlängere man AC über C hinaus und trage CB von C aus nach beiden Seiten auf die Gerade, so dass

$$AD = r_1 - r_2; \quad AE = r_1 + r_2$$

wird. Nun mache man

$$\text{Wkl. } CAF = \gamma$$

und ziehe die Lote DF, EG auf AE und AG auf AF, wodurch sich die Schnittpunkte F, G bestimmen. Dann beschreibe man 2 Kreise, deren Durchmesser AF und AG; diese schneiden sich in H. Jetzt ist

$$AH = u$$

und bildet mit AC den Winkel λ. Nachdem u und λ bekannt sind, construirt man x nach Gl. (1) und trägt $x - \gamma$ an CA, $x + \gamma$ an CB, um als zweite Schenkel CM und CN zu finden. R. Hoppe.



6.

Rationales Dreieck, dessen Seiten auf einander folgende ganze Zahlen sind.

Sind die Seiten eines Dreiecks

$$= n-1, \quad n, \quad n+1$$

und n ganze Zahl, so ist der Inhalt

$$\varDelta = \tfrac{1}{4}\sqrt{3n^2(n^2-4)}$$

rational, wenn

$$n^2-4 = 3m^2$$

und m rational ist. Es folgt dann:

$$\varDelta = \tfrac{3}{4}mn$$

Ungerade n können wir sogleich ausschliessen, denn für den Modul 4 würde

$$n^2-4 \equiv 1; \quad 3m^2 \equiv 3$$

sein. Sei also

$$n = 2p; \quad m = 2q$$

dann wird die Bedingungsgleichung:

$$p^2-3q^2 = 1 \tag{1}$$

und

$$\varDelta = 3pq$$

ist immer ganze Zahl.

Setzt man für jede ganze Zahl k

$$p_{k+1} = 2p_k+3q_k; \quad q_{k+1} = p_k+2q_k \tag{2}$$

so wird

$$p^2_{k+1}-3q^2_{k+1} = p^2_k-3q^2_k$$

und p_{k+1}, q_{k+1} eine Lösung von (1), wenn p_k, q_k eine solche ist. Aus (2) erhält man:

$$\begin{aligned} p_{k+1}-2p_k-3q_k &= 0 \qquad & q_{k+1}-p_k-2q_k &= 0 \\ -2p_k+4p_{k-1}+6q_{k-1} &= 0 & -2q_k+2p_{k-1}+4q_{k-1} &= 0 \\ 3q_k-3p_{k-1}-6q_k &= 0 & p_k-2p_{k-1}-3q_{k-1} &= 0 \end{aligned}$$

woraus durch Addition:

$$p_{k+1}-4p_k+p_{k-1} = 0; \quad q_{k+1}-4q_k+q_{k-1} = 0$$

Demnach sind p_k und q_k Lösungen derselben Gleichung. Nun ist

$$: (2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Dies substituirt giebt:

$$p_{k+1}-(2+\sqrt{3})p_k = \frac{p_k-(2+\sqrt{3})p_{k-1}}{2+\sqrt{3}}$$

oder:

$$\{p_{k+1}-(2+\sqrt{3})p_k\}(2+\sqrt{3})^k = \{p_k-(2+\sqrt{3})p_{k-1}\}(2+\sqrt{3})^{k-1}$$

Setzt man für k nach einander 1, 2, ... k und addirt, so erhält man:

$$\{p_{k+1}-(2+\sqrt{3})p_k\}(2+\sqrt{3})^k = p_1-(2+\sqrt{3})p_0$$

Hiervon machen wir Anwendung auf die p und die q, indem wir zuerst $p_1 = 2$; $p_0 = 1$, nachher $p_1 = 1$; $p_0 = 0$ setzen. Nach Division durch $(2+\sqrt{3})^{2k}$ kommt:

$$p_{k+1}(2+\sqrt{3})^{-k}-p_k(2+\sqrt{3})^{-k+1} = -\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^{-2k}$$

$$q_{k+1}(2+\sqrt{3})^{-k}-q_k(2+\sqrt{3})^{-k+1} = (2+\sqrt{3})^{-2k}$$

Dies summirt von $k=0$ bis $k-1$ giebt:

$$p_k(2+\sqrt{3})^{-k+1}-p_0(2+\sqrt{3}) = -(2+\sqrt{3})\frac{1-(2+\sqrt{3})^{-2k}}{2}$$

$$q_k(2+\sqrt{3})^{-k+1}-q_0(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})\frac{1-(2+\sqrt{3})^{-2k}}{2\sqrt{3}}$$

oder, weil $p_0 = 1$, $q_0 = 0$:

$$p_k = \frac{(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k}{2}$$

$$q_k = \frac{(2+\sqrt{3})^k-(2-\sqrt{3})^k}{2\sqrt{3}}.$$

Hiernach haben wir folgende einfach unendliche Reihe von Lösungen:

$$n = (2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k$$

$$\varDelta = \sqrt{3}\,\frac{(2+\sqrt{3})^{2k}-(2-\sqrt{3})^{2k}}{4}$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Die kleinsten Zahlen daraus sind:

k	Seiten			Inhalt
0	3	4	5	2.3
1	13	14	15	$2^2.3.7$
2	51	52	53	$2.3^2.5.13$
3	193	194	195	$2^3.3.7.97$
4	723	724	725	2.3.19.181
5	2701	2702	2703	$2^2.3^2.7.13.193$
6	10083	10084	10085	2.3.41.71.2521

Es bleibt zu beweisen, dass es andere Lösungen nicht giebt. Durch Elimination von q_k, dann von p_k zwischen den Gl. (2) und Substitution von $k-1$ für k findet man:

$$p_{k-1} = 2p_k - 3q_k; \quad q_k = -p_k + 2q_k$$

Nach Gl. (1) ist, wenn p und q nicht negativ sein sollen,

$$p > q\sqrt{3}$$

Wäre aber $p \overline{\gtrless} 2q$, so wäre

$$p^2 - 3q^2 = 1 \overline{\gtrless} q^2$$

folglich ist der Fall nur möglich für $q = 0$ und $q = 1$. Demnach hat man:

$$p_{k-1} = (2-\sqrt{3})p_k + \sqrt{3}(p_k - \sqrt{3}q) > 0$$
$$p_{k-1} = p_k + (p_k - 2q_k) - q_k < p_k$$
$$q_{k-1} = -p_k + 2q_k > 0 \text{ für } q_k > 1$$
$$q_{k-1} = q_k - (p_k - q_k) < q_k$$

Wiederholt man also die Reduction, so bilden $p_k, p_{k-1}, \ldots$ und $q_k, q_{k-1}, \ldots$ zwei beständig abnehmende Reihen, und q muss schliesslich $= 1$ werden, so dass ihm $p = 2$ entspricht. Folglich gehen durch die aufsteigende Ableitung alle Lösungen aus $p = 2$, $q = 1$ hervor.

Bemerkung. Soll die Seitendifferenz nicht notwendig $= 1$ sein, sondern die Seiten überhaupt eine arithmetische Progression bilden, so geht Gl. (1) über in

$$p^2 - 3q^2 = r^2$$

und lässt sich zerlegen in

$$\mu(p+r) = 3\lambda q; \quad \lambda(p-r) = \mu q$$

woraus:

$$\frac{p}{r} = \frac{3\lambda^2 + \mu^2}{3\lambda^2 - \mu^2}$$

Man erhält also die doppelt unendliche Reihe von Lösungen

$$p = 3\lambda^2 + \mu^2$$

mit der entsprechenden Seitendifferenz

$$r = 3\lambda^2 - \mu^2$$

wo λ und μ alle relativen Primzahlen zu durchlaufen haben. Die Seiten sind dann:

$$3(\lambda^2 + \mu^2), \quad 2(3\lambda^2 + \mu^2), \quad 9\lambda^2 + \mu^2$$

und der Inhalt:

$$\varDelta = \tfrac{3}{2}\lambda\mu(3\lambda^2 + \mu^2)$$

R. Hoppe.

7.

Ueber einige principielle Punkte der Infinitesimaltheorie.

Gegen die in T. LV. p. 49. aufgestellten Principien der Infinitesimaltheorie ist zwar von keiner Seite ein Einwand erhoben worden, doch deuten manche erhaltene Aeusserungen darauf, dass es noch Hintertüren giebt um auf den alten unklaren Standpunkt wieder einzulenken. Das folgende hat den Zweck solche Hintertüren zu verschliessen.

Manche, die der gegebenen Definition der Unendlichkleinen und Unendlichgrossen sofort beistimmen, wie denn auch dieselbe schon vorher gegolten hat, wenn gleich häufig die wesentliche Bestimmung als Variable zu beachten vergessen ward, wollen eine, wie sie meinen, unerhebliche Verbesserung im Ausdruck anbringen. Statt zu sagen: Eine Variabele, die über jede Constante hinaus wachsen kann, ist unendlich gross — soll es heissen: kann unendlich gross werden, oder: wenn sie über jede Constante hinaus wächst, wird sie unendlich gross.

Diese Abänderung ist nun, wie ich erklären muss, gar nicht unerheblich; sie wirft die ganze Theorie über den Haufen und löscht das angezündete Licht aus.

Wenn eine Variabele unendlich gross wird, was wird sie dann? Der Sinn des Prädicats bleibt bei einer solchen Formulirung undefinirt. Sagen wir nicht, was unendlich gross (oder klein) ist, so haben wir wieder einen rätselhaften Begriff, und die ganzen Schwierigkeiten, an deren Lösung man Jahrhunderte lang verzweifelte, stellen sich wieder ein.

Zunächst ist ein unüberlegter Einwand abzuweisen, welcher die Abänderung motiviren soll. Man sagt, es sei gegen den Sprachgebrauch und darum unverständlich, dass ein dauerndes Sein durch ein Können definirt würde. Das ist aber nicht der Fall. In der Mathematik und auch sonst werden Fähigkeiten Sachen als dauernde Eigenschaften zugeschrieben, die also durch ein Können definirt sind. Variabel ist, was variiren kann, nicht bloss während es variirt.

In der Tat kann man bei dem Begriff variabeler Grössen stehen bleiben und die unendlichen Grössen als blosse Specialitäten derselben betrachten. Variabel kann eine Grösse sein ohne Grenzen, ohne obere, ohne untere Grenze, zwischen 2 Grenzen. Der zweite Fall ist ohne weiteres der der Unendlichgrossen, der dritte, nur angewandt auf den absoluten Wert, der Fall der Unendlichkleinen.

Dass hiermit das Gebiet der Unendlichen ganz den gewöhnlichen, bekannten Begriffen untergeordnet wird, und der letzte Anschein des Transcendentalen schwindet, leuchtet ein; desgleichen, dass dies nicht der Fall wäre, wenn man jene veränderte Formulirung der Definition unterschieben wollte.

Während aber so das Unendliche seines Nimbus gänzlich beraubt wird, macht es leicht den Eindruck, als könnten wir damit keinen Schritt weiter gelangt sein, als wäre eine Fruchtbarkeit des Begriffs, eine Anwendung, die uns das grosse Gebiet der höhern Analysis erschliesst, undenkbar. Es entsteht also die Frage: Welche Folgen hat die Aussonderung dieses Teilbegriffs, dass wir ihn als wesentlich neues Element der Mathematik mit dem besondern Namen unendliche Grösse belegen können?

Diese Frage beantwortet mit einem Schlage vollständig der a. a. O. so benannte Hauptsatz der Infinitesimaltheorie: Zwei Constante sind einander gleich, wenn sie von einer Variabeln unendlich wenig differiren. Ihm zufolge geht die Gleichheit zweier Grössen wirklich aus dem blossen Nichtvorhandensein zweier untern Grenzen von Variationen hervor, eine Schlussweise die der Mathematik ein neues Organ verleiht und durch dasselbe ein neues, unbegrenztes Gebiet aufschliesst.

So ist die Fruchtbarkeit der Einführung der unendlichen Grössen als blosser Variabeln mit Negirung der einen Variationsgrenze nachgewiesen, noch ehe die Theorie principiell ihre Gestalt gewonnen hat. Es bleibt noch ein Punkt nachzuholen, der Manchen bedenklich machen kann, nämlich die Möglichkeit widersprechender Bestimmung.

Niemand nennt es einen Mangel der Theorie der Gleichungen, dass sich widersprechende Gleichungen aufstellen lassen. Widersprechen sich 2 Gleichungen, so ist entweder die eine oder die andre unzulässig, oder drittens, wenn beide für eine Aufgabe notwendig sind, so giebt es keine Lösung. Dasselbe gilt von Ungleichungen. Sei nun x unendlich gross, habe also keine obere Grenze der Variation, durch eine hinzukommende Gleichung oder Ungleichung werde aber eine obere Grenze bewirkt. Dann findet der herbeigeführte Widerspruch seine Erledigung in einer der genannten 3 Weisen; dennoch würden Verwickelungen entstehen, wenn man nicht festsetzte, dass, wenn einmal $x = \infty$ feststehende Bestimmung sein soll, das Zeichen x für keine gleichwertige Variable gebraucht werden darf, deren Begrenzung vorbehalten bleibt. Hieraus ergiebt sich der Gebrauch besonderer Zeichen für die unendlichen Grössen, welcher Unkundige leicht zu dem Misverständniss verleitet, als lägen die Unendlichen ausserhalb des Gebietes der Endlichen.

Es fragt sich ferner: Kann die Einführung zweier unendlichen Grössen einen Widerspruch ergeben? Nach bisheriger Begriffsbestimmung, d. i. a. a. O. Definition I., ist dies nicht denkbar. Dadurch dass x keine obere Grenze haben soll, wird der Variabeln $\frac{1}{x}$ keine Grenze gesetzt, mithin wäre es zulässig zu setzen:

$$x = \infty; \quad \frac{1}{x} = \infty$$

Hieraus erhellt, dass Definition I. nicht ausreicht, und Definition II, obwol sie anscheinend nichts neues sagt, eine wesentliche Bestimmung hinzufügt. Um letztere analog durch Nichtvorhandensein einer obern Grenze auszudrücken, müsste man sagen:

Mehrere Variabeln sind unendlich gross, wenn keine obere Grenze ihres gleichzeitigen Variirens existirt.

Sollten hiernach x und $\frac{1}{x}$ unendlich gross sein, so müsste für jedes constante c zugleich

$$x > c \text{ und } \frac{1}{x} > c$$

gemacht werden können. Da dies schon für $c = 1$ unmöglich ist, so ist der Widerspruch ersichtlich.

Im Falle eines solchen Widerspruchs unterliegt es, wie oben bemerkt, der freien Wahl, welche der verschiedenen Bestimmungen man festhält, und welche dann consequenterweise unzulässig ist. Hierdurch erklärt sich der Ausdruck „als unendlich gross betrachten", welchen man leicht dahin misdeutet, als wolle man nicht bestimmt aussprechen, ob eine Grösse unendlich gross sei oder nicht. Man betrachtet x als unendlich gross, wenn man im voraus festsetzt, dass jede der Annahme widersprechende spätere Bestimmung die unzulässige sein soll.

Dies kann wieder nur dann geschehen, wenn man bei jeder Relation zwischen x und andern Variabeln x als Unabhängige, die übrigen als Functionen betrachtet. Als solche heisst dann x unabhängig unendlich gross.

Ist nun $f(x)$ gegebene Function der unabhängigen Unendlichgrossen x, so handelt es sich in der Praxis der Analysis darum, aus der Eigenschaft von x auf die von $f(x)$ Schlüsse zu machen. Es entsteht die Frage: Folgt aus $x = \infty$ und der Bestimmung von f, ob $f(x) = \infty$ ist? Nach bisheriger Definition ist dies nicht der Fall; denn aus $x > c$ lässt sich nicht immer entscheiden, ob gleichzeitig $f(x) > c$ sei. Z. B. kann man nach Belieben

$$x > c \text{ und } \operatorname{tg} x > c \text{ oder } < c$$

machen. Obgleich also die Annahme

$$x = \infty, \quad \operatorname{tg} x = \infty$$

keinen Widerspruch enthält, so muss doch nach Einführung von x als unabhängiger Unendlichgrossen die Gleichung $\operatorname{tg} x = \infty$ durch Definition für falsch erklärt werden. Diese neue Definition, wie sie der Praxis der Functionenrechnung entspricht, lautet bekanntlich:

Eine Function $f(x)$ einer unabhängigen Unendlichgrossen x heisst unendlich gross, wenn es für jede Constante c eine Constante a giebt, derart dass, für jedes $x > a$, $f(x) > c$ wird.

Kürzer ausgedrückt kann die Bedingung heissen: — wenn, für jedes hinreichend grosse x, $fx > c$ ist.

Sie steht zur anfänglichen Definition in dem Verhältniss, dass jene für den genannten Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ausreicht, die neue aber durch die Forderung notwendig wird, dass das Prädicat unendlich gross der Function ohne Recurs an das Argument zukomme, dass wir also schlechthin von unendlich grossen Functionen unabhängiger Unendlichgrossen sprechen können.

Die Anwendung des Vorstehenden auf die Unendlichkleinen ist leicht. Nur um nicht die Beziehung auf den absoluten Wert so oft ausdrücken zu müssen, habe ich alles bloss an den Unendlichgrossen durchgeführt.

R. Hoppe.

8.

Beitrag zur Sphärik.

Sind in einem sphärischen Dreieck gegeben die Differenzen der Winkel und der gegenüberliegenden Seiten, also

$$\alpha - a = A; \quad \beta - b = B; \quad \gamma - c = C$$

so setze man:

$$\mu = 45^0 + \frac{A + B + C}{4}$$

$$\cos\lambda = \frac{2\sqrt{\cos\mu \sin\left(\mu - \frac{A}{2}\right)\sin\left(\mu - \frac{B}{2}\right)\sin\left(\mu - \frac{C}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\lambda}; \quad \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\lambda}; \quad \operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\lambda}$$

Dann wird:

$$\alpha = p + \frac{A}{2}; \quad \beta = q + \frac{B}{2}; \quad \gamma = r + \frac{C}{2}$$

$$a = p - \frac{A}{2}; \quad b = q - \frac{B}{2}; \quad c = r - \frac{C}{2}$$

oder:

$$\alpha_1 = 180^0 - \alpha \text{ u. s. w.}$$
$$a_1 = 180^0 - a \text{ u. s. w.}$$

Ich fand diese Auflösung aus der Transformation zweiter Ordnung der sphärischen Dreiecke.

Ist nämlich ein sphärisches Dreieck gegeben mit den Elementen $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$; so existirt stets ein zweites sphärisches Dreieck mit den Elementen $a_1, b_1, c_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, wo

$$\alpha_1 = \frac{\pi + a - \alpha}{2}; \quad \beta_1 = \frac{\pi + b - \beta}{2}; \quad \gamma_1 = \frac{\pi + c - \gamma}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{a_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}; \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{b_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}; \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{c_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Zu bemerken ist noch, dass das transformirte Dreieck dasselbe bleibt, wenn man statt des Grunddreiecks das Supplementardreieck setzt.

Meissel.

Litterarischer Bericht
CCLIII.

Technik.

Die Telegraphen-Technik der Praxis im ganzen Umfange zum Gebrauch für den Unterricht, für Bau- und Maschinen-Ingenieure, Telegraphen- und Eisenbahn-Techniker, Mechaniker, Militär-Ingenieure und für die der Militär-Telegraphie nahestehenden Personen bearbeitet von A. Merling, Kaiserl. Provinzial-Telegraphen-Director z. D. (Oberregierungsrath), ordentl. Lehrer der electrischen Telegraphie am Königlichen Polytechnikum zu Hannover. Mit einer Karte zu Seite 13, zwei lithographirten Tafeln und 530 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Hannover 1879. Carl Meyer. 764 S.

Das Buch besteht aus 3 Teilen; der erste handelt von der Triebkraft, der zweite von den Telegraphenlinien und Leitungen, der dritte von den Telegraphenapparaten. Die Theorie wird im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt. Neben den Erinnerungen an die notwendigsten Theorien werden alle Zweige der praktischen Telegraphie in gleichmässiger Ausdehnung und in streng systematischer Ordnung sowie gehöriger Begründung vom praktischen Standpunkte in solcher Weise behandelt, dass dasselbe ein vollkommen geschlossenes Ganze bildet, dessen Umfang aus nachstehendem Programm der Vorträge über elektrische Telegraphie am Polytechnikum im allgemeinen zu erkennen ist. Hauptrichtung: Einführung in das Wesen aller praktischen Fragen zur Bildung eines selbständigen Urteils über die zweckmässigsten Einrichtungen. Allgemeines: Einleitung. Bedingungen und Gesetze der Entstehung des galvanischen Stromes und seiner Wirkung. Verhalten der offenen und geschlossenen Säule. Elektrochemie. Anforderung

der Praxis. Ermittelung der zweckmässigsten Construction und Combination der Batterie für den Telegraphenbetrieb. Bestimmung und Gesetze der elektromotorischen Kräfte und Stromstärken und specielle Betrachtungen über praktische Combinationen. Princip, Construction und Gesetze der Elektromagnete. Praktische Messinstrumente und deren Construction und allseitiger Gebrauch. Gesetze der Ladungs- und Inductionserscheinungen und deren Nutzen in der Praxis. Linien und Leitungen: Entwicklung sämmtlicher Constructionen, Forderung der Praxis, Constructionsprincipien und Berechnung der Festigkeit und des Widerstandes der verbundenen und der einzelnen Teile, Feststellung der zweckmässigsten Constructionen und Abmessungen, Bauausführung im ganzen Umfange, Verhältniss der Bahn- und Strassen-Verwaltungen zur Telegraphie, Schutz der Telegraphen-Anlagen, Unterhaltung und Reparatur, abweichende Constructionen und Bau im Kriege. Stationen: Einrichtung, Unterhaltung, Verbindungen für gebräuchliche Correspondenzarten; Entwicklungsgeschichte der Apparate; Constructionsprincipien der namhaftesten Apparate älterer und neuerer Zeit. Praktische Forderungen. Specielle Anwendung und Behandlung. Ambulante Stationen und transportable Einrichtungen. Entwerfen telegraphischer Combinationen für gegebene Bedingungen. Ursache, Ermittelung und Beseitigung von Betriebsstörungen. Behandlung der Betriebsmittel im Kriege. Kleine Telegraphie: Sicherheitsdienst für Eisenbahnen und für die Schifffahrt, Signaldienst, Semaphoren, Telephonie, Zeitballstationen, Einrichtungen kleiner Verbindungen zu verschiedenen Zwecken. H.

Neuere Apparate für Naturwissenschaftliche Schulen und Forschung. Gesammelt von M. Th. Edelmann, Privatdocent an der technischen Hochschule und Inhaber des physical-mechanischen Instituts in München. I. Lieferung. Mit 10 lithographirten Tafeln. Stuttgart 1879. Meyer u. Zeller. 96 S.

Die Instrumente, welche hier einzeln beschrieben werden, sind folgende. Scalen- und Ablesefernrohre, Magnetometer mit constanten Ablenkungswinkeln. Neues Hygrometer. Absolutes Galvanometer. v. Beetz's Vibrations-Chronoskop. Apparat zur Zeitbestimmung des freien Falles. Transportables Magnetometer. Weber's Bifilargalvanometer. Spectrallampe. v. Beetz's Vorlesungs-Elektroskop. See-Sonde. v. Beetz's Vorlesungsgalvanometer. Inclinometer. Compensationsgalvanometer. Dieselben sind, wo es nicht anders angegeben ist, vom Verfasser construirt. Die meisten sind abgebildet. H.

Elasticität, Akustik und Optik.

Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes. Von Dr. L. Pochhammer, ord. Professor der Mathematik a. d. Universität Kiel. Kiel 1879. Paul Toeche. 184 S.

Die vorliegende Bearbeitung dieses viel behandelten Gegenstandes gehört zu denjenigen, welche nicht, wie es gewöhnlich geschieht, die Unveränderlichkeit des Querschnitts und seiner normalen Stellung zur Oberfläche zur Voraussetzung machen, wodurch alle Deformation auf Längendehnung reducirt wird, sondern die Elasticitätsgesetze nach allen Dimensionen in Anwendung bringen. Es zeigt sich alsdann und erhält somit seine Begründung, dass in der Tat jene (Navier'sche) Voraussetzung in erster Näherung richtig ist. Als Vorgänger nennt der Verfasser de Saint-Venant und Kirchhoff. Während indes diese die äussern Kräfte nur auf die Endflächen des Stabes wirken liessen, nimmt er auch solche an, die auf die Mantelfläche wirken. Ausserdem ist eine geringe Variation der Dicke des Stabes nicht ausgeschlossen. Die Dicke wird als klein 1. Ordnung gegen die Länge betrachtet, alle Bestandteile der Ausdrücke in Ordnungen gesondert, und die Approximation der Lösung in der Weise vollzogen, dass die Gleichungen von jeder Ordnung für sich erfüllt werden. Der Untersuchung geht als Einleitung eine ausführliche Erörterung der Principien der Elasticitätstheorie voraus. In 4 Abschnitten werden alsdann behandelt: die angenäherten Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des cylindrischen Stabes; das Gleichgewicht des cylindrischen vollen Stabes mit kreisförmigem Querschnitt; der Hohlcylinder mit kreisförmigem Querschnitt; die angenäherten Differentialgleichungen für gewisse Fälle des ursprünglich gekrümmten Stabes. H.

Zur Lere von den Klängen der Konsonanten. Von Prof. Dr. G. Michaelis. Berlin 1879. Barthel u. Co. 63 S.

Die Bestimmung der Tonhöhe der Laute, welche von der Vibration der Stimmbänder unberührt besteht, ist eins der Mittel, wodurch man versuchen kann die Laute in ihrer Eigenheit objectiv zu fixiren; und so wird sie auch in der vorliegenden Schrift aufgefasst, welche sich durchaus nicht auf den angekündigten Gegenstand beschränkt, sondern von der Frage der objectiven Unterscheidung der Laute im ganzen handelt. Jene Tonhöhe mag ein secundär begleitendes Accidens sein, von welchem bei festgestalteter Theorie nicht die Rede sein würde; jetzt aber, wo die Untersuchung noch sehr neu und zu keinem sichern Resultate gelangt ist, lässt sich ihre Zuziehung nicht

Nouvelle Correspondance Mathématique rédigée par Eugène Catalan, ancien élève d'École Polytechnique, Docteur ès Sciences, Professeur à l'Université de Liége, etc. avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Edouard Lucas. Tome cinquième. Liége 1879. E. Decq.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte an Abhandlungen ist folgender:

H. Brocard: Ueber die Frequenz und Totalität der Primzahlen. — S. Realis: Note über einige unbestimmte Gleichungen (Schluss). — E. Lucas: Fragen aus der elementaren Geometrie. — A. Laisant: Ueber den Polarplanimeter von Amsler. — P. Mansion: Elementarer Beweis der Stirling'schen Formel, nach J. W. L. Glaisher. — C. Le Paige: Ueber die Multiplication der Determinanten. — H. Van Aubel: Ueber die Curven 3. Grades. — P. Mansion: Bemerkungen über die arithmetischen Sätze von Fermat. — E. Catalan: Einige Identitäten. — Bombled: Ueber die Reihe $1+2^px+3^px^2+\ldots$ — Desboves: Auflösung gewisser unbestimmter Gleichungen von höherm als 2. Grade. — S. Realis: Eine Frage unbestimmter Analytik. — E. Catalan: Ueber eine Reihe ungerader Zahlen. — G. de Longchamps: Ueber die Conchoidalen. — S. Realis: Arithmetische Sätze. — Jamet: Ueber die Geometrie der Kugel. — Laisant und Beaujeux: Einige Consequenzen der Sätze von Fermat und Wilson. — E. Lucas: Aufgaben über die Normalen der Ellipse. — E. Lucas: Ueber die biquadratische unbestimmte Analytik. — G. Dostor: Schwerpunkt der Fläche eines beliebigen Vierecks. — G. Oltramare: Transformation der linearen Formen der Primzahlen in quadratische (Auszug). H.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 2me série. Bruxelles. F. Hayez.

Der Inhalt der letzten 15 Bände, beginnend 1871 mit dem 40. Jahrgang und dem 31. Bande, an mathematischen Abhandlungen ist folgender.

31. Catalan: Ueber die Riccati'sche Gleichung.

32. De Tilly: Note über das Rollen der Walzen und Räder auf unterstützender Ebene.

33. Orloff: Ueber die reciproken Differentialgleichungen. — Gilbert: Ueber die Anwendung der Imaginären in der Untersuchung der Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. — Folie: Ueber die

Berechnung der mittlern Dichtigkeit der Erde nach Beobachtungen von Airy. — Meerens: Die Stimmgabel und die vereinfachte musikalische Notation. — Gilbert: Ueber einen von Catalan erhobenen Einwand.

34. Mansion: Note über die singularen Lösungen. — Catalan: Note über eine Formel von Botesu. — Saltel: Ueber einige geometrische Fragen.

35. De Tilly: Note über die Formel, welche die Summe der hyperbolischen Logarithmen der $x-1$ ersten Zahlen in convergenter Reihe darstellt. — Saltel: Sätze betreffend die Curven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten, deren 2 die circularen Punkte sind, und die Elasticitätsfläche. — De Tilly: Note über die gleitenden momentanen Axen und die Centralaxen in einem festen Körper. — Saltel: Ueber die osculirende Kugel und über die Flächen mit vielfachen Punkten. — Gilbert: Berichtigung in Betreff einer früheren Abhandlung: „Ueber die Existenz der Derivirten bei den stetigen Functionen.“

36. Gilbert: Untersuchungen über die Entwickelung der Function Γ. — Genocchi: Brief an Ad. Quetelet, Secretär der Akademie, über verschiedene mathematische Fragen. — Gilbert: Bemerkungen über 2 Noten von Genocchi bezüglich auf die Entwickelung der Function $\log \Gamma x$. — De Tilly: Note über die mechanische Aehnlichkeit in der Bewegung der festen Körper überhaupt und insbesondere in der Bewegung der von gezogenen Geschützen geworfenen Geschosse. — Mansion: Note über Saltel's arguesianische Transformationen. — Folie: Note über einige geometrische Sätze.

37. Catalan: Bemerkungen über die Curven- und Flächentheorie. — Folie: Erweiterung der dem Pascal'schen analogen Sätze auf Curven, die auf beliebige Flächen gezeichnet sind.

38. Saltel: Allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung der Ordnung eines geometrischen Ortes ohne Rechnung. — Folie: Einige neue Sätze über die doppelt gekrümmten Curven 3. Grades. — De Tilly: Ueber die Verallgemeinerung der Binet'schen Formel. — Simons: Einige Betrachtungen über das Malfatti'sche Problem. — Mansion: Beweis der charakteristischen Eigenschaft der linearen Differentialgleichungen. — Folie: Einige neue Sätze über die doppelt gekrümmten Curven 4. Ordnung. — Plateau: Ueber eine arithmetische Belustigung. — Catalan: Note über das Malfatti'sche Problem.

39. Reinemund: Ueber die Gleichung der Epicykloide. — Houzeau: Fragmente über die numerische Rechnung.

40. Saltel: Ueber die Bestimmung der Singularitäten der Schnittcurve zweier Flächen, die μ Punkte gemein haben $\left(\mu \leqq 4\right)$. — Reinemund: Sätze über die regelmässigen Vielecke und Summation einiger trigonometrischer Reihen.

41. Folie. Note über die Transformation der Coordinaten und über die Vorzeichen der Winkel und Distanzen in der analytischen Geometrie. — Saltel: Verallgemeinerung des Satzes von Desargues. — Namur: Logarithmentafeln zu 12 Decimalen bis 434 Millionen. Nebst Einleitung von Mansion. — Le Paige: Note über die Gleichung $xy''+ky'-y=0$.

42. Saltel: Neue Methode zur Bestimmung der Ordnung eines geometrischen Ortes definirt durch algebraische Gleichungen. — Anwendung des Zerlegungsgesetzes. — Ueber die Formel, welche die Anzahl der Kegelschnitte eines Systems angiebt, das einer fünften Bedingung genügt. — Le Paige: Note über die Transformation der Coordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes.

43. Plateau: Einige Beispiele merkwürdiger Unstetigkeiten in der Analysis. — Saltel: Anwendungen der Methode der analytischen Correspondenz und der Zerlegung auf gewisse doppelt gekrümmte Curven, namentlich auf die Bestimmung der Singularitäten des Ortes der Mittelpunkte der osculirenden Kugeln einer gegebenen Curve. — Ueber die Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Punkte zweier Curven. — Mansion: Note über die homogenen Differentialgleichungen und über die Clairaut'sche Gleichung. — Le Paige: Bemerkung über die Theorie der periodischen Kettenbrüche. — Ghysens: Ueber die polaren Subnormalen und die Krümmungsradien der ebenen Linien. — Boset: Sätze betreffend die Brennpunkte der Kegelschnitte. — Folie: Ueber die Evolution, oder neuer Fundamentalsatz in der Theorie der Kegelschnitte und Flächen 2. Grades, und dessen Erweiterung auf höhere Curven und Flächen.

44. Lagrange: Vom Einfluss der Gestalt der Körper auf ihre Anziehung. — Le Paige: Ueber einige Punkte der höhern Geometrie. — Ueber einige Eigenschaften der simultanen quadratischen Invarianten zweier binärer Formen. — Note über Erweiterung der Theorie der Involution und Homographie. — Mansion: Note über eine Differentialgleichung von Jacobi. — Ghysens: Ueber die Bestimmung der Volumina und Areale. — Catalan: Ein neues Wahrscheinlichkeitsprincip. — Folie: Erweiterung des Begriffs des anharmonischen Verhältnisses.

45. Ghysens: Ueber einige geometrische Formeln und deren



Anwendung auf algebraische Curven. — Catalan: Bemerkungen über die Theorie der kleinsten Quadrate. — Le Paige: Ueber einige Anwendungen der Theorie der algebraischen Formen auf die Geometrie. — Saltel: Note über die neuen Entwickelungen, zu welchen die Anwendung der Methode der analytischen Correspondenz führt. — Sautreaux: Beweis zweier, dem Pascal'schen planimetrischen Satz analoger stereometrischer Sätze. E.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel V. Amsterdam 1879. Weytingh en Brave.

Der Inhalt ist folgender.

H. Onnen: Bemerkungen betreffend die wesentlichen Gleichungen der ebenen Curven (Forts.). — D. J. A. Samot: Princip der Lebensversicherungswissenschaft. — F. J. van den Berg: Beitrag zur Lösung einer Frage aus der Zahlenlehre. — H. Kamerlingh Onnes: Ueber die relative Bewegung. — A. W. Grasshaar: Die Grundformeln der Goniometrie. — P. C. F. Frowein: Eine bekannte Formel von Clausius. — G. Schouten: Einiges über die Anzahl der Ziffern in den Repetenten. — C. L. Landré: Ein Wort über die Einhüllende eines Systems krummer Linien. — D. Bierens de Haan: Entwickelung gleichnamiger Potenzen.

Ausserdem erhält dieser Band ein Verzeichniss von mathematischen Journal-Artikeln nach Gegenständen geordnet (leider mit sehr vielen Druckfehlern). H.

40. Saltel: Ueber die Bestimmung der Singularitäten der Schnittcurve zweier Flächen, die μ Punkte gemein haben $\left(\mu \overline{\gtrless} 4\right)$. — Reinemund: Sätze über die regelmässigen Vielecke und Summation einiger trigonometrischer Reihen.

41. Folie. Note über die Transformation der Coordinaten und über die Vorzeichen der Winkel und Distanzen in der analytischen Geometrie. — Saltel: Verallgemeinerung des Satzes von Desargues. — Namur: Logarithmentafeln zu 12 Decimalen bis 434 Millionen. Nebst Einleitung von Mansion. — Le Paige: Note über die Gleichung $xy''+ky'-y=0$.

42. Saltel: Neue Methode zur Bestimmung der Ordnung eines geometrischen Ortes definirt durch algebraische Gleichungen. — Anwendung des Zerlegungsgesetzes. — Ueber die Formel, welche die Anzahl der Kegelschnitte eines Systems angiebt, das einer fünften Bedingung genügt. — Le Paige: Note über die Transformation der Coordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes.

43. Plateau: Einige Beispiele merkwürdiger Unstetigkeiten in der Analysis. — Saltel: Anwendungen der Methode der analytischen Correspondenz und der Zerlegung auf gewisse doppelt gekrümmte Curven, namentlich auf die Bestimmung der Singularitäten des Ortes der Mittelpunkte der osculirenden Kugeln einer gegebenen Curve. — Ueber die Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Punkte zweier Curven. — Mansion: Note über die homogenen Differentialgleichungen und über die Clairaut'sche Gleichung. — Le Paige: Bemerkung über die Theorie der periodischen Kettenbrüche. — Ghysens: Ueber die polaren Subnormalen und die Krümmungsradien der ebenen Linien. — Boset: Sätze betreffend die Brennpunkte der Kegelschnitte. — Folie: Ueber die Evolution, oder neuer Fundamentalsatz in der Theorie der Kegelschnitte und Flächen 2. Grades, und dessen Erweiterung auf höhere Curven und Flächen.

44. Lagrange: Vom Einfluss der Gestalt der Körper auf ihre Anziehung. — Le Paige: Ueber einige Punkte der höhern Geometrie. — Ueber einige Eigenschaften der simultanen quadratischen Invarianten zweier binärer Formen. — Note über Erweiterung der Theorie der Involution und Homographie. — Mansion: Note über eine Differentialgleichung von Jacobi. — Ghysens: Ueber die Bestimmung der Volumina und Areale. — Catalan: Ein neues Wahrscheinlichkeitsprincip. — Folie: Erweiterung des Begriffs des anharmonischen Verhältnisses.

45. Ghysens: Ueber einige geometrische Formeln und deren

Anwendung auf algebraische Curven. — Catalan: Bemerkungen über die Theorie der kleinsten Quadrate. — Le Paige: Ueber einige Anwendungen der Theorie der algebraischen Formen auf die Geometrie. — Saltel: Note über die neuen Entwicklungen, zu welchen die Anwendung der Methode der analytischen Correspondenz führt. — Sautreaux: Beweis zweier, dem Pascal'schen planimetrischen Satz analoger stereometrischer Sätze. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel V. Amsterdam 1879. Weytingh en Brave.

Der Inhalt ist folgender.

H. Onnen: Bemerkungen betreffend die wesentlichen Gleichungen der ebenen Curven (Forts.). — D. J. A. Samot: Princip der Lebensversicherungswissenschaft. — F. J. van den Berg: Beitrag zur Lösung einer Frage aus der Zahlenlehre. — H. Kamerlingh Onnes: Ueber die relative Bewegung. — A. W. Gravelaar: Die Grundformeln der Goniometrie. — P. C. F. Frowein: Eine bekannte Formel von Clausius. — G. Schouten: Einiges über die Anzahl der Ziffern in den Repetenden. — C. L. Landré: Ein Wort über die Einhüllende eines Systems krummer Linien. — D. Bierens de Haan: Entwickelung gleichnamiger Potenzen.

Ausserdem erhält dieser Band ein Verzeichniss von mathematischen Journal-Artikeln nach Gegenständen geordnet (leider mit sehr vielen Druckfehlern). H.

Rosenkranz, P. H., d. Indicator u. s. Anwendg. 3. Afl. Berlin, Gärtner. 4 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Diesterweg's, A., popul. Himmelsk. u. astronom. Geographie. Hrsg. v. F. u. C. Strübing. 10. Afl. 1. Lfg. Berlin, Enslin. 1 Mk.

Drechsler, A., Ergebn. v. funfzigjähr. Beobacht. d. Witterung zu Dresden. Dresden, Baensch. 10 Mk.

Friesenhof, Frhr. v., d. Wetterlehre. Wien, Faesy & Fr. 2 Mk. 40 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronom., f. 1881 m. Ephemeriden d. Planeten (1) — (187) f. 1879. Red. v. W. Förster u. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Jahrbücher d. k. k. Central-Anstalt f. Meteorologie u. Erdmagnetismus. J. 1876. Neue Folge. 13. Bd. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Opelt, O. M., der Mond. Mit 1 Karte. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Physiognomie d., d. Mondes. Von Asterios. Nördlingen, Beck. 2 Mk.

Sternfreund's, G., astronom. Führer. Allg. Thl. München, Liter.-artist. Anstalt. 1 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 14. J. 1. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Pfeil, L. Graf v., komet. Strömungen auf d. Erdoberfläche. Berlin, Hempel. 6 Mk.

Physik.

Ballauf, L., d. Grundlehren d. Physik. 2. Lfg. Langensalza, Beyer & S. 1 Mk.

Crüger, J., Grundzüge d. Physik. 19. Afl. Leipzig, G. W. Körner. 2 Mk. 10 Pf.

Riecke, E., üb. d. ponderomotorische Elementargesetz d. Elektrodynamik. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Riess, P. Th., Abhandl. z. d. Lehre v. d. Reibungselektric. 2. Bd. Berlin, Hirschwald. 5 Mk.

Wrobel, E., d. Physik. Rostock, Werther. 2 Mk. 40 Pf.

Wüllner, A., Compend. d. Physik. 2 Bde. Leipzig, Teubner. à 9 Mk. 60 Pf.

Vermischte Schriften.

Berichte üb. d. Verhandl. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Cl. 1878. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Müller, J. B., Anleitg. z. Flächen-, Körper- u. Festigkeits-Berechng. Aarau, Sauerländer. 2 Mk.

Sitzungsberichte d. math.-physik. Cl. der k. b. Akad. d. Wissensch. zu München. 1879. 1. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissensch. Mathemat.-naturw. Cl. J. 1878. 1. Abth. 7. Hft. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 60 Pf.

— dass. 2. Abth. 8. Hft. Ebd. 5 Mk.

Wallentin, F., Maturitätsfragen aus d. Mathematik. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 60 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. v. O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. Suppl. z. hist.-lit. Abth. d. 24. Jhg. Leipzig, Teubner. 5 Mk.



Litterarischer Bericht
CCLIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Nicolaus Coppernicus aus Thorn über die Kreisbewegungen der Weltkörper. Uebersetzt und mit Anmerkungen von Dr. C. L. Menzzer. Durchgesehen und mit einem Vorwort von Dr. Moritz Cantor. Herausgegeben von dem Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. Thorn 1879. Ernst Lambeck. 429 S.

Bei Gelegenheit der vierten Säcularfeier der Geburt von Coppernicus ist diese erste deutsche Uebersetzung seines Hauptwerks: „De revolutionibus orbium caelestium" — von dem genannten Verein veranstaltet worden. Was durch die Ausgabe geleistet ist, hat die Vorrede eher noch zu schwach betont als übertrieben. Wenn dieselbe sagt: „Man erwarte von uns keine Auseinandersetzung des Zustandes der Sternkunde, wie er vor, wie er nach Coppernicus sich zeigte. Wir mahnen nur an die Notwendigkeit, dieser Veränderung eingedenk zu sein. Wir fordern unsere Leser auf sich selbst die Frage zu beantworten, ob ohne Coppernicus ein Kepler, ein Galilei, ein Newton, ein Laplace, ein Gauss möglich gewesen wären" — so entspricht dies der Vorstellung, als liesse sich der zu einer Zeit stattfindende Zustand der Astronomie in einen Gedanken zusammenfassen, den man sich nur zu vergegenwärtigen hätte, und den eine Vorrede hätte darlegen können. Durch das Werk selbst, dessen Verständniss die Uebersetzung sehr erleichtert, ist die Epoche in der Entwickelung der Wissenschaft in reichster Entfaltung vor Augen gestellt; keine Geschichte vermöchte sie so deutlich zu charakterisiren, als sie der Leser hier charakterisirt vorfindet. So leicht es auch ist anzugeben, dass Coppernicus die Bewegung der Gestirne durch eine dreifache

Bewegung der Erde, die Präcession durch eine Bewegung der Erdaxe erklärte (d. h. objectivirte), und welcher Art diese Bewegung war, so bleiben noch soviel Fragen übrig, zu denen er sich ohne Kenntniss der Mechanik auf die verschiedenste Art verhalten konnte, dass ziemlich das ganze Buch dazu gehört darüber Auskunft zu geben. Dem Buche geht im Original, hier in deutscher Sprache, voraus eine anonyme Vorrede an den Leser über die Hypothesen dieses Werkes, dann ein Brief von Nicolaus Schonberg, Cardinal von Capua, an Nicolaus Copernicus, aus Rom, worin er diesen ermuntert, das seit vielen Jahren fertige Werk zu veröffentlichen; dann die Vorrede von Nicolaus Copernicus zu den Büchern der Kreisbewegung an den Heiligsten Herrn, Papst Paul III., eine Widmungsschrift, in welcher er seine Motive ausspricht: er habe gezweifelt, ob es nicht ratsamer sei, gleich Pythagoras seine Lehre als Geheimniss im engern Kreise seiner Bekannten zu behalten, bis er sich auf Zureden des Cardinals Schonberg und des Bischofs Tidemann Giese zur Veröffentlichung entschlossen habe; dem Papste gegenüber habe er sich vielmehr zu rechtfertigen, dass er von den Lehren der Mathematiker abgewichen sei, diese habe er verlassen müssen, weil sie unter einander nicht übereinstimmten, und aus keiner ihrer Annahmen etwas Gewisses festzustellen vermöchten, was unzweifelhaft den Erscheinungen entspräche. Am Schlusse hinzugefügt sind die Anmerkungen von Menzer, welche sehr reichhaltige litterarische Nachrichten bezüglich auf Stellen des Werks geben. Hauptsächlich die zweite dieser Anmerkungen, welche eine Aeusserung von A. v. Humboldt citirt, giebt Anlass zu constatiren, dass Coppernicus nicht beteiligt ist an einer heutzutage sehr verbreiteten Unklarheit, die sich auch in Humboldt's Worten verrät, welche nämlich in der veränderten Weltanschauung einen Glaubenswechsel, die Vertauschung eines Dogmas mit einem neuen Dogma sieht. Es wird wol niemand bestreiten, obwol es oft ausser Augen gesetzt wird, dass jeder Punkt im Raume und jede Richtung für sich gleich, alle Bewegung nur relativ ist, dass der Mathematiker volle Freiheit hat sein Coordinatensystem zu legen wie er will, dass es sich dabei nie um eine Wahrheit handelt, sondern der Erfolg der Rechnung stets allein den Vorzug ausmacht, und dass ohne Hypothese keine Theorie, kein mathematischer Satz möglich ist. In Bezug auf die Theorie des Coppernicus, welche rein kinematisch ist, d. h. das Kraftwirkungsgesetz unberührt lässt, tritt dies besonders deutlich hervor. Sämmtliche Aeusserungen des Coppernicus, sowol im Buche wie in der Widmungsschrift, entsprechen dem Bewusstsein dieser Relativität und sind fern von jeder Einmischung eines Glaubens an eine absolute, einzig wahre Basis der Himmelskinematik. Er sagt z. B., es sei angemessener, die Ekliptik als das Grössere zur Basis der veränderlichen Stellung des Aequators

als des Kleinern zu nehmen als umgekehrt, ist sich demnach der Freiheit das eine wie das andre zu tun bewusst. Hierdurch unterscheidet er sich als ein Mann der exacten Wissenschaft von dem in der Gewohnheit befangenen Laien, der nachdem er die neue Lehre aufgenommen hat, nur die Objecte wechselt und in der neuen Anschauung ebenso befangen bleibt; aber nicht bloss vom Laien, sondern auch vom gleichdenkenden Volksbelehrer und kosmischen Phantasten. Anders urteilt Humboldt über Coppernicus; er will ihn durchaus zum Verkünder eines neuen Dogmas machen. Er tadelt an der anonymen Vorrede (als deren Verfasser Andreas Osiander genannt wird), dass sie die Aufstellung der planetarischen Bewegung der Erde zu einer Hypothese herabwürdigt, was im Widerspruche mit den Worten der Zueignung an den Papst stehen soll. Es ist gewiss richtig, dass die Tendenz der Vorrede war, Coppernicus und sein Werk vor priesterlicher Verfolgung zu bewahren, und zwar nicht nur, weil einer der letzten Sätze an diese Absicht erinnert, sondern auch weil der betonte Gegensatz zwischen Hypothese und Wahrheit keinen klaren Sinn haben würde, wenn nicht letztere auf die Kirchenlehre hindeutete. Allein denselben Gegensatz macht nun Humboldt selbst: Coppernicus soll die Unbeweglichkeit der Sonne nicht als Hypothese, sondern als Wahrheit, d. i. als Glaubenssatz gelehrt haben, so dass dann seine Lehre wirklich (wie heutzutage viele logisch beschränkte Köpfe meinen), wo nicht mit einer Kirchenlehre, doch mit einem von den Kirchenlehrern geteilten Glauben im Conflict gewesen wäre. Wie Humboldt so etwas aus den an den Papst gerichteten Worten herauslesen konnte, ist schwer zu begreifen. Factisch hat auch Paul III. keine Ketzerei darin gefunden, sondern erst spätere Päpste. Was die Vorrede sagt, insbesondere über die Tätigkeitsweise des astronomischen Forschers, ist zutreffend, wenn auch einiges wenige mehr populär als exact ausgedrückt ist; dass der Satz: „wenn er die wahren Ursachen nicht finden kann“ — eigentlich lauten müsste: „weil von wahren Ursachen nicht die Rede sein kann“ — ist ohne Belang, zumal weil nachher deren Entdeckung als Sache des Propheten, nicht des Forschers bezeichnet und dadurch die frühere Aeusserung corrigirt wird. Wenn Coppernicus nie von „Hypothesen“ gesprochen hat, so gilt das gleiche auch von „Wahrheit“. Jede seiner Aeusserungen ist objectiv und enthält nur, was er weiss, nicht was er glaubt. Möchten doch diejenigen, welche die Unbeweglichkeit der Sonne als eine geglaubte Wahrheit ansehen und dem Coppernicus vindiciren, einmal beachten, welches falsche Dogma sie damit aufstellen und demselben zuschreiben, wie sie innerhalb des zur Sonne gehörigen Körpersystems die Gesetze der Mechanik umstossen und ausserhalb desselben die Möglichkeit weitergehender dynamischer Untersuchung [illegible]eiden. Sofern ein der Mechanik des Weltalls

genügender ruhender Punkt ganz unbekannt ist, sind die helio-centrische, geocentrische und an den Horizont gebundene Betrachtungsbasis in gleichem Falle: jede dient ihrem besondern Zwecke, die erste zur vorläufigen, nachher zu corrigirenden Berechnung der Planetenbewegung, die letzte zur Auffassung der heimischen Vorgänge und, was sie wesentlich voraus hat, zur Erhaltung der unbedingt erforderlichen Verbindung mit den Tatsachen der Sinnlichkeit, die wir nur zeitweilig unterbrechen, nie aufgeben können. Demgemäss ist auch die übliche Ausdrucksweise der Astronomen grösstenteils der skopocentrischen, statt wie man erwarten sollte der heliocentrischen Anschauung entnommen; eins ist nicht weniger correct als das andre, nur die Praxis ist massgebend. Was jenen Verteidigern des Absoluten in der Natur vorschwebt, ist die Anticipation einer einheitlichen umfassenden Naturerklärung, welche in der Tat den Trieb des wahren Forschers belebt wesentliche, nicht rückgängig zu machende Schritte in der Erklärung zu tun, während vielleicht das Interesse mancher Experimentatoren nicht über zeitweilige Verwertung empirischer Durchschnittsresultate hinausgeht. Dass Coppernicus mit seiner Aufstellung die Ueberzeugung von einem unabänderlichen Fortschritt verband, wird niemand bezweifeln, und läugnet auch jene Vorrede nicht. Der Verkehrtheit aber dies subjective Element in die Wissenschaft einzumischen hat er sich nicht schuldig gemacht. Hoppe.

Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhi nach der auf der Herzoglich-Gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet von Dr. Adolf Hochheim, Professor. II. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1879. Louis Nebert. 4°. 29 S.

Was den ersten Teil und das Ganze überhaupt betrifft, ist im 249. litt. Bericht p. 2. gesagt. Es bleibt nur die Fortsetzung des Inhalts hinzuzufügen. Aufgaben über das Verhältniss (handeln von Addition der Brüche, approximativer Verhältnissbestimmung u. s. w.). Das Verhältniss zu accordirenden Zahlen (Vielfachen von Primzahlen). Multiplication einfacher und nicht einfacher Brüche (die Factoren werden erst zu einfachen Brüchen gemacht). Die Division (von Brüchen). Multiplication und Division der Grade und ihrer Teile (Minuten, Secunden, Tertien). Ausziehung der Wurzel (Regeln ganz nach heutigem Verfahren, auch in Betreff der Brüche). Die Proportionen. Die Geschäftsrechnung (Regeldetri). Messung. Dieses Capitel ist besonders reichhaltig; es wird darin die Inhaltsberechnung einer Anzahl der einfachern Formen von geraden Linien und Kreisbogen begrenzter ebener Flächen, sowie die Längenberechnung der

Rechtecksdiagonale und des Kreises, erstere nach Pythagoräischem Lehrsatz, letztere durch die Verhältnisszahl $3\frac{1}{7}$ in Regeln ohne Begründung angegeben. Bei Begrenzung durch Kreisbogen recurrirt die Regel auf deren bekannte Länge und ist theoretisch genau.

H.

Feest-Gave van het wiskundig Genootschap te Amsterdam onder de Zinspreuk: „Een onvermoeide Arbeid Komt Alles te Boven" ter Gelegenheid der Viering van zijn honderdjarig Bestaan. Haarlem 1879. Joh. Enschedé en Zonen. Fol. 56 S.

Zur Feier ihres hundertjährigen Bestehens hat die genannte Amsterdamer mathematische Gesellschaft zwei aufgefundene seltene Werke aufs neue drucken lassen. Das eine, gedruckt 1599 zu Leiden, war ganz unbekannt. Es ist der Bericht einer Commission bestehend aus J. van Hout (Secretär der Stadt, wolbekannt in der Geschichte), S. F. van Merwen (gleich dem Erstern Professor der Mathematik an der Ingenieur-Schule, welche vom Prinzen Moritz nach dem Project von Simon-Stevin mit der Leidener Universität verbunden ward), Ludolf van Ceulen (bekannt durch seine Arbeiten über die approximative Rectification des Kreises), M. Mintens (Schullehrer) und Jan Pietersz. Dou (Feldmesser von grossem Rufe). Es handelt vom jährlich und täglich discontirten Werte der Hypotheken, erst nach gewöhnlichen, dann nach zusammengesetzten Zinsen. Es finden sich darin mehrere interessante Bemerkungen, unter andern von Simon Stevin über die Rechnung mit Decimalbrüchen. Die zweite Schrift ist nicht weniger bemerkenswert. Es ist ein Bericht des gelehrten Staatsrats Johan de Witt über die Ausgabe lebenslänglicher Renten von Seiten der Generalstaaten. Diesen Bericht findet man zwar abgedruckt in den Resolutionen der Generalstaaten; allein die davon genommenen 30 Abzüge waren in kurzem so selten, dass selbst die gelehrten Zeitgenossen sich keine Exemplare verschaffen konnten. Es enthält die Discussion einiger Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie für die genannte Anwendung notwendig sind, und den ersten, obwol ziemlich rohen Entwurf eines Sterblichkeitsgesetzes. Die Herren Johannes Enschedé u. Söhne, Eigentümer der alten holländischen Typen, haben Lettern gleich denen in den Originalen hergestellt, so dass der Neudruck fast als Facsimile erscheint. Der Vorsitzende der Gesellschaft, Dr. D. Bierens de Haan, (aus dessen Begleitschrift Leiden, März 1879. das Vorstehende entnommen ist,) hat alle Mühe darauf verwandt den Text unter bibliographischem Gesichtspunkt, also mit unveränderter Beibehaltung der sehr wenigen und unbedeutenden Druckfehler, treu wiederzugeben.

H.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni, Socio ordinario dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Socio corrispondente dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle scienze di Torino, e di scienze, lettere e arti di Modena e Socio ordinario della R. Accademia delle scienze di Berlino. Tomo XII. Roma 1879. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der 3 ersten Hefte ist folgender.

Antonio Favaro: Ueber das Leben und die Werke von Prosdocimo de' Beldomandi, Paduanischem Mathematiker des 15. Jahrhunderts.

Ein Publicationsverzeichniss ist im 2. Hefte. H.

Deux lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange tirées de la bibliothèque royale de Berlin (collection Meusebach, portefeuille Nr. 21. et collection Radowitz, Nr. 4952.) et publiées par B. Boncompagni. Berlin 1878. Impr. de Gustav Schade.

Lettera inedita di Giuseppe Luigi Lagrange tratta dalla biblioteca universitaria di Bologna (correspondenza Canterzani, MSS. N. 2096. scatola IV.) e pubblicata da B. Boncompagni. Firenze 1879. Calcografia e litografia Achille Paris.

Intorno due lettere del Lagrange pubblicate da B. Boncompagni (estr. dagli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino Vol. XIV. Adun. d. 23 febbr. 1879.).

Wir geben zum Schluss den Wortlaut der 3 photolithographirten Briefe, vorher den Bericht über die Schrift, mit welcher Genocchi die Ueberreichung der vom Fürsten Boncompagni an die Turiner Akademie gesandten erstern 2 Briefe des Begründers der Akademie begleitet, sofern sie einige nähere Nachrichten über dieselben enthalten.

„ . . . Einer der Briefe ist unterschrieben L. G. und hat das Datum Paris 25 Schneemonat Jahr IX. aber keine Adresse, der andre aus Berlin, unterschrieben De la Grange, ist adressirt an Laplace. Im ersten dankt L. dem, welchen er mein lieber Correspondent nennt, für die Zusendung eines Bandes von der Petersburger Akademie mit der Erklärung, dass er den Preis bezahlt und gebeten hat ihn von Hand zu Hand zu befördern. Er dankt ihm ferner für verschiedene Geschenke, besonders für das Werk von Denina über Piemont, und fügt hinzu: Ich bitte mich seinem Andenken und seiner Freundschaft

zu empfehlen. Damit verbunden ist der Dank seiner Frau für den schönen Roman, welchen er ihr geschickt hat, eins der besten Erzeugnisse von Frau de Genlis, und die Ankündigung eines kleinen Geschenks, welches sie als Austausch der Frau de la Garde hat schicken wollen. Der letztere Umstand brachte Genocchi auf den Gedanken, jener Correspondent von L. möchte ein Berliner Buchhändler oder Buchdrucker de la Garde sein, eine Vermutung die noch bestärkt ward durch die Bemerkung, dass das Werk von Denina betitelt Geschichte Piemonts und der übrigen Staaten des Königs von Sardinien, übersetzt ins Deutsche von Friedrich Strass aus italienischem Manuscript, zu Berlin in 3 Bänden von 1800 bis 1805 gedruckt ward bei F. T. La Garde. Es muss bemerkt werden, dass Denina 1782 nach Berlin gieng, bis 1804 in Deutschland blieb, dann sich nach Paris begab und den 5. December 1814 daselbst starb; ferner dass der Roman der Frau de Genlis betitelt „Les mères rivales ou la Calomnie" 1800 zu Paris und Berlin in mehrern Ausgaben gedruckt ward. Dadurch wird es wahrscheinlich, dass sich der Brief von L. auf diese beiden Werke bezieht. Noch andre Argumente für die genannte Adresse wurden dem Fürsten Boncompagni vom Secretär der Berliner Königlichen Bibliothek, Dr. Julius Jochens, angezeigt: 1) Die Schriftzüge eines authographen Briefes von Lagarde, der sich auf jener Bibliothek befindet, sind gleich denen eines bekannten Manuscripts, welches dem Briefe von Lagrange vorausgeht, und worin der Autor versichert den 21. März 1801 geantwortet zu haben; auch die Dinte ist dieselbe. 2) In den Archiven der Berliner Akademie finden sich Anzeigen, aus denen erhellt, dass Lagarde von Herrn Formey und andern Akademikern verschiedene Aufträge erhielt. Ueberdies beweist ein von Herrn Jochens dem Fürsten Boncompagni mitgeteiltes officielles Document, dass der genannte Lagarde hiess Franz Theodor De La Garde und den 3. Juli 1824 in Charlottenburg starb. L. bat ferner um Uebersendung einer Geschichte der Mathematik von Kestener. Ohne Zweifel meinte er die von A. G. Kaestner, gedruckt zu Göttingen in 4 Bänden von 1796 bis 1800. Ueber die von Montucla gab er folgendes Urteil: „Ich habe keine zu gute Vorstellung vom 2. Teile der Geschichte von M., welche unter der Presse ist. Ich glaube, dass der Gegenstand die Kräfte des Verfassers übersteigt; ich spreche von dem Teile, welcher vom Fortschritt der Mathematik im eben vergangenen Jahrhundert handelt; denn der bereits bekannte Teil lässt wie mir scheint wenig zu wünschen übrig. Das Manuscript ist glaube ich geschlossen, wenigstens weiss ich von niemandem der mit der Fortsetzung beauftragt wäre. Lalande besorgt den Druck, aber er ist nicht im Stande das Fehlende zu ergänzen." In demselben Briefe erfreute sich L. der Ankunft eines Herrn de Lucchesini, welcher ihm Nachrichten von Berlin gebracht und

manche teuere Erinnerungen erneuert hatte: er hatte sich erboten sein Paket durch einen seiner Courriere zu befördern. Dieser muss der berühmte Diplomat sein, Marchese Girolamo Lucchesini, geboren 1752 zu Lucca, gestorben den 19. October 1825 zu Florenz, welcher Preussen als Bevollmächtigter Minister diente und sich 1801 und 1802 in Paris befand um mit dem Ersten Consul einen Vertrag zu verhandeln. Der andre, an Laplace gerichtete, Brief hat kein Datum. Darauf steht eine kleine Anmerkung von Humboldt, welcher erklärt den Brief zum Geschenk von der Marquise de Laplace (Paris, Januar 1843) empfangen zu haben. Lagrange sagte darin, er habe die Abhandlung von Laplace „Sur les approximations“ erhalten, und sende ihm den zum Druck in diesem Jahre fertigen 2. Teil einer eigenen Arbeit, deren 1. Teil Laplace bereits empfangen hatte. Der Fürst Boncompagni denkt, dass jene Abhandlung von Laplace diejenige sei, welche auf den Seiten 1 bis 88 des Bandes Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année 1782, enthalten und 1785 zu Paris gedruckt ist, und zwar mit dem Titel „Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres“; und dass die Arbeit von Lagrange sei die Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, publicirt in den Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1. Teil année 1781 (Berlin 1783), 2. Teil année 1782 (Berlin 1784). Das ist nur Genocchi's Meinung; es würde daraus hervorgehen, dass der Brief von Lagrange an Laplace von keinem frühern Jahre als 1782 und wahrscheinlich von 1784 ist. In einem Postscriptum liest man: Ich füge zu diesem Paket die 3 Bände des deutschen Werkes von Susmilch über die Sterblichkeiten. Dieses Werk ist von Johann Peter Süssmilch, geboren 1708 zu Berlin, gestorben den 17. März 1767, und zwar betitelt: Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, ward gedruckt in den Jahren 1742, 1761, 1765 und 1775, es sind darin berechnet die Sterblichkeiten, das Verhältniss der Ehen und Geburten zur Bevölkerung, die Unterschiede der Sterblichkeit in den grossen Städten, Marktflecken und auf dem Lande (s. Biographie universelle). Süssmilch wird von Laplace erwähnt in seiner Théorie analytique des probabilités (2. Ausg. Paris 1814. Introduction, pag. CIII.) unter andern Gelehrten, welche eine grosse Anzahl wertvoller Angaben über Bevölkerung, Geburten, Ehen und Sterblichkeit zusammengestellt haben. Lacroix hat die Sterblichkeitstafeln für Wien und Berlin, zusammengestellt von Süssmilch, citirt in seinem Traité élémentaire du calcul des probabilités (Paris 1816, p. 177). Genocchi schliesst seine Mitteilung mit der Ankündigung, dass der Fürst Boncompagni ein Facsimile des ganzen Manuscripts hat ausführen lassen, welches sich in der Bibliothek des Herzogs von Genua befindet und die Principien der höhern Analysis, dictirt von Lagrange an den

königlichen Artillerieschulen, enthält, und das nach Erlangung der notwendigen Zustimmung zur Publication mittelst der zu Rom in seinem Besitz befindlichen Presse bestimmt ist. H.

Paris le 15 Janv. 1801

Paris ce 25 nivose en 9.

Lagrange

Monsieur rep. le 21 mars 1801

J'ai reçu, mon cher Correspondant, avec autant de plaisir que de reconnaissance votre dernière lettre et le paquet que Duprat m'a envoyé de votre part. Je lui ai remis aussitot les 28₶ du prix du volume Xme de Petersbourg. Je vous prie instamment de ne pas negliger de me faire passer les suivants à mesure qu'ils paraitront, ainsi que ceux de Berlin dont le dernier, que j'ai, est celui de 1794—95 qui a paru en 1799. Je vous remercie des differens cadeaux que vous avez bien voulu me faire et en particulier de l'ouvrage de Denina sur le Piemont que je lis avec d'autant plus de plaisir que je me suis depuis quelque tems un peu adonné à l'histoire. Je vous prie de me rappeller à son souvenir et à son amitié. Ma femme joint ses remercimens aux miens pour le beau roman que vous lui avez envoyé; c'est en effet une des meilleures productions de Mme de Genlis; il est généralement estimé ici, et on en a déjà fait une ou deux éditions. Elle a voulu profiter d'un envoi que Fuchs avait à vous faire pour envoyer à son tour une bagatelle à Mme de la Garde, c'est un bonnet d'hiver en turban suivant la dernière mode; j'espère que la boite arrivera en bon état et avant le printems. Elle a du partir il y a déjà quelques jours. J'ai mis dans la même boîte un petit paquet cacheté qui m'a été remis par Touin à qui je l'avait demandé contenant des grains du chanvre de la Chine avec une petite instruction sur la manière de les semer; je n'ai pu les avoir plutot; mais elles vous seraient parvenus plus promptement si la boîte n'était pas été partie lorsque M. Lucchesini m'offrit de vous faire passer mon paquet par un de ses courriers. Je profiterai de ses bontés pour un autre envoi. Je n'ai pas une trop bonne idée de la seconde partie de l'Histoire de Montucla qui est sous presse. Je crois que la matière était au dessus des forces de l'auteur; je parle de la partie qui traite du progrès des mathématiques dans le siècle qui vient de s'écouler; car pour la partie déjà connu, il me semble elle laisse bien peu à souhaiter. Le manuscrit est je crois achevé, du moins je ne sache personne qui soit chargé de le continuer. Lalande a soin de l'impression; mais il n'est pas en état de suppléer ce qui peut manquer. Il me semble avoir lu quelque part que Kestener avait donné une histoire des mathéma-

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Coppernicus, N., üb. d. Kreisbeweg. d. Weltkörper. Uebers. u. m. Anmerkgn. v. C. L. Menzzer. Thorn, Lambeck. 12 Mk.

Fortschritte, d., d. Physik im J. 1874. 30. J. Red. v. B. Schwalbe u. Neesen. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 15 Mk. 75 Pf.

Giesing, J., Stifels arithmetica integra. Döbeln, Schmidt. 1 Mk. 75 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschr. d. Mathem., hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 9. Bd. Jahrg. 1877. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Reusch, F. H., d. Process Galilei's u. d. Jesuiten. Bonn, Weber. 10 Mk.

Methode und Principien.

Isenkrahe, C., d. Räthsel v. d. Schwerkraft. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Fuhrmann, A., Aufg. aus d. analyt. Mechan. 1. Thl. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Fuss, K., Sammlg. v. Aufgaben aus d. allgem. Arithmetik u. Algebra. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

Petrick, C. L., Multiplications-Tab. geprüft m. d. Thomas'schen Rechenmaschine. 1—4. Lfg. Fol. Li., Meyer. à 3 Mk.

Reidt, F., d. Elemente d. Mathematik. 1. u. 2. Thl. 3. Afl. Berlin, Grote. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Knirr, J., Elemente d. allg. Arithmetik f. die 3. u. 4. Cl. Wien, Hölder. 1 Mk. 50 Pf.

Litterarischer Bericht
CCLV.

Methode und Principien.

Das Räthsel von der Schwerkraft. Kritik der bisherigen Lösungen des Gravitationsproblems und Versuch einer neuen auf rein mechanischer Grundlage. Von Dr. C. Isenkrahe, Gymnasial-Oberlehrer. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1879. Vieweg und Sohn. 214 S.

Zu welcher Classe von Schriften das vorliegende Buch gehört, ist durch den Titel, welcher die Schwerkraft ein Rätsel nennt, deutlich gesagt. Die gleiche Aufrichtigkeit charakterisirt das Ganze. Der Verfasser glaubt durch die Autorität einer genügenden Anzahl von Vorgängern, Zöllner, Schramm u. A., zu deren Vermehrung er jedoch auch metaphysische Aeusserungen von Mathematikern, die auf fruchtbarerem Felde gewirkt haben, herbeizieht, jeder Mystification überhoben zu sein, um seine Arbeit als eine ernst wissenschaftliche präsentiren zu können. Er selbst bekennt sich zu den Grundsätzen, die sein eignes Erzeugniss verurteilen würden, wenn er nur bei seiner Kritik ebenso an sich wie an Andre gedacht hätte. Eine Wahrheit, welche von vielen ausser Acht gelassen und äusserst selten gehört wird, findet sich hier auf Seite 138 ausgesprochen. „ . . . Um die Berechtigung dieser Bemerkung zu beurtheilen, müssen wir uns zuerst über die Berechtigung und die Grenzen des Warumfragens überhaupt verständigen.

„Das Princip der Causalität verlangt von der exacten Naturforschung, dass sie von allen Veränderungen, welche in den Reichen der Natur vorkommen, Gründe aufsuche. Setzt sich ein ruhiger

Körper in Bewegung, ein bewegter in Ruhe, oder ist die Geschwindigkeit des letzteren nur irgendwie inconstant; ändert sich die Form oder Farbe eines Körpers, ändern sich seine Beziehungen zu andern — in allen diesen Fällen hat die Naturforschung sich die Frage: „Warum?“ vorzulegen.

„Haben wir es aber mit einem constanten Sein, mit einem stets sich gleichbleibenden Object zu thun, dann hat die Naturforschung zum Warumfragen keine Veranlassung mehr. Hier noch, wo von einer Veränderung keine Rede mehr ist, nach Gründen der Unveränderlichkeit spüren zu wollen, hat keinen naturwissenschaftlichen, hat, wie mir scheint, überhaupt gar keinen wissenschaftlichen Sinn mehr.“

Das sagt derselbe Schriftsteller, der die völlig constante Schwerkraft ein Rätsel nennt, sie zu erklären strebt und zu diesem Zwecke ein ganzes Buch schreibt, das wie er meint erst annähernd die grosse Frage lösen soll. An ein Misverständniss ist hier nicht zu denken. Dass etwa nur von constanten Grössen, nicht von constanten Gesetzen die Rede sei, ist nach dem Vorhergehenden unmöglich; denn gerade ein aufgestelltes Gesetz bringt den Verfasser zu obiger Aeusserung. Auch ist im Grunde beides dieselbe Sache.

Wir können übrigens gar mancherlei Sinn des Warum für ein dauerndes Sein zulassen; nur sollte, eben weil er verschieden sein oder auch vielleicht ganz fehlen kann, niemand die Frage aufwerfen, wenn er doch über den Sinn keine Rechenschaft zu geben vermag. Die Frage nach dem Naturzweck ist nicht an sich ohne wissenschaftlichen Sinn, es genügt zu sagen, dass es ihr an Haltpunkten fehlt um wissenschaftlich untersucht zu werden. Aehnlich ist der Fall, wo die ganze Succession von Factis unbekannt ist, welche die zu erklärende Veränderung enthält, und wir nur ein anscheinend gleichmässig dauerndes Resultat vor uns haben, das die Frage anregt, z. B. die Bewegung der grossen Planeten mit kleiner Excentricität, kleiner Neigung und sämmtliche in gleichem Sinne umlaufend, ferner die anscheinend unveränderlichen Tier- und Pflanzengattungen u. s. w. Auch solche Fragen rufen kosmische Phantasien hervor, denen man wissenschaftliche Bedeutung nicht zuerkennen wird. Beide Fälle liegen offenbar der gegenwärtigen Schrift fern. In näherer Beziehung zu ihr steht aber der dritte Fall, wo ein dauerndes Gesetz in der Theorie bisher gegolten hat, das jedoch zu complicirt oder nicht umfassend genug erscheint. Hier ist zwar die Frage nach einem Grunde nicht der correcte Ausdruck, doch lässt sie sich immer befriedigend interpretiren als die Frage nach einem einfacheren oder allgemeineren Gesetze. Wäre dies bei der Schwerkraft (Attraction ponderabeler

Massen) der Fall, wäre ihr Gesetz zu complicirt oder von zu beschränkter Gültigkeit, dann möchte der Verfasser noch Recht haben, wenn er ein einfacheres, ein weiter reichendes Element substituirte. Aber kann wol jemand ein einfacheres, allgemeineres Gesetz suchen wollen als das der Newton'schen Attraction? Im Buche steht hiervon nichts; der Verfasser nimmt die Erklärung eines constanten Seins von unübertrefflicher Einfachheit zum Ziele ohne zu sagen, was daran noch erklärt werden soll. Er selbst also reflectirt nicht auf jene noch denkbare Rechtfertigung. Es kann sich nun noch fragen, ob vielleicht sein factisches Zuwerkegehen der Tendenz der Vereinfachung oder Verallgemeinerung entspricht. In der Tat substituirt er der Attraction ein anderes Element, den Stoss. Bekanntlich ist aber der Stoss, nicht nur unter den wirklich vorkommenden, sondern auch unter idealisirten Bedingungen ein äusserst complicirter Vorgang. An die Stelle des Einfachen wird also ein nicht eben leicht exact aufzufassendes Element gesetzt, statt zu erklären wird ein der Erklärung sehr bedürftiger Begriff eingeführt. Ueberdies sollen erst Millionen von Stössen unter unberechenbar mannichfaltigen Umständen das ergeben, was wir als Grundlage der Mechanik in einem einzigen homogenen Begriff schon besitzen. Kann demnach von Vereinfachung keine Rede sein, sondern vom geraden Gegenteil, so ist ebensowenig eine Tendenz zur Erweiterung der Theorie zu erkennen. Der Verfasser wählt nicht den elastischen Stoss, sondern den Stoss starrer (kugelförmiger) Atome, die demnach nur an einander gleiten können, ihre Richtung und Geschwindigkeit plötzlich ändern und an lebendiger Kraft jedesmal Verlust haben. Mit der Stetigkeit der Bewegung ist die Grundlage der Dynamik beseitigt, ihre bisherigen Erfolge annullirt; ein Neubau der Theorie wird aber nirgends in Angriff genommen; denn als letztes Ziel erscheint es, etwas der Attraction ähnliches aus der Annahme der Stösse abzuleiten. Wo dann noch ein Versuch wissenschaftlicher Leistung bleiben soll, den die Arbeit darböte, ist nicht zu ersehen. Wollen wir ihr soviel als möglich zuerkennen, so ist es, dass darin manches vernünftig gesprochen ist und vielseitige Erfahrung in den Problemen der Mechanik bei dem Verfasser erwarten lässt.
H o p p e.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. Von Dr. H. H e i l e r m a n n, Director der Realschule in Essen, und Dr. J. D i c k m a n n, Oberlehrer

am Kgl. Gymnasium in Essen. II. Theil. Die Erweiterung der vier Grundrechnungen. — Die Gleichungen 2ten, 3ten und 4ten Grades. Essen 1879. G. D. Baedeker. 121 S.

Der I. Teil ist im 251. litt. Bericht besprochen. Der zweite handelt zuerst von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Hierdurch werden jene 4 Grundrechnungen erst zur vollen Zahl 7 ergänzt, Erweiterung ist kein verständlicher Ausdruck dafür. Auch das Gegenwärtige geht in Berücksichtigung der Erfordernisse eines gründlichen und allseitigen Verständnisses über das Gewöhnliche merklich hinaus. Mann kann nicht sagen, dass diese Erfordernisse vollständig erfüllt seien, oft hat auch die beobachtete Kürze sichtlich Schranken gesetzt. Doch fehlt es nicht an Andeutungen, nach denen der mündliche Unterricht alles, was etwa noch vermisst werden möchte, hinzugeben kann. So wird z. B. in den den einzelnen Abschnitten folgenden „Uebungen“ einmal der Beweis, dass die vorhergehenden Sätze auch von Potenzen mit negativen Exponenten gelten, verlangt. Hier ist in der Tat der Schüler im Stande der Forderung zu genügen. Dadurch werden aber zugleich die Fragen angeregt: Gelten jene Sätze und die inzwischen gefolgt sind, auch für gebrochene, für irrationale Exponenten? Diese Fragen, welche um so notwendiger für eine volle Einsicht sind, weil die Geltung mancher Sätze Beschränkungen unterliegt, kann sich offenbar der Schüler nicht selbst beantworten. Doch auch hiermit sind die Erfordernisse strenger Logik noch nicht erfüllt. Nach Einführung der Irrationalzahlen muss die Frage entstehen: Finden die Sätze über alle vorhergehenden Operationen, mithin auch über die 4 ersten, Anwendung auf sie. Der Beweis dafür liegt keineswegs ausser den Grenzen der elementaren Arithmetik; denn mit den irrationalen Wurzeln der höhern Gleichungen wird hier gerechnet, mit welchem Rechte, ist nicht von selbst deutlich. Die gewöhnlichen Lehrbücher schweigen hiervon ganz, das gegenwärtige hat wenigstens den kleinen Anfang gemacht durch eine Uebungsaufgabe die Gedanken darauf zu lenken. Der Inhalt des in Rede stehenden Abschnitts versteht sich in den Hauptsachen von selbst. Die numerische Wurzelausziehung ist bei den Quadratwurzeln ausgeführt, bei den Kubikwurzeln durch Fragen angedeutet. Die Rechnung mit complexen Zahlen und deren geometrische Darstellung wird, soweit es ohne die Moivre'sche Form möglich ist, erklärt. Dass Summen und Producte Conjugirter reell sind, hätte wol sollen als besonderer Satz ausgesprochen werden, da wichtige Schlüsse darauf beruhen. Einen ähnlichen Wunsch lässt die Lehre von den Logarithmen übrig. Gleich anfangs ist gesagt, dass man schlechthin vom Logarithmus einer Zahl spricht, ohne die Grundzahl beständig anzugeben. Warum kann man das? Statt viele Sätze über Logarithmen

für verschiedene Grundzahlen aufzuführen, hätte der eine Hauptsatz an die Spitze gestellt werden sollen, welcher alle Grundzahlen auf eine reducirt, nämlich: Der Logarithmus von x zur Grundzahl a ist immer

$$= \frac{\log x}{\log a}$$

für beliebige Grundzahl. Daraus ist ersichtlich, dass nach anfänglicher Angabe der ein für allemal gewählten Grundzahl von keiner Grundzahl mehr die Rede zu sein braucht, dass demnach auch kein Bedürfniss ist beim Logarithmuszeichen die Grundzahl hinzu zu bemerken. Der Logarithmus ist nicht transcendente Function zweier Argumente, sondern Quotient von Werten derselben transcendenten Function je eines Arguments. Diese wesentliche Vereinfachung, welche in der ganzen Praxis herrscht, sollte doch in der Schuldoctrin nicht annullirt werden. Im Buche steht der Satz unumwunden gar nicht ausgesprochen. Die Lehre von der Auflösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades tut sich besonders dadurch hervor, dass sie auf die Bedeutung der Discriminante, Resultante und Resolvente eingeht. Infolge dessen geben namentlich die quadratischen Gleichungen einen grössern Stoff zu Beobachtungen. Es werden behandelt die Fälle der Reducirbarkeit höherer Gleichungen, die Zerlegung ganzer Functionen in Factoren, ihre Minima (bzhw. Maxima) bei 2. Grade, die Elimination zwischen mehreren Gleichungen, die gemeinschaftlichen Wurzeln. Kürzer werden die Gleichungen 3. und 4. Grades erledigt und zwar mit Beschränkung auf diejenigen Methoden, welche wol unbestritten den Vorzug verdienen, nach welchen auch in sehr einfacher Beziehung die Gesammtheit der Wurzeln sich darstellt. Ueber das Ganze ist noch zu bemerken, dass zu jedem Abschnitt reichlich Uebungsbeispiele und Fragen hinzugefügt sind. Auch die historischen Angaben über die einzelnen Entdeckungen werden willkommen sein.

H.

Die Elemente der ebenen Geometrie zum Gebrauche der technischen, landwirthschaftlichen etc. Fachschulen bearbeitet von Dr. Adolf Leesekamp, Lehrer der Mathematik an der Kgl. Höheren Gewerbeschule und der Kgl. Werkmeisterschule in Chemnitz. Kassel (Vorwort 1879) J. Bacmeister. 88 S.

Obgleich dieses Buch ausschliesslich für solche Unterrichtsanstalten bestimmt ist, welche eine ideell wissenschaftliche Ausbildung nicht zum Ziele nehmen, so vermag es doch, mit Vorbehalt einer gewissen Ergänzung, der letztern nicht nur zu genügen, sondern würde sich unter der grossen Zahl der für Gymnasien bearbeiteten Lehr-

bücher sogar in hohem Grade auszeichnen durch die ausnahmslos strenge Logik, die sorgfältige correcte Ausdrucksweise und die vortreffliche praktische Anordnung. Die auferlegte Kürze hat das Ergebniss der Bearbeitung nicht beeinträchtigt, vielmehr wesentlich gefördert; denn dass stets nur das Notwendige gegeben wird, erleichtert bedeutend den Einblick in den logischen Connex des Ganzen. Dieses Notwendige kann man aber auch bei ideellen Anforderungen nirgends vermissen. So wird z. B. die in vielen Lehrbüchern fehlende eigentliche Definition des Winkels in §. 15. unter der richtigen Ueberschrift „Erklärung" aufgestellt. Die Angabe, unter welcher Bedingung Winkel gleich, grösser und kleiner sind, macht in der Tat den Winkel erst zum mathematischen Begriff, mit dem Winkel zugleich die Richtung, welche vorher nur zu vorläufiger Orientirung eingeführt wird, und vertritt dadurch die Definition. Alle durch den Usus oft für sanctionirt gehaltenen verhüllten Trugschlüsse, alle misbräuchlichen Benennungen (Figur, Kreis, Strahl u. s. w. in falschem Sinne) sind hier ohne Rest beseitigt. Empfehlenswert ist die (vielleicht originelle) Benennung der Beziehungen zwischen den Winkeln an zwei durch eine dritte geschnittenen Geraden: sie heissen hier gleichliegende, wenn im Falle der Parallelität die Schenkel gleich gerichtet sind, ein Winkel heisst ungleichliegend, wenn der Scheitelwinkel, gemischt liegend, wenn einer der 2 Nebenwinkel gleichliegend ist. Hiermit wird der Gedanke sogleich auf den entscheidenden Punkt gelenkt. Die Lehre von den Proportionen und der Aehnlichkeit wird hier, ausdrücklich motivirt durch den technischen Zweck, als eine approximative bezeichnet. Bei einer Behandlung in diesem Sinne kann es natürlich der Unterricht, welcher für das Studium vorbilden soll, nicht bewenden lassen. Dennoch sind alle Sätze so abgefasst, dass man ohne Weitläufigkeit die exacte Geltung wird nachweisen können. Es ist dies diejenige Ergänzung, von der im Anfang die Rede war. Der Inhalt des Ganzen ist die gesammte Planimetrie, die Hauptabschnitte die gewöhnlichen. Statt der Beweise und Auflösungen sind nur die Sätze citirt, welche in Anwendung kommen; erstere sollen die Schüler auf dem eingehefteten weissen Blatte selbst eintragen. Als leichte Verbesserung möchten wir vorschlagen, die 3 Sätze: 1) Richtung als Grundbegriff, 2) Gerade erklärt durch constante Richtung, 3) den Grundsatz, nach welchem die Lage der Geraden durch 2 Punkte bestimmt ist — in den blossen letzten zusammenzuziehen, und diesen zur Definition der Geraden zu machen. Dies ist bereits von Andern geschehen, ist einfacher und entspricht mehr der exacten Form. Richtung als Grundbegriff lässt sich ganz entbehren; sie findet ihre exacte Erklärung beim Winkel. Noch ist rühmlichst anzuerkennen, dass durch das Lehrbuch der Techniker angewiesen ist, sich diejenige mathematische Vorbildung zu erwerben, welche unabhängig

von der Wahl des Berufs, also für jeden Schüler, der sich noch nicht für den technischen entschieden hat, die geeignete ist, damit die technischen und wissenschaftlichen Begriffe nicht disharmoniren. — Zu berichtigen ist durchgängig die Schreibung „Hypothenuse". H.

Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Von Dr. E. Budde. Berlin 1879. Wiegandt, Hempel u. Parey. 470 S.

Unter den Lehrbüchern für den Schulunterricht in der Physik nimmt das gegenwärtige in mehrfacher Beziehung eine hervorragende Stelle ein. Zunächst ist die Ausdehnung eine ungewöhnlich grosse. Es scheint sich zum Ziele zu nehmen, dass der Schüler mit allen je beobachteten und untersuchten Erscheinungen allen Einführungen, überhaupt allen Elementen, die in der Wissenschaft auf neuestem Standpunkt eine Rolle spielen, bekannt werden soll. Eine solche Aufgabe wird man dem Schulunterricht nicht zu erkennen, im Gegenteil besorgen müssen, dass der übermässige Stoff nicht bewältigt wird, und ein eingebildetes Wissen erzeugt. Die Ausführung lässt es indes in anderm Lichte erscheinen; wenn man auch jene Eigenschaft misbilligt, so wird sie bei Beachtung der intensiven Leistung als ganz unwesentlich zurücktreten. Was in so hohem Grade für das Buch einnimmt, ist die Vereinigung wissenschaftlicher und didaktischer Tüchtigkeit. Erstere hat ihre bestimmteste Controle in der Mechanik. Dass es besonders hervorgehoben werden muss, wenn der Verfasser eines Lehrbuchs der Mechanik ein sicheres Verständniss von deren Principien besitzt, mag auffällig scheinen. Zählt man aber zu jenen, denen dasselbe dennoch abgeht, noch solche, die durch pädagogische Gründe sich bestimmen lassen die Begriffe und Lehren nur halb exact vorzutragen, so bleibt es in der Tat eine seltene woltnende Erscheinung, wenn man einmal den exacten Standpunkt durchgängig festgehalten findet. Was die didaktische Seite betrifft, so sind die Sätze teils kurz und elementar bewiesen, teils bloss erläutert, auch Fragen und Aufgaben daran geknüpft. Die Deductionsmethode, welche richtige Anwendung des Unendlichkleinen macht, ist eine merklich gleichmässige. Durch sie ist zwar noch lange nichts alles Vorgetragene, doch soviel auf leicht fassliche Weise begründet, dass es den Schülern reichlichen instructiven Stoff bietet. Auf diesem Wege kann man sehr wol erfinderisch weiter gehen. Noch steht hier die Existenz des Mittelpunkts paralleler Kräfte als unbewiesene Behauptung, der Beweis würde die Fassungskraft nicht mehr beansprucht haben als manches andere. Das Buch hat 7 Hauptabschnitte: Allgemeine Mechanik, Mechanik der Aggregatzustände, Akustik, Optik, Magnetik, Eliktrik, Calorik. Die Einteilung der Mechanik in Statik und Dyna-

mik hat der Verfasser ganz aufgegeben, dafür gesondert auf einander folgen lassen die Mechanik der Punkte und die der Körper. Letztere Teilung ist offenbar bei exactem Lehrgang notwendig; erstere kann man ausserdem festhalten, hier schien sie entbehrlich. Als vereinzelte Versehen im Ausdruck mögen folgende zwei genannt werden. Seite 2. „Zu jeder Bewegung müssen wir Ursachen voraussetzen.“ Alles spätere zeigt im Gegenteil, dass die Bewegung stets als Zustand aufzufassen ist, und dass nur dessen Aenderung Ursachen hat. Seite 185 wird die „Diosmose“ so erklärt, als ob sie einseitig stattfinden könnte. Dadurch, dass nur Fälle von Wechselwirkung besprochen werden, ist die Notwendigkeit des Austausches der Flüssigkeiten nicht constatirt.

H.

Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Ein Leitfaden zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, zugleich eine Ergänzung zu jedem Schullehrbuche der Physik. Von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. I. Statik fester Körper. II. Dynamik fester Körper. Rostock 1879. Wilh. Werther. 96 S.

Die gegenwärtige Schrift, sofern sie nur die Mechanik umfasst, kann ohne Zweifel nur die erste aus einer Reihe solcher sein, deren Herausgabe beabsichtigt wird, obwol davon nicht die Rede ist. Zur Motivirung der Herausgabe spricht das Vorwort von der Notwendigkeit der mathematischen Behandlung des physikalischen Schulunterrichts, als ob dieselbe bisher noch gar nicht beachtet worden wäre. Nun giebt es doch gewiss kein Schulbuch aus neuerer Zeit, welches die Mechanik beschreibend vortrüge. Mag man an den mathematischen Begründungen in den vorhandenen Lehrbüchern viel vermissen, so kann man sie doch nicht so für null rechnen, wie es der Verfasser tut, indem er solche gar nicht kennen will; immer geht doch aus ihnen hervor, dass niemand sie für entbehrlich gehalten hat. Gleichwol konnte die Herausgabe einer so betitelten Ergänzungsschrift in folgendem Sinne gerechtfertigt erscheinen. Die meisten Lehrbücher der Physik geben die mathematische Begründung wol nur darum mangelhaft, weil sie zu sehr durch Unterrichtszwecke in anderer Richtung gebunden sind. Im gegenwärtigen soll die mathematische Behandlung ausschliesslicher Gesichtspunkt sein. Dann aber ist selbstverständlich, dass dieselbe über das gewöhnliche Mass hinausgehen muss, und keine Rückschritte machen darf. Ausserdem ist zu bemerken, dass, auch wenn sie dem entspricht, die Angabe des Titels „eine Ergänzung zu jedem Schullehrbuche der Physik“ — eine (vielleicht unüberlegte, nicht beabsichtigte) Anmassung ist. Das nächst vorher besprochene Lehrbuch von Budde, sowie manche andere, wird dadurch nicht ergänzt.

Betrachtet man die Ausführung, so ist eine grosse Anzahl von Fehlern auffällig. Da das Meiste den Eindruck macht, dass es mit Sachverständniss geschrieben sei, so wird man geneigt sein, solche für augenblickliche Versehen zu halten. Dies wird aber sehr zweifelhaft einesteils wegen der Häufigkeit, andernteils darum, weil der Verfasser einige jener Fehler ausdrücklich in Schutz nimmt. Schon im Vorwort findet sich folgender bedenkliche Grundsatz ausgesprochen: „Die Lehre von den Momentankräften auszuschliessen, wie es in der analytischen Mechanik geschieht, schien aus didaktischen Gründen nicht gerathen, zumal die Theorie der beschleunigenden Kräfte darauf gegründet werden sollte, wie es auch in mehreren anerkannt guten Schulbüchern der Physik geschieht. Der Vorwurf nicht genügender mathematischer Strenge wird die Methode deswegen unmöglich treffen können.“ Einen so milden Vorwurf werden wir der Methode nicht machen; dem Mangel an Strenge kann man oft mündlich nachhelfen, oder der Schüler kann das Mangelnde später kennen lernen. Hier handelt es sich um Verbreitung verderblicher, principieller Irrtümer und Einpflanzung falscher Begriffe und Vorstellungen. Sagt ein Lehrbuch, dass es momentane Kraftwirkungen gäbe, so ist das eine Unwahrheit. Was nicht existirt, kann man freilich hypothetisch annehmen; doch darf es nicht im Widerspruch mit sich selbst oder mit den notwendigen Grundlagen der Wissenschaft stehen. Das letztere ist der Fall bei der Annahme augenblicklicher endlicher Wirkungen; denn sie widerspricht dem Grundgesetz der Stetigkeit der Bewegung. Das eine wie das andere ist ein Vergehen gegen die wissenschaftliche Wahrheit. Damit keine Misdeutung Platz hat, gesteht auch noch der Verfasser, dass er die Theorie der beschleunigenden Kräfte auf jene Annahme gründet. Er erklärt also die Schwere (die kosmische Attraction) durch Stösse. Hier begegnen wir in der Schule der Wurzel jener kosmischen Phantasien, die heutzutage so schnell nach einander ans Licht kommen und mit ernst wissenschaftlicher Miene die Wissenschaft auf den Kopf stellen. Der Verfasser beruft sich auf den Vorgang mehrerer „anerkannt guter“ Schulbücher. In der Tat haben einige unbedeutende Schulbücher denselben Fehler gemacht, der jedoch in neuerer Zeit stets gerügt worden ist. Die angebliche Anerkennung mag wol darauf beruhen, dass sie aus pecuniären Rücksichten hie und da eingeführt sind. Sollten sie grössere Bedeutung haben, so würde das nur Grund sein, den Fehler um so nachdrücklicher zu rügen.

Kommen wir nun zu den Fehlern im Buche selbst. Seite 1. wird die, längst als unrichtig bekannte, früher gedankenlos gebrauchte Definition der Statik als Lehre von der Ruhe wieder aufgenommen und Seite 4. mit der wunderlichen Behauptung verteidigt, die Ruhe

sei allgemeiner als das Gleichgewicht, ein Körper könne, wie der Verfasser später zeigen will, auch in Ruhe sein, ohne dass die an ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn nämlich die Wirkung ihrer Resultirenden auf irgend einer Weise aufgehoben werde. Der Verfasser vergisst also, dass feste Punkte eine rückwirkende Kraft ausüben, welche das Gleichgewicht genau herstellen muss. Er vergisst andrerseits, dass die Kraftrelationen des Gleichgewichts, dass mithin alle Lehren der Statik gleichermassen bei Ruhe und Bewegung ihrer Angriffspunkte gelten, dass wir den ganz speciellen Fall der Ruhe nur einführen um die Begriffsbestimmung der Kraft anfänglich leichter verständlich zu machen. — Seite 1. „Damit ein Körper in Bewegung sei, brauchen nur e i n i g e seiner Molecüle in Bewegung zu sein" — der Verfasser meint damit, es können alle bis auf einige in Bewegung sein. Das wird aber niemand aus den Worten entnehmen. — Seite 2. „Man unterscheidet relative und absolute Ruhe und Bewegung." Nachher wird aber, sehr richtig, dargetan, dass absolute Ruhe nicht existirt, wonach natürlich auch von absoluter Bewegung nicht die Rede sein könnte. Die Unterscheidung war also unnütz. Es musste heissen: Alle Ruhe und Bewegung ist nur relativ — und dann musste der Satz mit seinen wichtigen praktischen Consequenzen folgen: Wir können jeden einzelnen Punkt als absolut ruhend denken, wol zu merken, solange wir eine Betrachtung verfolgen. — Seite 2. „Eine einzige auf einen Körper wirkende Kraft bringt stets eine geradlinige Bewegung hervor. Eine krummlinige Bewegung kann hiernach nur durch das Zusammenwirken mehrerer Kräfte hervorgebracht werden." Dass jemand heutzutage solche Irrtümer öffentlich lehren will, scheint so unglaublich, dass man versuchen möchte durch Interpretation einen leidlichen Gedanken herauszufinden; doch ist es unmöglich. Mit dem Körper kann nur ein Punkt gemeint sein; denn ein Körper beschreibt keine Linie. Auf einen Punkt aber wirken beliebig viele Kräfte genau dasselbe wie eine einzige. Der Widerspruch gegen den bekanntesten Satz der Statik liegt also zu Tage. — Seite 3. „Eine Kraft lässt sich unbeschadet ihrer Wirkung in jeden Punkt ihrer Richtung verlegen." Dass sich alles nur auf starre Körper beziehen soll, ist nirgends gesagt; und wenn es auch in der Ueberschrift stünde, so wäre es doch zur richtigen Einsicht erforderlich den Satz ausdrücklich auf starre Körper zu beschränken, weil andre Sätze allgemein gelten, denen er ohne Unterscheidung zugezählt wird. — Die Theorie des Schwerpunkts ist ganz unklar vorgetragen. Zuerst wird seine Existenz für selbstverständlich ausgegeben; später folgt auf eine durchaus ungenügende Erläuterung als angebliches Resultat, dass er ein ganz bestimmter, unveränderlicher Punkt sei. — Das Vorstehende mag genügen. Dem Zwecke des Buchs ganz angemessen wird hier die Zusammensetzung

der Kräfte unter den Gesichtspunkt der Aequipollenzlehre gestellt. Warum soll aber dem Stiefkind, dem Falle entgegengesetzter Kräfte die gleiche Woltat nicht auch zuteil werden? Hier wird immer von neuem gesondert behandelt, was selbst ohne von Aequipollenz zu reden schon unter dem geläufigen Gesichtspunkt algebraischer Summirung vereinigt werden kann. H.

Sammlung von Rechnungs-Aufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie. Für die oberen Klassen der Mittelschulen, insbesondere für Abiturienten und Lehramts-Kandidaten. Zusammengestellt von Eduard Bartl, Professor an der ersten deutschen Staatsoberrealschule in Prag. Prag 1879. H. Dominicus. 111 S.

Das Buch ist zum Gebrauche von Schülern und Autodidakten bestimmt, denen es Gelegenheit bieten soll sich in der Lösung von Aufgaben zu üben. Nach Angabe der Vorrede sind bei der Zusammenstellung benutzt die geometrischen Lehrbücher von Aschenborn, Boymann, Brockmann, Heis, Wiegand etc. und die Aufgabensammlungen von Martus, Reidt und Féaux, und der Plan des letztgenannten Werkes zu Grunde gelegt. Der I. Abschnitt fordert die Berechnung von Stücken ebener Figuren aus numerisch gegebenen Stücken. Die Aufgaben sind nach den Arten der Figuren geordnet, deren 21 nach einander behandelt werden, und zwar sind immer erst eine Reihe von Aufgaben mit Datis in Buchstaben und gleich folgender Auflösung durch die Formel, dann eine Reihe solcher, wo Zahlen gegeben sind. Der II. Abschnitt verlangt die graphische Darstellung der algebraisch gelösten Aufgabe. Der III. Abschnitt handelt von 16 körperlichen Figuren. Die Auswahl lässt an Vielseitigkeit nichts vermissen. H.



Litterarischer Bericht

CCLVI.

Methode und Principien.

Der Organismus der leblosen Natur. Ein physikalischer Versuch von Richard Prüsmann. Hannover 1879. Hahn. Kl. 8⁰. 112 S.

Das Vorliegende ist ein Versuch des Verfassers nach eigner Hypothese eine Vorstellung vom Wesen der Materie zu geben und dieselbe mit den Naturerscheinungen einigermassen in Einklang zu bringen. Die Einleitung sagt manches von erkenntnisstheoretischen Grundsätzen, was wir nicht ganz mit Stillschweigen übergehen dürfen. Der Verfasser erkennt neben der Induction die Analogie als gleichberechtigtes Hülfsmittel der Naturforschung an. Dagegen an sich ist nichts einzuwenden; die eine wie die andere vermag keinen Schluss zu rechtfertigen, dennoch sind beide förderlich, erstere unentbehrlich, es hätte nur gesagt werden sollen, welche andere Stellung einer jeden zukommt. Im Buche selbst wird von der Analogie vorwaltende und sehr ausgedehnte Anwendung gemacht, die Hypothesen sind sichtlich nach ihrer Anleitung formirt. Eigentümlich ist nur, dass der Verfasser die Eingebungen der Analogie in apodiktischer Redeform ausspricht, Bei anfänglichem Lesen wundert man sich über die beschränkte Logik; wenn dann aber die Behauptungen zu weit gehen, kann man nur noch annehmen, dass das Wort „muss" nicht den gewöhnlichen Sinn hat. Freilich ist dann auch nicht mit Gewissheit zu ersehen, wo der Verfasser hat wirklich notwendige Folgerungen ausdrücken wollen. Jedenfalls würde es deutlicher gewesen sein, wenn er alles, wass seine Hypothese ist, als frei gewählte bezeichnet und den subjectiven Grund seiner Wahl weniger betont

hätte. Die Einleitung stellt ferner folgenden, nie zur Ausführung kommenden, daher ganz ungefährlichen Grundsatz auf. „Bei jeder Untersuchung ist es gerathen, vorher genau die Grenzen festzusetzen, über welche man nicht hinausgehen will oder kann, und die Tragweite der Mittel zu prüfen, mit denen man zum Ziele zu gelangen hofft.“ Hiernach soll also, wer ein unbekanntes Land erforschen will, die Grenze vorher bestimmen, bis zu welcher es ihm möglich sei vorzudringen? Diese Grenze liegt ja gerade in der Gegend, von welcher er am wenigstens weiss, über die ihm daher am wenigsten ein Urteil zukommt. Dies zeigt sich gleich bei der ersten Frage nach der allgemeinen Competenz des menschlichen Geistes; denn der Verfasser sagt, sie könne nicht entschieden werden, man müsse die Competenz zur Hypothese machen. D. h. doch, die Rechtfertigung kommt später, die Grenze wird nicht vorher festgestellt, der Grundsatz bleibt unausgeführt. Die zweite Frage betrifft den Gegenstand der Untersuchung. Das Lebendige entzieht sich der mathematischen Behandlung, die leblose Materie hingegen beherrscht, wie der Verfasser meint, der Geist in jeder Beziehung und vollkommen, eine ebenso grundlose wie unschädliche Behauptung, denn die zeitweiligen Mängel der Beherrschung machen sich bald genug von selbst bemerkbar. Der Kern der ganzen Auslassung ist: Ich will mich bloss mit der unorganischen Natur beschäftigen, weil die organische zu grosse Schwierigkeiten bietet. Diesen Grund wird wol jedermann gern gelten lassen und zufrieden sein, wenn der Verfasser mit der erstern fertig wird. Zum Schluss wird noch eine Aehnlichkeit gefunden zwischen den Himmelskörpern und den Atomen, welche als leitende Analogie zur Annahme der letzteren dient. Unter diesem Gesichtspunkt bildet die Doctrin von der Natur des Stoffes das Bindeglied zwischen Astronomie, Physik und Chemie.

Die Annahme in Betreff der Constitution der Materie ist nun folgende. Die Materie besteht aus Atomen und Aether; die Atome sind starre homogene Kugeln; sie erfüllen den Raum innerhalb, der Aether den ganzen Raum stetig; der Aether durchdringt die Atome widerstandlos; die Atome ziehen den Aether an, ob auch einander, ist nicht gesagt; der Aether widersteht elastisch der Verdichtung, hat im indifferenten Zustande eine constante Dichtigkeit, durch Anziehung der Atome verdichtet er sich; die Anziehung kommt nur durch Fortpflanzung zustande, eine Aufstellung der indes nirgends Folge gegeben wird, das Anziehungsgesetz ist vielmehr gleich anfänglich das Newton'sche. Die Naturerscheinungen sollen durch Rotation der Atome erklärt werden, welche der Verfasser stets als verbunden mit Rotation des Aethers darstellt, ohne jedoch zu sagen, ob und wie eins durch das andre bewirkt wird; von Translation der

Atome ist fast nirgends die Rede. Die Gestaltung des Aethers unter dem Einflusse erst der Anziehung, dann der Rotation eines isolirten Atoms wird einer Rechnung unterzogen, die jedoch in Ermangelung der notwendigen Angaben unverständlich ist, nachher auch auf das System der Atome ausgedehnt wird. Aus ihr resultirt die sogenannte Polstrahlung und Aethercapacität. Die Polstrahlung soll hernach auch der Lichtstrahlung zugrunde liegen. Im übrigen wird manches mathematisch behandelt, andres nicht. Der Verfasser hätte bei seiner nicht zu bezweifelnden mathematischen Befähigung für seinen Zweck gewiss mehr erreicht, wenn er statt seiner Universalbetrachtung nur einen Punkt ordentlich durchgeführt, namentlich gezeigt hätte, wie auf ein Continuum eine Lichttheorie gebaut werden könne. Geht das nicht, so ist die Hypothese über die Constitution der Materie ziemlich zwecklos.
Hoppe.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik. II. Theil. Lehrbuch der Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch. Von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Wertheim am Main. Drittes Buch. Das Pensum der Prima. Stereometrie, sphärische Trigonometrie und Kegelschnitte. Mit 77 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1879. Weidmann. 216 S.

Vier Schriften desselben Verfassers, und unter diesen 3 Teile des Gesammtwerks, zu welchem das gegenwärtige Lehrbuch gehört, sind im 244. 247. und 251. litt. Ber. besprochen. Die Stereometrie, welche gewöhnlich als synthetische Verwertung der planimetrischen Doctrin für das weitere Gebiet des Raumes erscheint, wird hier vielmehr als allgemeinere Doctrin aufgefasst, die sich, wenigstens im Anfang, nicht auf die vorausgehende Behandlung der Planimetrie stützt, sondern im Gegenteil in der Grundlegung noch weiter als letztere zurückgreift. Die Grundbegriffe der Geometrie werden mit ausserordentlicher Gründlichkeit und Ausführlichkeit entwickelt. Das Studium der Riemann'schen Schriften hat sichtlich den Verfasser auf die Beachtung der wichtigen Punkte gelenkt. So entsprechen auch die aufgestellten 6 Axiome (eine Zahl die nicht als feststehend zu betrachten ist) im ganzen den Beschränkungen des empirischen Raumes nach Riemann. Die didaktische Verarbeitung der von Riemann aufgenommenen Ideen ist zum grossen Teil mit Glück und Geschick

ausgeführt, doch geht wol manches über das Ziel des Schulunterrichts hinaus. Das ausführliche Eingehen auf den allgemeinern Grössenbegriff, der nachher auf die Raumgrösse eingeschränkt wird, möchte wol kaum von Nutzen fur die Deutlichkeit sein. Dagegen lässt die im Entwickelungsgang der Begriffe von der wirklich räumlichen Ausdehnung an schwerlich ein Glied entbehren. Bemerkenswert ist z. B. dass erst die kürzeste Linienverbindung zwischen 2 Punkten, durch sie der Abstand, dadurch die Kugel, dann die Rotation und der Kreis, dadurch die Gerade erklärt wird, dass also die Gerade zweimal, mit Einschaltung anderer Elemente, Gegenstand der Erklärung ist, erst als Kürzeste, nachher als Unveränderliche bei Rotation. In der Tat liegt aber der letztern Erklärung der Begriff des Abstands zugrunde, denn ohne ihn ist eine Bewegung einer Figur, im strengen Sinne, d. h. unter der Voraussetzung, dass sie sich congruent bleibt, nicht denkbar; für den Begriff der Congruenz war er erforderlich. Die Erklärung der kürzesten Verbindung enthält eine Lücke, wie deren im Buche sonst keine vorkommt, und die auch in einer Anmerkung so gut wie eingestanden wird. Dass die Verbindung zweier verschiedener Punkte ein Minimum hat, kann nicht bewiesen werden. Das Minimum ist überhaupt keine absolute Grösse, denn wir können die Linieneinheit, und proportional die Welt, beliebig vergrössern oder verkleinern. In einer so exacten und gründlichen Bearbeitung wie die gegenwärtige durfte dieser Umstand nicht verhüllt werden. Im Texte ist es als unrichtig zu bezeichnen, dass durhh das Wort „mithin" die Existenz eines Minimums als Consequenz hingestellt wird. Die Anmerkung aber beruft sich zur Ergänzung des Fehlenden auf die Anschauung, mit Unrecht, denn zur Anschauung gehört notwendig und untrennbar die gerade Linie, von der erst später die Rede ist. In der nach letzterer Stelle folgenden Anmerkung steht in der Tat das Axiom (I.), welches an ersterer Stelle schon unentbehrlich war. Im 247. litt. Ber. p. 29. ist an einem Beispiele gezeigt, wie die unmittelbare Anschauung, welche, wie es nicht anders sein kann, stets auf oberflächlicher, uncontrolirter Beobachtung beruht, fehl gehen kann. Bezüglich darauf sagt der Verfasser in einer Anmerkung zum gegenwärtigen Vorwort: seine Ueberzeugung von der Möglichkeit und Zuverlässigkeit mathematischer Erkenntniss aus unmittelbarer Anschauung sei durch jenes Beispiel — denn darin bestand der „Einwand" wie er's nennt — nicht alterirt worden. Dass in jenem Beispiel das von ihm durch ein Axiom sanctionirte Urteil unmittelbarer Anschauung irrte, hat er nicht in Abrede gestellt. Ein Urteil kann also in einem unbewussten Falle falsch sein; dennoch ist es zuverlässig! Der gleiche Fall kommt hier von neuem. Der Behauptung, dass unter allen Verbindungen zweier Punkte eine die kleinste sei, wird der Anfänger, der, wenn er nach unmittelbarer Anschauung

urteilt, die Vorstellung der geraden Linie nicht nach dem Gedankengang des Buchs entwickeln kann, sondern, weil er sie einmal besitzt, auch notwendig in Anwendung bringen muss, leicht beistimmen. Diese Beistimmung gründet sich dann nicht auf Einsicht, sondern auf Täuschung. Auch ist hier das Ergebniss des vermeintlichen Erkennens nicht einmal wahr. Denn, wenn die Existenz eines Minimums aus der Verschiedenheit der Punkte notwendig folgte, so müsste das Minimum eine bestimmte Grösse sein, und so wird auch die unmittelbare Anschauung urteilen. In Wirklichkeit aber ist es eine ganz willkürliche Grösse, keiner Zahl gleich und aller Bestimmung ausser sich selbst entbehrend. Dieser Punkt ist so ausführlich besprochen worden, weil er sich ganz besonders eignet darzutun, dass die Erklärung der Axiome als ursprünglich evidente Sätze unhaltbar ist. Eine solche Erklärung setzt die eingewurzelte Meinung (δόξα) an die Stelle der exacten Erkenntniss (ἐπιστήμη) und stellt dadurch die Mathematik auf den vorplatonischen Standpunkt. Dass man sich sosehr gegen die Anerkennung der Axiome als Hypothesen wehrt, kommt hauptsächlich von dem Misbrauch des Wortes Hypothese. An eine wissenschaftliche Hypothese muss man dieselben Anforderungen stellen wie an ein Axiom: sie muss einfach sein, darf nicht vielerlei, nicht mangelhaft bestimmte Punkte enthalten, die sich einzeln bejahen und verneinen lassen, und muss alle Möglichkeiten zu überschauen gestatten. Der Glaube an die Wahrheit des Aufgestellten ist in gleichem Falle bei der Hypothese wie beim Axiom; mit der Doctrin selbst hat er nichts zu tun, er ist Antrieb zum Lernen, wächst mit dem auf der Hypothese ruhenden Wissensinhalt und wird unumstösslich, sobald niemand sich zutraut letztern auf andrer Grundlage neu zu schaffen. Durch die Auffassung der Axiome als Hypothesen gelangen wir erst zur vollen Aufrichtigkeit gegen die Schüler; die Ambition des absoluten Wissens, welche noch nie der Einsicht förderlich gewesen ist, wird dadurch als Selbsttäuschung verurteilt.

Die Abschnitte des Buchs sind: 1) Grundbegriffe, Beziehungen zwischen Geraden, Ebenen, Kugel-, Kegel- und Cylinderflächen woran sich Aufgaben schliessen; 2) Körperlehre der Stereometrie im engern Sinne; 3) Sphärik und sphärische Trigonometrie; 4) Kegelschnitte. Im 1. Abschnitt waltet der logische Gesichtspunkt dermassen vor, dass die Systematik etwas dadurch beeinträchtigt worden ist. Letztere ist besonders notwendig bei der Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen, deren Kenntniss ohne völlige Vertrautheit wenig nützen kann; dazu aber wird eine übersichtliche Zusammenordnung der Sätze erfordert; hier ist das Zugehörige zu weit getrennt. Auf die Vollendung in logischer Beziehung soll deshalb noch immer der Hauptwert gelegt werden. Aber gerade damit diese sich eine höhere

Schätzung erwerben könne, darf das Lehrbuch nicht in andrer Hinsicht gegen weniger gründlich bearbeitete im Nachteil stehen. Man muss beide Gesichtspunkte zu vereinigen streben, keinen auf Kosten des andern massgebend machen, was sich nicht von vorn herein für unmöglich erklären lässt. Die Aufgaben sind erst solche mit, dann ohne Lösung, darauf folgen zu beweisende Sätze. Die Gegenstände der übrigen Abschnitte sind selbstverständlich; nur die der Sphärik sind aus der Wahl des Verfassers hervorgegangen. Die Eigenschaften der Kegelschnitte werden aus dem ebenen Schnitt des Kegels hergeleitet. In methodischer Beziehung ist das Buch der Beachtung sehr zu empfehlen, weniger als ein vollendetes als ein mit ungewöhnlicher Befähigung und Sorgfalt selbständig bearbeitetes. Hoppe.

Die Kegelschnitte behandelt für die oberen Classen höherer Lehranstalten von M. Simon, Oberlehrer am Kaiserl, Lycäum in Strassburg, und A. Milinowski, Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg im Elsass. Zweite Abtheilung: Ellipse und Hyperbel von A. Milinowski. Mit 8 lithographirten Tafeln. Berlin 1879. S. Calvary u. Co. 66 S.

Es werden die Haupteigenschaften von Ellipse und Hyperbel nach der Methode der neuern synthetischen Geometrie in einfachster Weise hergeleitet, die Begriffe und Sätze dieser Doctrin aber nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern gleich anfangs elementar definirt und entwickelt. Zu diesem Zwecke geht der Lehre von den Kegelschnitten ein Abschnitt mit dem Titel: „Harmonische Eigenschaften" — voraus, welcher mit dem Brianchon'sche Satze für den Kreis schliesst. Den letzten Teil des Buches bilden 228 Aufgaben, die schwierigen mit erleichternden Weisungen. H.

Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, angewandt auf etwa 400 Aufgaben von Dr. Jul. Petersen, Docent an der polytechnischen Schule zu Kopenhagen, Mitglied der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften. Unter Mitwirkung des Verfassers nach der zweiten Auflage des Originals ins Deutsche übertragen von Dr. R. von Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium in Kiel. Kopenhagen 1879. Andr. Fred. Höst u. Sohn. 108 S.

Das Buch ist eine Sammlung planimetrischer Aufgaben für rein constructive Lösung, welche nach den Methoden der Lösung geordnet und ausgewählt sind. Dass jedem Abschnitt eine Anweisung zum Suchen der Lösung vorausgeht, kann man nicht als unterscheidend

ansehen, da dasselbe auch in andern Aufgabensammlungen geschieht. In dieser Anweisung ist hier ein synthetischer Fortschritt. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit den geometrischen Oertern. Ein durch 2 Bedingungen bestimmter Punkt ist Durchschnitt der 2 Oerter, deren jeder einer Bedingung genügt. Es kommt dann darauf an, dass jeder Ort eine Gerade oder ein Kreis sei, damit er Construction mit Zirkel und Lineal zulässt. Von dieser Eigenschaft wird eine grosse Anzahl aufgeführt, mit der Bestimmung, dass ihre Kenntniss zur Verwendung bereit sein soll. Es folgen dann viele Aufgaben, die sich direct durch sie lösen lassen. Die erste Erweiterung ist die „Multiplication der Figuren", d. h. Construction ähnlicher ähnlich liegender Figuren. Später folgt die Transposition, erst durch Parallelverschiebung, dann durch Drehung. Diese Operationen sollen an Teilen der Figur versucht werden, wenn bei unmittelbar vorliegender Lage der Teile sich die Oerter nicht construiren lassen. Für jede Art folgen viele Aufgaben. H.

Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen. Von Dr. H. Dölp, weiland Professor am Polytechnikum in Darmstadt. Dritte, sorgfältig durchgesehene Auflage. Giessen 1878. J. Ricker. 209 S.

Die letzte Auflage ist von K. Hattendorff veranstaltet, und soviel als möglich unverändert. Die Aufgaben beziehen sich auf Differentiation der Functionen, nebst einigen Anwendungen, Maxima und Minima u. a., ferner auf Integration der Functionen 1 Variabeln, zuletzt auf geometrische Anwendungen, die sich indes nur über die elementarsten Lehren von den ebenen Curven und daraus durch Rotation erzeugte Figuren erstrecken. Jedem Abschnitt geht die Theorie voraus. Ausser dem letzten, welcher wol nicht als Hauptsache betrachtet worden ist, möchten die Aufgaben über Maxima und Minima, deren nur 32 für 1 Variabeln, 13 für 2 Variabeln, sämmtlich mit gegebenen analytischen Ausdrücken, aufgeführt sind, eine Vermehrung zu wünschen lassen. H.

Hilfstafeln für Messungen elektrischer Leitungswiderstände vermittelst der Kirchhoff-Wheatstone'schen Drahtcombination, berechnet von Eugen Obach, Dr. phil. Mit 2 lithogr. Tafeln. München 1879. R. Oldenbourg. 16 (Erklärung) + 41 (Tafeln) Seiten.

Die Tafeln geben für alle ganzen Zahlen x von 1 bis 999 den Wert von

$$\frac{x}{1000-x}$$

und dessen Logarithmus auf 5 Stellen. In dieser Function drückt sich nämlich der eine Factor des zu messenden Widerstandes in einem zwischen A und B gehenden Strome aus, wenn A und B unter sich und mit einem dritten Punkte C durch Drähte verbunden sind, und das Ende eines Drahtes CD längst AB so geschoben wird, dass der durch CD gehende Strom sich auf null reducirt, wo $AB = 1000$, $AD = x$ gesetzt ist. Der Nutzen der Tafel wird jedem, der den genannten Apparat gebraucht, deutlich sein. H.

Mechanik.

On the fundamental formulae of dynamics. By J. W. Gibbs, New Haven, Connecticut. From the American Journal of Mathematics. II. 1879. p. 49—64.

Der Verfasser vollzieht einige Transformationen an der Alembert-schen Gleichung. Er leitet zuerst eine analoge Gleichung daraus ab, in welcher an die Stelle der Variationen der Coordinaten die Variationen der Beschleunigungscomponenten treten. Er erweitert dann die Einführung der Zwangsgleichungen, indem er auch Ungleichungen zuzieht. Die Beschleunigungscomponenten und ihre Variationen vereinigen sich zur Variation des halben Quadrats der Beschleunigung. Es werden Fälle von Unstetigkeiten und solche behandelt, wo die Variationen keine Differentiale sind. Die neue Formel wird mit der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten verglichen, zuletzt Folgerungen auf Eigenschaften der Bewegung daraus gezogen. H.

Elasticität, Akustik und Optik.

Vowel theories. By Alexander Graham Bell. (Read before the National Academy of Arts and Sciences. April 15, 1879.) American Journal of Otology, July 1879. 20 S.

Der Verfasser nimmt es als unbestritten auf, dass der Unterschied der Vocale auf der Combination gleichzeitiger Töne beruht, welche er Partialtöne nennt, und untersucht die Frage, ob diese Partialtöne von absoluter, unabhängiger Höhe sind oder in constantem Abstand

vom gesungenen Hauptton variiren. Die Untersuchung beginnt mit Beobachtung der Organe. Die Mundhöhle wird als aus 2 Teilen bestehend gedacht, deren Grenze jedoch der Zeichnung gemäss der Zungenrücken bildet, so dass die Zähne als unbeteiligt erscheinen, der vordere Raum noch grösstenteils hinter den Zählen liegt. Es werden unterschieden rounded vowels, Vocale mit Verengung der Lippenöffnung, von denen mit offenen Lippen und high-front vowels, Vocale mit Erhebung der Zunge, von denen mit gesenkter Zunge, und gefunden, dass jedem so gebildeten Hohlraume eine eigene Tonhöhe zukommt. Wenn man hier voraussetzt, dass die Höhe der Partialtöne allein durch die Grösse der Räume bedingt sei, so kann offenbar das Resultat der Betrachtung nur die Unabhängigkeit derselben vom Hauptton sein. Versuche mit Morey's Phonautographen, welcher die Vibrationen der Töne auf berusstes Glas zeichnet, gaben wenig Aufschluss; verschiedene Vocale bei ungleicher Tonhöhe zeigten oft ähnliche Curven. Der Ausfall war im ganzen mehr zugunsten der Annahme harmonischer Partialtöne. Für mehr entscheidend hält der Verfasser die Versuche mit Edison's Phonographen, welcher die Laute reproducirt. Hier zeigte sich der bemerkenswerte Umstand, dass durch beschleunigte Rotation die Vocale an Rundung zunahmen, d. h. dass *i* in *ü* übergieng, auch dass die Tonhöhe variirte. Es wird dann das aus Versuchen mit Phonograph resultirende Urteil von Jenkin und Ewing erwähnt, welche sowol den harmonischen als auch den absoluten Partialtönen einen Anteil an der Unterscheidung der Vocale zuschreiben. Der Verfasser hält die ersteren für die wesentlichen.

H.

Vermischte Schriften.

Annali di matimatica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Briochi in Milano colla cooperazione dei professori: Luigi Cremona in Roma, Eugenio Beltrami in Pavia, Enrico Betti in Pisa, Felice Casorati in Pavia. Serie II. Tomo IX. Milano 1879. G. Bernardoni.

Der Inhalt des 9. Bandes ist folgender.

Pepin: Ueber die Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Brioschi: Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Hermite: Ueber die Lamé'sche Gleichung.

Fuchs: Ueber eine Classe von Differentialgleichungen, welche durch Abel'sche oder elliptische Functionen integrirbar sind.

Geiser: Ueber die Theorie der ebenen Curven 4. Grades.

Casorati: Untersuchungen über die algebraischen Differentialgleichungen.

Henneberg: Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen.

Henneberg: Ueber die unendlich kleinen Schwingungen welche ein Faden, der an dem einen Endpunkte befestigt und an dem andern durch ein Gewicht belastet ist, unter dem Einflusse der Schwere und einer anfänglichen Gleichgewichtsstörung ausführt.

Halphen: Ueber die singulären Linien der algebraischen Flächen.

Kiepert: Ueber die Auflösung der Gleichungen 5. Grades.

Brioschi: Bemerkung zur vorhergehenden Abhandlung.

Weber: Ueber die Transformationstheorie der Theta-Functionen, insbesondere derer von 3 Veränderlichen.

Brioschi: Ueber eine Classe von Modulargleichungen.

Tonelli: Ueber einen Satz aus der Theorie der Functionen.

Henneberg: Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel ohne Einwirkung von äussern Kräften.

Schering: Bei der hundertjährigen Geburtstagsfeier von Karl Friedrich Gauss (übers. v. Prof. Beltrami).

Christoffel: Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale 1. Gattung.

Harnack: Ueber algebraische Differentiale.

Malet: Ueber ein Problem in der Algebra. H.

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXVI. 1878—79. Serie terza. Transunti. Volume III. Roma 1879. Salviucci.

Der Inhalt an mathematischen Abhandlungen ist folgender.

Battaglini: Ueber die Complexe 2. Grades.

De Gasparis: Product zweier Determinanten für 3 Indices ausgedrückt durch eine gewöhnliche Determinante.

Brioschi: Ueber die Modulargleichung 8. Grades.

Cremona: Zum Andenken an den am 16. Nov. 1878 zu Rom verstorbenen Mathematiker Domenico Chelini.

Chizzoni: Ueber Flächen und Linien als Orte oder Einhüllende von Geraden, welche die entsprechenden Punkte zweier homographischen ebenen Curzen verbinden (Bericht von Cremona).

De Gasparis: Ueber den Ausdruck eines der Correctionsterme der elliptischen Coordinaten in der Theorie der planetarischen Störungen.

S. Cantor: Eine einfache Erzeugung der Jacobischen Curven eines Netzes von Curven 3. Ordnung.

Jenkins: Ueber die säculare Variation der Magnetnadel in London seit 1580.

De Gasparis: Ueber einige elliptische Elemente in der Function der mittlern Anomalie ausgedrückt in Teilen des Radius.

Winterberg: Ueber die geodätische Linie. Drittes Problem. Analysis der sphäroidischen Dreiecke. (Bericht von Cremona).

De Gasparis: Ueber den reciproken Wert des Kubus des Radiusvectors eines Planeten entwickelt nach Potenzen der Zeit.

Saviotti: Ueber eine neue allgemeine Methode der Zusammensetzung der Kräfte und deren Erweiterung auf die Rechnung der „travature reticolari". (Bericht von Cremona).

F. Klein: Ueber die Resolvente 11. Grades der Modulargleichung 12. Grades.

Villari: Ueber die thermischen und galvanometrischen Gesetze der elektrischen Funken, welche durch vollständige und partielle Entladungen der Condensatoren hervorgebracht werden.

Cantoni: Ueber die im Innern der Liquida diffundirten Dämpfe.

Brioschi: Ueber die Gleichung des Oktaeders. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik 1875. 31. Jhrg. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Methode und Principien.

Ritter, A., Anwend. d. mechan. Wärmetheorie auf kosmolog. Probleme. Hannover, Rümpler. 2 Mk.

Snay, E., Darlegg. d. metaphys. Fundamentalbegriffes. Breslau, Koebner. 1 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, V., Taschenb. d. Logarithmen. 6. Afl. Wien, Bermann & A. 1 Mk. 20 Pf.

August, F. E., vollst. logarithm. u. trigonometr. Tafeln. 12. Afl. v. F. August. Leipzig, Veit & Co. 1 Mk. 60 Pf.

Bardey, E., method. geordnete Aufgabensammlg. üb. alle Theile d. Elementar-Arithmetik. 8. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Gauss, F. H., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometr. Tafeln. 2 Afl. Zeitz, Strien. 2 Mk.

Gerlach, H., Lehrbuch d. Mathematik. 3. Thl. 3. Afl. Dessau, Reissner. 1 Mk. 50 Pf.

Hertzer, H., fünfstell. Logarithmen-Tafeln. 2. Afl. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Jordan, W., mathemat. u. geodät. Hülfstafeln m. Kalend. f. d. J. 1880. Stuttgart, Wittwer. 2 Mk. 50 Pf.

Krafft, Th., Sammlg. arithmet. Beispiele u. Aufg. 1. Bdchn. 5. Afl. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 80 Pf.

Löw, E., Aufgaben z. Rechnen m. Decimalbr., unter Mitwirkg. v. F. Müller u. C. Ohrtmann zusammengestellt. 3. Afl. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 20 Pf.



Fig. 1.

Fig. 2.

X. Ameseder: Bemerkungen über das Erzeugniss u.s.w.

Steindruckerei v. F. W. Kunike



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.

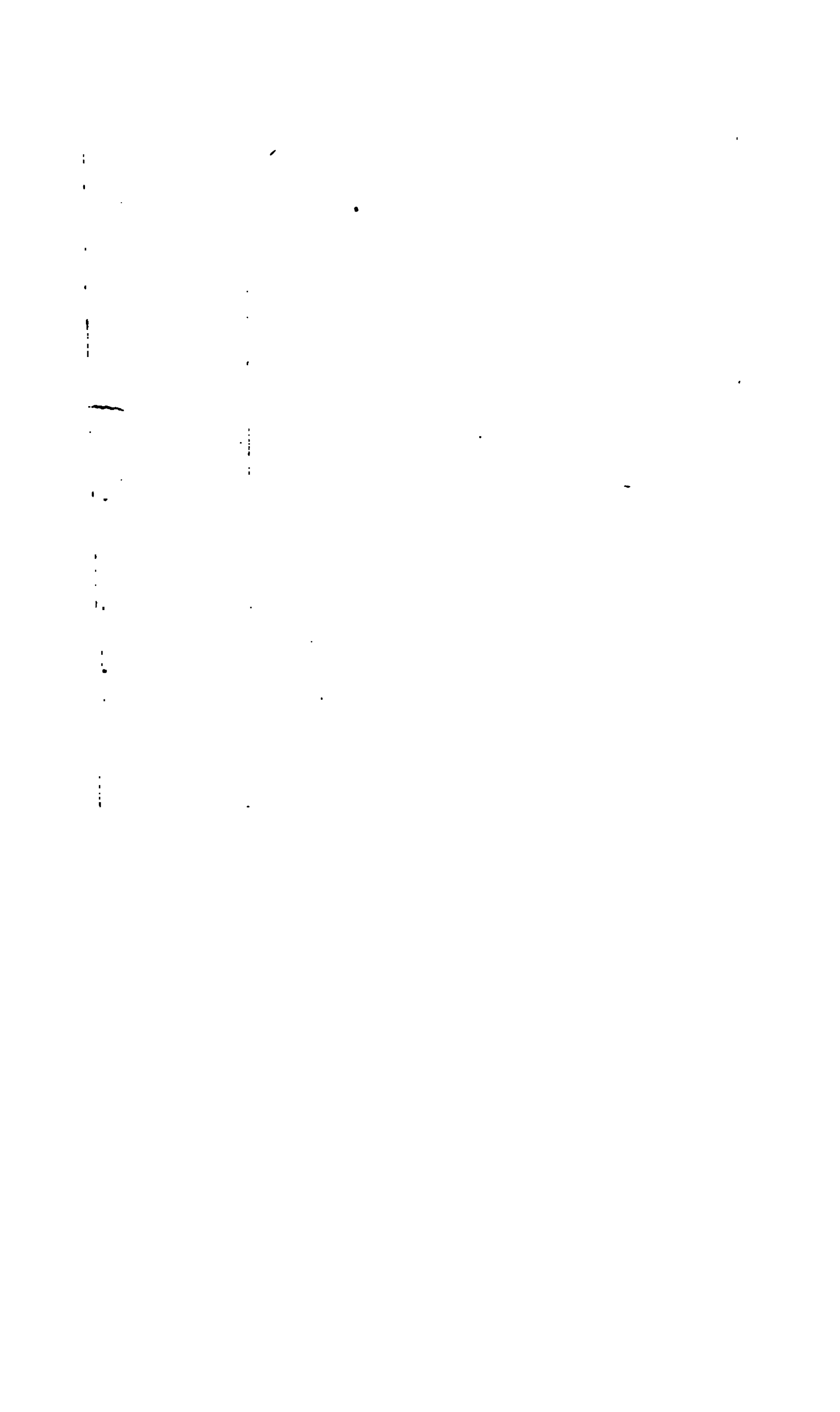
Fig. 3.

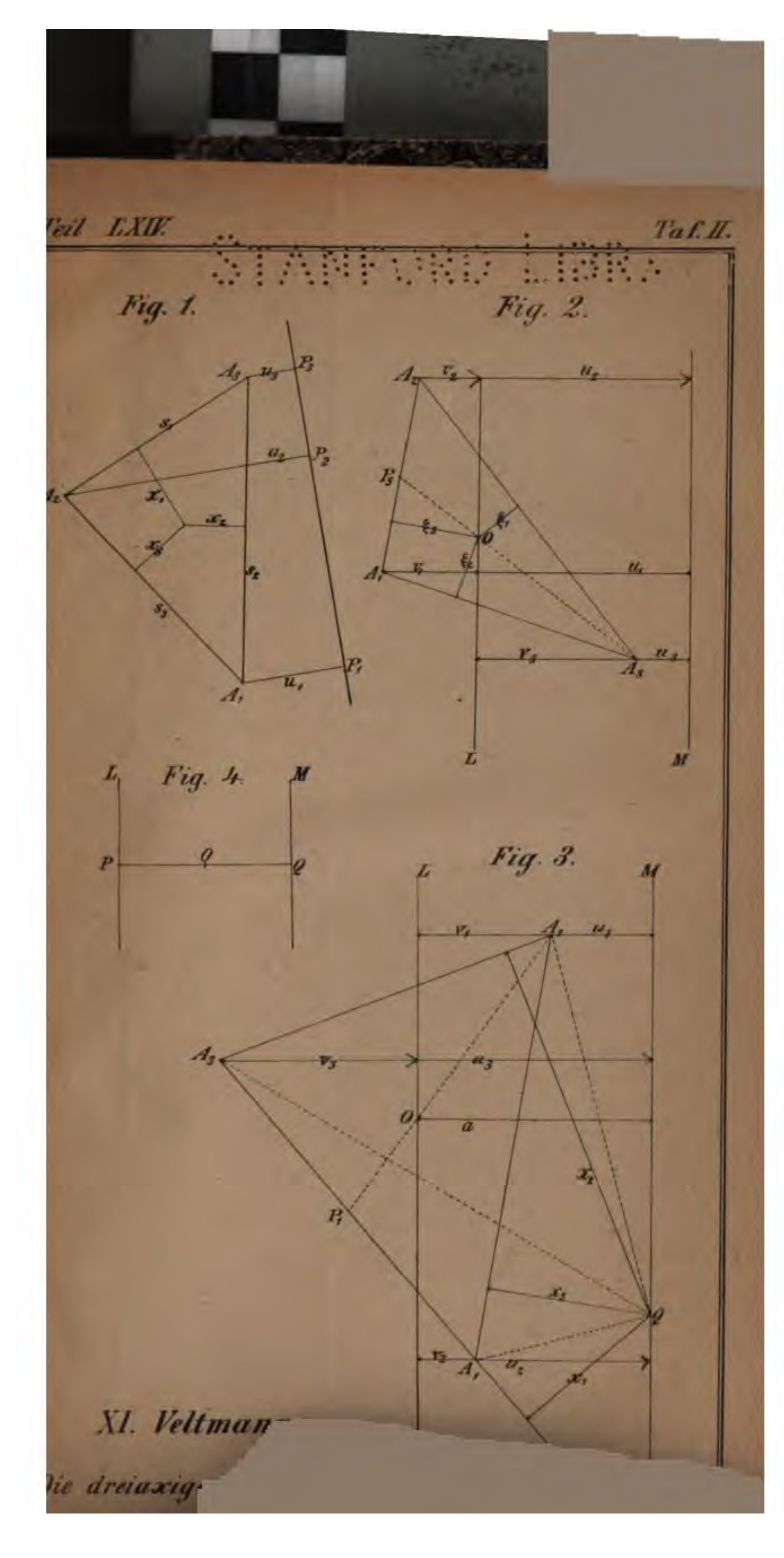
XI. Veltmann:

Die dreiaxigen Coordinaten etc.

Teil

Taf

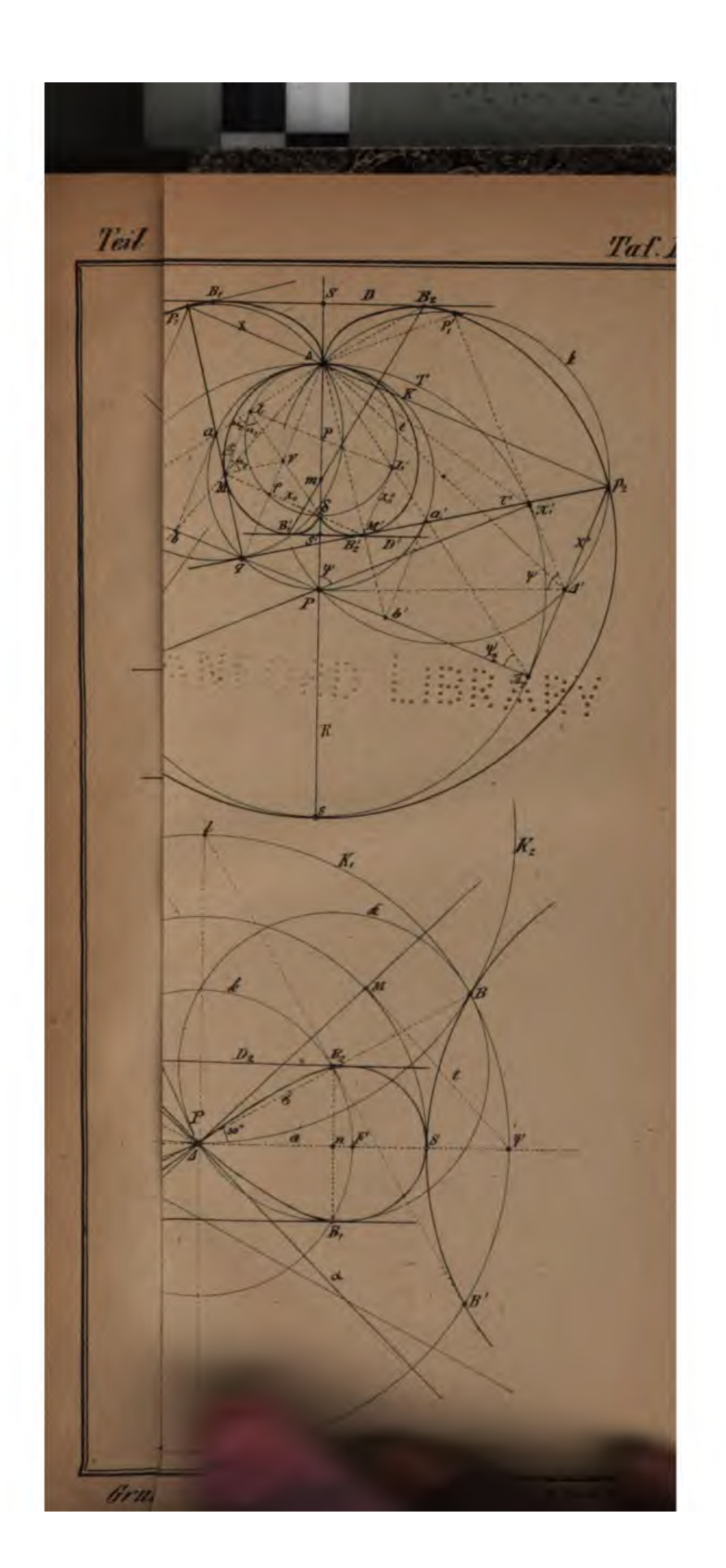




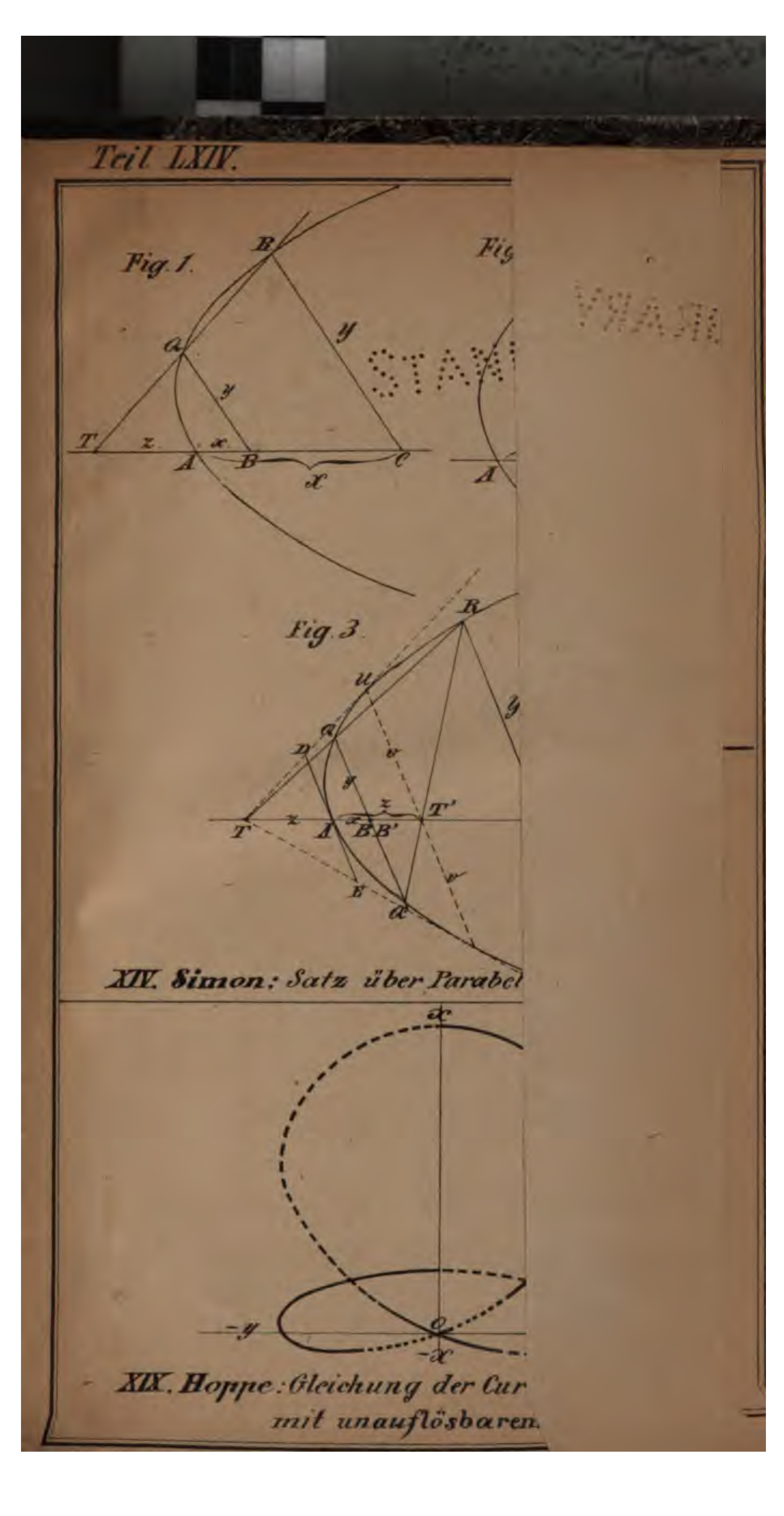
XI. Veltman…

Die dreiaxig…



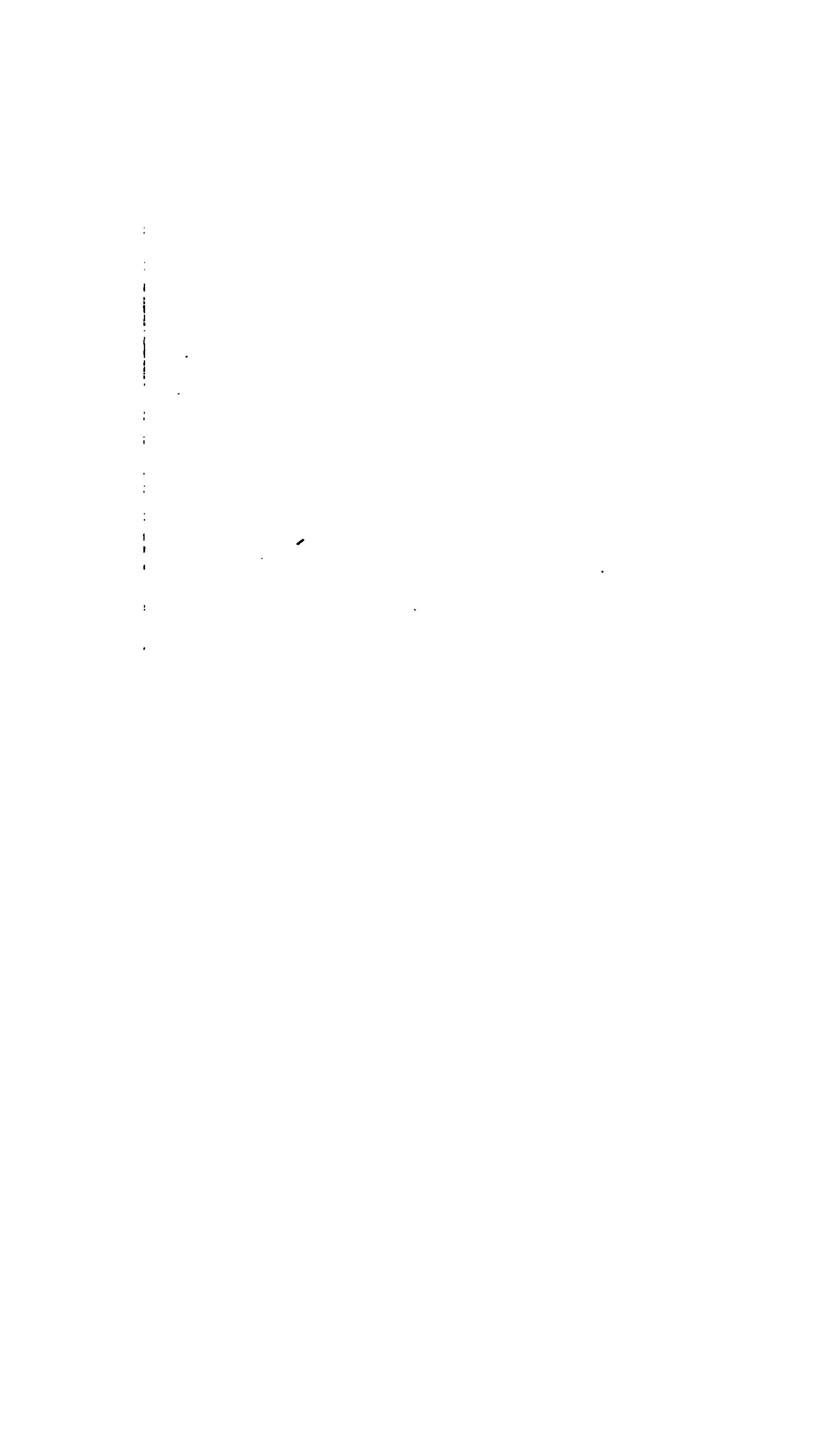

Teil
Taf. I
Gru

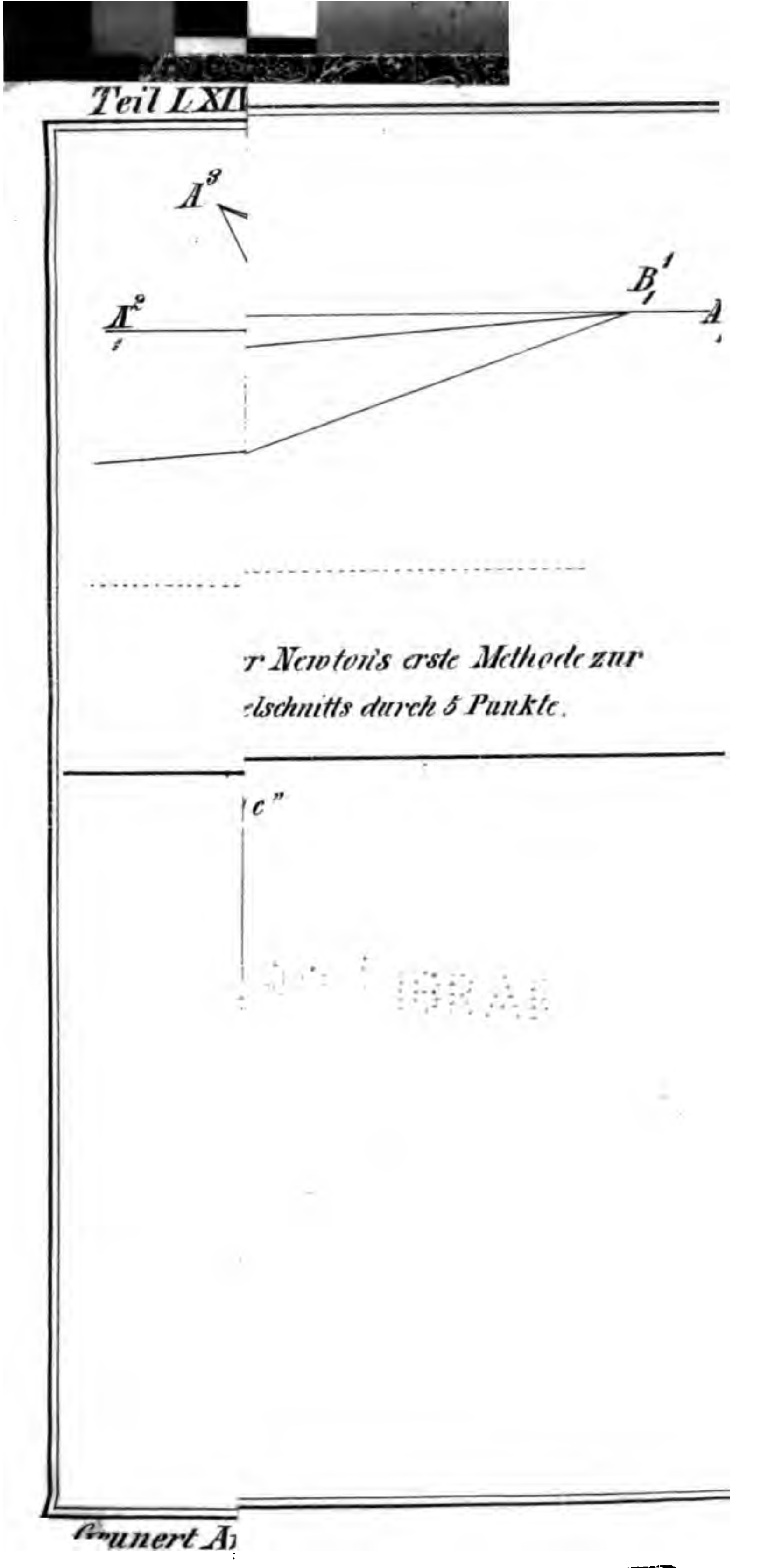




XIV. Simon: Satz über Parabel

XIX. Hoppe: Gleichung der Cur
mit unauflösbaren

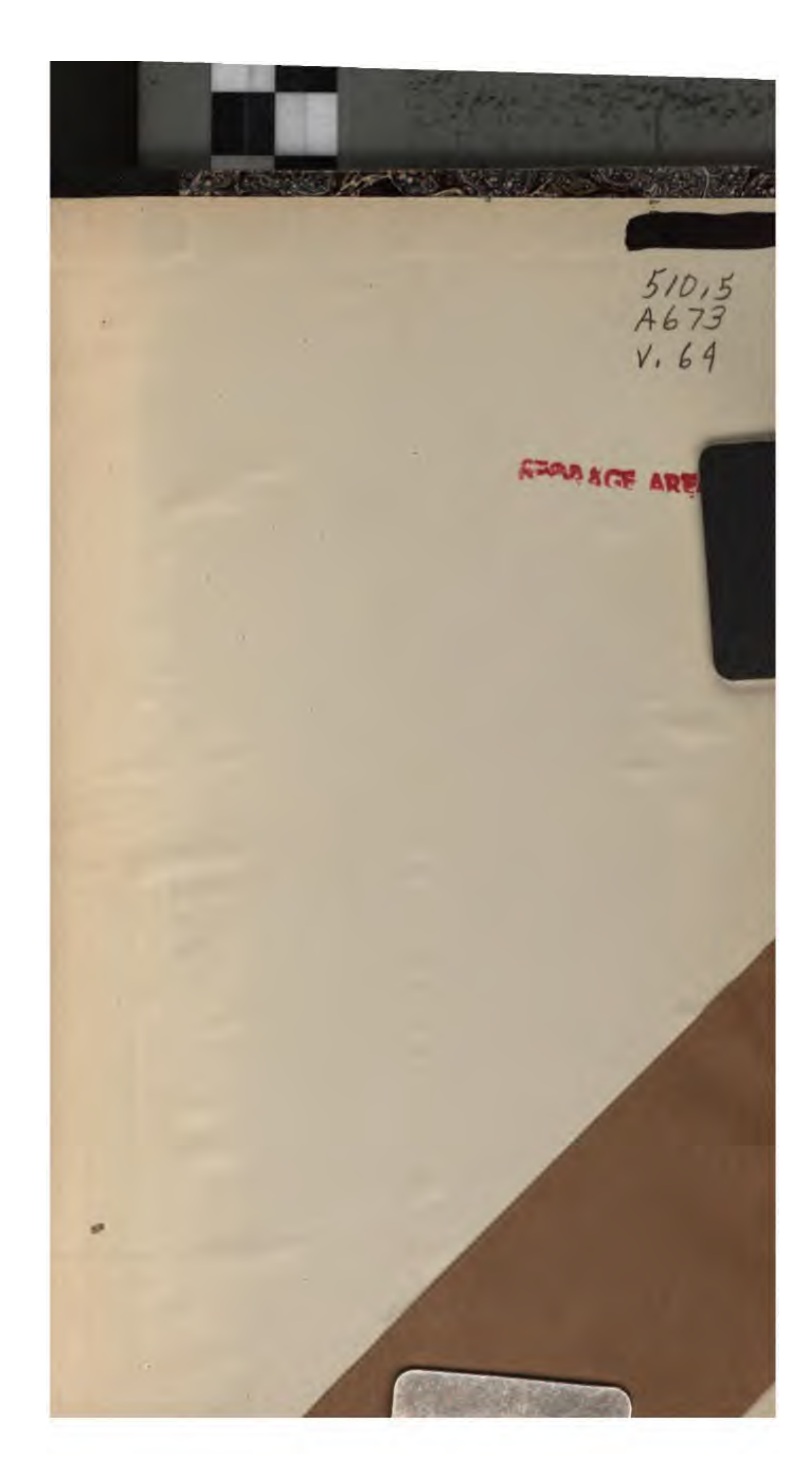




r Newton's erste Methode zur
elschnitts durch 5 Punkte.






510.5
A673
v. 64

